S 804 C.9

RECUEIL

DES PIECES

QUI ONT REMPORTÉ LES PRIX

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

TOME NEUVIEME.

RECUEIL

DES PIÈCES

QUI ONT REMPORTÉ LES PRIX

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

TOME NEUVIÈME.

RECUEIL

DES PIECES

QUI ONT REMPORTÉ LES PRIX

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

Depuis leur fondation en M. DCC. XX.

TOME NEUVIEME.

Qui contient les Pieces de 1764, 1765, 1766, 1770 *& 1772.*

A PARIS;
Chez PANCKOUCKE, rue des Poitevins, à l'Hôtel de Thou.

M. DCC. LXXVII.
Avec Approbation & Privilege du Roi.

RECUEIL

DES PIÈCES

QUI ONT REMPORTÉ LES PRIX

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

Depuis leur fondation en MI. DCC. XX.

TOME NEUVIEME.

Qui contient les Pieces de 1764, 1765, 1766, 1770
& 1771.

A PARIS,
Chez Panckoucke, rue des Poitevins, à l'Hôtel de Thou.

AVERTISSEMENT,

Au ſujet des Pieces qui compoſent ce neuvieme Volume.

PAR l'Avertiſſement qui ſe trouve dans le huitieme Volume de cette Collection, publié au mois de Mars 1771, on voit que la Piece couronnée en 1764, devoit commencer le neuvieme Volume, & c'eſt celui que nous publions aujourd'hui; il s'étend juſqu'à 1772, & terminera la Collection des Pieces des Prix: l'Académie a décidé qu'à l'avenir ces Ouvrages ſeront imprimés chaque année dans le Volume des *Mémoires préſentés par des Savans Etrangers*, & l'on a déjà commencé, en inſérant les deux Pieces de 1774, dans le ſeptieme Volume de ces Mémoires qui eſt pour l'année 1773, & qui a été publié par l'Académie au mois de Mai 1776.

En terminant ce Recueil des Prix, très-digne de l'attention des Savans par l'importance des Pieces qui le compoſent, nous croyons devoir donner ici une notice des neuf Volumes, afin que chacun puiſſe juger de ce qu'il doit avoir pour que la Collection ſoit complète, cela ſera d'autant plus utile, que les premiers Volumes ſont devenus très-rares, & qu'il y a pluſieurs Pieces détachées & imprimées ſéparément.

DANS LE PREMIER VOLUME, on trouve d'abord la Piece qui remporta le Prix de 1720, ſur le Mouvement, par M. CROUZAS; enſuite une Diſſertation ſur cette queſtion: *Quelle ſeroit la meilleure maniere de conſerver ſur mer l'égalité du mouvement d'une pendule?* par M. MASSY.

Après une interruption qui dura juſqu'en 1724, on propoſa en 1724 & 1726, la Queſtion du choc des corps & de la communication du mouvement.

Les Pieces de MAC-LAURIN, de JEAN BERNOULLI & du P. MAZIERE, Oratorien, furent imprimées, avec un Traité des petits Tourbillons de la matiere ſubtile, pour ſervir d'éclairciſſement à la Piece du P. MAZIERE.

Pour 1725, Diſcours ſur la maniere la plus parfaite de conſerver ſur mer l'égalité du mouvement des Clepſidres ou Sabliers, par M. DANIEL BERNOULLI, célebre Géometre, qui a remporté pluſieurs autres Prix depuis 1725.

1727. De la Mâture des Vaiſſeaux, par M. BOUGUER.

DANS LE TOME II, ſuite de 1727, *De implantatione malorum*, Piece qui avoit eu l'*Acceſſit*, de même que le Mémoire de la Mâture des Vaiſſeaux, par M. CAMUS.

1728. *De cauſa gravitatis Phyſica generali diſquiſitio Phyſica experimentalis.* GEORG. BERNN. BULEFINGER.

1729. De la Méthode d'obſerver exactement ſur mer la hauteur des Aſtres, par BOUGUER.

1730. Nouvelles Penſées ſur le Syſtême de Deſcartes & ſur la manière d'en déduire les Orbites & les Aphelies des Planetes, par J. BERNOULLI.

1731. De la méthode d'obſerver en mer la déclinaiſon de la Bouſſole, par BOUGUER.

1732 & 1734. Sur la cauſe de l'inclinaiſon des Orbites des Planetes, par BOUGUER; il y en a une ſeconde Edition de 1748.

1733. De la meilleure maniere de meſurer ſur mer le chemin du Vaiſſeau, par le Marquis POLENI.

DANS LE TOME III, on trouve deux Mémoires ſur les inclinaiſons des Orbites des Planetes, par JEAN BERNOULLI & DANIEL BERNOULLI; un ſur la propagation de la Lumiere, de JEAN BERNOULLI; & quatre Pieces ſur la forme & la fabrication des Ancres, pour le Prix de 1735 & 1737, par JEAN BERNOULLI, DANIEL BERNOULLI, POLENI & TRESAGUET.

DANS LE TOME IV, cinq Pieces ſur la nature du Feu, par M. EULER, le P. LOZERAN DU FIESC, M. le Comte de CREQUY, Madame la Marquiſe DU CHATELET & M. DE VOLTAIRE.

Prix de 1740, ſur la cauſe du Flux & du Reflux de la mer, quatre Pieces de MAC-LAURIN, EULER, DANIEL BERNOULLI & du P. CAVALLERI; les trois premieres ont été réimprimées dans le Commentaire des PP. JACQUIER & LE SEUR, ſur NEWTON, & ſont encore ce qu'il y a de mieux ſur cette matiere.

DANS LE TOME V, ſur le Cabeſtan, Prix de 1739-41, il y a ſept Pieces, dont quatre partagerent le Prix, & trois eurent l'*Acceſſit*, elles forment 296 pages *in*-4°.

1743. Sur l'inclinaiſon de l'Aiman, par DANIEL BERNOULLI & L. EULER.

1744-46. Sur l'Aiman, trois Pieces de M. EULER, de M. DU FOUR & de MM. DANIEL & JEAN BERNOULLI, conjointement entre les deux freres.

TOME VI. Ce Volume publié en 1750, contient en 526 pages *in*-4°. les Pieces qui concoururent en 1745 & 1747, ſur la meilleure maniere de trouver l'heure en mer, au nombre de cinq, dont la premiere eſt de M. DANIEL BERNOULLI, les autres ſans nom d'Auteurs.

TOME VII, publié en 1769. Piece du Prix de 1748, ſur les inégalités de Saturne, par M. EULER; imprimée ſéparément en 1749, chez M. Delatour.

1751. Sur la nature des courans, par M. BERNOULLI.

1752. Sur les inégalités de Jupiter, par M. EULER.

1753. Sur la manière de ſuppléer à l'action du Vent, par M. BERNOULLI.

1755. Sur le Roulis & le Tangage, par M. CHAUCHOT, imprimée ſéparément chez Delatour.

1759. Sur le Roulis & le Tangage, par M. GROIGNARD.

1760. Sur la perfection des Verreries, par M. D'ANTIC.

1761. Sur l'Arrimage, deux Pieces, de M. J. A. EULER & de M. l'Abbé BOSSUT.

Ainſi ce Volume contient ſept Pieces, ſans compter les deux qui avoient été imprimées ſéparément, & qu'on peut y réunir.

TOME VIII, publié au mois d'Avril 1771.

1753. Sur la maniere de ſuppléer à l'action du Vent, deux *Acceſſit*, par M. EULER & M. MATHON DE LA COUR.

1756. Sur les inégalités de la Terre, par M. L. EULER.

1757. Sur le Roulis & le Tangage, par M. BERNOULLI.

1759 Sur le Roulis & le Tangage, par M. L. EULER.

1760. Sur les altérations du moyen mouvement des Planètes, par M. CHARLES EULER, ſecond fils du célebre L. EULER.

1762. Sur la réſiſtance de l'Ether, une Piece de M. l'Abbé BOSSUT, qui remporta le Prix, imprimée ſéparément à Charleville en 1766, & une de J. A. EULER, qui eut l'*Acceſſit*.

Ainſi ce huitieme Volume contient ſept Pieces, indépendamment de celle de M. l'Abbé BOSSUT, qu'on peut y réunir.

TOME IX, publié au mois de Décembre 1776.

Prix de 1764, ſur la Libration de la Lune, par M. DE LA GRANGE; quatre Pieces de 1766, ſur l'Arrimage du Navire, par M. l'Abbé BOSSUT, M. BOURDÉ DE VILLEHUET, M. GROIGNARD & un Auteur anonyme.

1766. Sur les inégalités des Satellites de Jupiter, par M. DE LA GRANGE.

1768 & 1770. Sur la Théorie de la Lune, & ſpécialement l'Equation Séculaire, par MM. LÉONARD EULER & J. A. ſon fils, conjointement.

1772. Sur la Théorie de la Lune, un Mémoire de M. L. EULER, & un de M. DE LA GRANGE.

Ainſi ce neuvieme Volume contient neuf Pieces & finit à 1772.

Le Prix de 1773 avoit pour objet la perfection des Horloges Marines, & M. LE ROY ſe propoſe de publier ſon Mémoire ſéparément, ainſi il n'entrera point dans cette Collection qui ſe trouve finie, puiſque l'on a vu ci-devant que les Pieces de 1774 ſont déjà imprimées, comme les autres le ſeront à l'avenir, dans les *Mémoires préſentés à l'Académie par les Savans Etrangers*. Mais la Collection des neuf Volumes des Prix, formera déſormais une partie intéreſſante des Ouvrages de l'Académie, qui compoſent juſqu'à préſent 115 Volumes *in*-4. Nous ne comptons pas dans ce nombre quelques Ouvrages particuliers qui ſe diſtribuent comme ſuite des Mémoires de l'Académie; ſavoir, la Figure de la Terre de M. CASSINI, ſes Elémens d'Aſtronomie en deux Volumes & ſa Méridienne vérifiée; les Infiniment petits de M. DE FONTENELLE; l'Optique de M. BOUGUER, & les Mémoires de Calcul intégral de M. FONTAINE. Ce qui formeroit en tout 122 Volumes, y compris les deux Volumes de Mémoires pour 1772.

A Paris le 25 Novembre 1776. DE LA LANDE.

On trouvera ſur la page ſuivante une Figure qui manque dans le Tome VII de ce Recueil, & que l'Auteur nous a adreſſée pour la placer dans ce Volume.

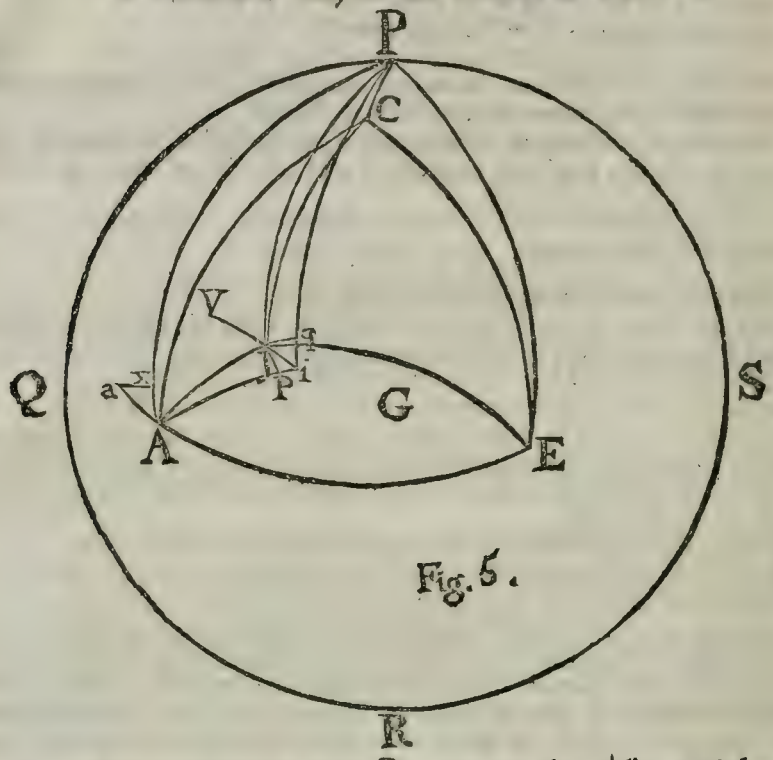


Fig. 5.

Figure cinquieme de la Piece de M. Jean Albert Euler; où elle est citée au §. 71. pag. 41. et au §. 88. pag. 49

Dans cette Figure, au lieu de la lettre X *lisez* a.

RECHERCHES

SUR

LA LIBRATION DE LA LUNE,

Dans lesquelles on tâche de résoudre la Question proposée par l'Académie Royale des Sciences, pour le Prix de l'année 1764.

I.

CET écrit a pour objet d'examiner les différens mouvemens apparens, ou réels que la Lune peut avoir autour de son centre. Je suppose d'abord que cette Planette à une figure quelconque; & je cherche le mouvement qu'elle doit recevoir de l'action de la terre & du soleil. Quoi qu'un très-grand Geomètre ait déja donné des méthodes & des formules générales, qui peuvent aisément s'appliquer à la recherche dont il s'agit ici, néanmoins il m'a paru plus commode de reprendre la question en entier, & de

la réſoudre par une méthode que je crois nouvelle à pluſieurs égards, & qui eſt d'un uſage ſimple & général pour tous les Problêmes de Dynamique. Cette méthode me conduit naturellement à trois équations générales, qui reviennent au même, pour le fond, que celles qu'on trouve dans les Mémoires de l'Académie de 1754, pag. 424, 425; & pour en faciliter la comparaiſon à ceux qui voudront prendre la peine de la faire, j'expoſe en peu de mots les principales différences qu'il y a entr'elles par rapport à la diverſité des dénominations. D'après ces équations, j'examine quels changemens l'action de la terre & du ſoleil doit produire dans la rotation de la Lune, & dans la poſition de ſon axe. Après avoir prouvé, que l'action du ſoleil eſt preſque inſenſible par rapport à celle de la terre, je trouve qu'en ſuppoſant, avec M. Newton, que la Lune eſt un ſphéroïde allongé vers la terre, cette Planette doit faire autour de ſon axe une eſpece de balancement ou de vibration, par lequel ſa viteſſe de rotation eſt tantôt accélerée, tantôt retardée; & j'explique alors avec facilité pourquoi la Lune doit nous montrer toujours à-peu-près la même face, quoique elle n'ait point reçu d'abord, comme il eſt très-naturel de l'imaginer, une rotation exactement égale à ſon mouvement moyen autour de la terre. Je fais voir enſuite que l'axe de cette Planette doit être ſujet à un mouvement ſemblable à celui de la terre, comme M. d'Alembert l'a déja démontré dans la ſuppoſition que la Lune ſoit un ſphéroïde homogéne & elliptique dans tous les ſens; mais je differe eſſentiellement de lui ſur la quantité de la préceſſion & de la nutation qui doit avoir lieu dans cette hypotheſe; je donne la raiſon de la différence qui ſe trouve entre nos réſultats en faiſant voir que les formules qui ſont vraies pour la terre ne s'appliquent pas indiſtinctement à la Lune, comme le ſuppoſe cet Auteur. Je fais voir de plus que la figure de la Lune pourroit auſſi être

telle que la préceſſion de ſes points équinoxiaux fût exactement, ou à très-peu près égale au mouvement des nœuds de la Lune ; comme l'a trouvé M. Caſſini ; & dans ce cas je démontre qu'il ne doit plus y avoir de nutation ſenſible dans l'axe de cette Planette. Au reſte, c'eſt aux Aſtronomes ſeuls à nous inſtruire pleinement la-deſſus ; mais pour les mettre plus à portée de connoître ces différens mouvemens, je propoſe des méthodes que je crois aſſez ſimples pour déterminer, par le moyen des obſervations des tâches de la Lune, la poſition de ſon axe de rotation, & la quantité de ſa libration tant apparente que réelle,

Tels ſont, en abrégé, les points principaux de la Diſſertation ſuivante. L'Académie Royale des Sciences ayant propoſé pour le ſujet du Prix de l'année prochaine: » Si » on peut expliquer par quelque raiſon phyſique pour» quoi la Lune nous préſente toujours à-peu-près la mê» me face ; & comment on peut déterminer par les ob» ſervations & par la théorie ſi l'axe de cette Planette eſt » ſujet à quelque mouvement propre, ſemblable à celui » qu'on connoît dans l'axe de la terre, & qui produit la » préceſſion des équinoxes, & la nutation « ; j'oſe lui préſenter le fruit de mon travail ſur cette importante matiere. S'il ne répond pas entierement aux vues de cette ſçavante Compagnie, au moins ſervira-t-il à jetter de nouvelles lumieres ſur un des principaux phenomènes céleſtes.

I.

Comme il n'eſt queſtion ici que du mouvement que la Lune doit avoir autour de ſon centre de gravité, en vertu de l'action du ſoleil & de la terre, il eſt évident qu'on peut regarder le centre de la Lune comme immobile par rapport à la terre & au ſoleil, en tranſportant à ces deux Planettes en ſens contraire le mouve-

ment que la Lune a réellement autour d'elles, c'eſt-à-dire en imaginant que la Terre & le Soleil ſe meuvent autour du centre de la Lune ſuppoſé fixe, comme les verroit un Obſervateur placé dans ce centre.

Cela poſé, j'imagine par le centre de la Lune un plan parallele à l'écliptique, auquel je rapporte la poſition des centres de la Terre & du Soleil, comme auſſi celle de tous les points de la maſſe de la Lune; pour cela ayant mené du centre de cette Planette dans le plan dont je parle, une ligne fixe & dirigée vers les premiers point d'Aries, laquelle ſert d'axe commun à toutes les abſciſſes.

Soient x l'abſciſſe & y l'ordonnée rectangle qui répondent à la projection du centre de la Terre ſur ce plan, & ſoit z l'autre coordonnée rectangle qui exprime la diſtance du centre de la Terre au point qui en eſt la projection.

Soient auſſi $x' y' z'$ les coordonnées ſemblables pour la poſition du centre du Soleil.

Enfin ſoient X l'abciſſe & Y, Z les deux ordonnées correſpondantes à un point quelconque α de la maſſe de la Lune.

Il eſt viſible 1°. que la diſtance de ce point au centre de la Terre ſera exprimé par $\sqrt{(\overline{x-X}^2 + \overline{y-Y}^2 + \overline{z-Z}^2)}$, quantité que j'appelle R pour abréger.

2°. Que la diſtance du même point au centre du Soleil ſera exprimée de même par la quantité $\sqrt{(\overline{x'-X}^2 + \overline{y'-Y}^2 + \overline{z'-Z}^2)}$ que j'appelle R'.

Donc ſi on nomme T la maſſe de la Terre, & S celle du Soleil, chaque point α de la Lune ſera tiré par deux forces, l'une dans la direction de la ligne R & $= \frac{T}{R^2}$; l'autre ſuivant la ligne R' & $= \frac{S}{R'^2}$.

De plus, ſi on prend l'élément du tems dt pour conſtant, on aura $\frac{d^2X}{dt^2}$, $\frac{d^2Y}{dt^2}$, $\frac{d^2Z}{dt^2}$ pour les forces accélératri-

ces dont le point α eſt ſollicité ſuivant la direction des eſpaces dX, dY, dZ, qu'il parcourt dans l'inſtant dt, & il faudra, par le principe général de la Dynamique que ces forces priſes en ſens contraire, & combinées avec les forces $\frac{T}{R^2}$, $\frac{S}{R'^2}$ tiennent le ſyſtême de tous les points α, c'eſt-à-dire la maſſe entiere de la Lune en équilibre autour de ſon centre de gravité ſuppoſé fixe.

III.

C'eſt un principe généralement vrai en Statique que, ſi un ſyſtême quelconque de tant de corps ou de points que l'on veut, tirés chacun par des puiſſances quelconques eſt en équilibre; & qu'on donne à ce ſyſtême un petit mouvement quelconque, en vertu duquel chaque point parcourre un eſpace infiniment petit; la ſomme des puiſſances, multipliées chacune par l'eſpace que le point, où elle eſt apoliquée, parcourt ſuivant la direction de cette même puiſſance, ſera toujours $= 0$.

Dans la queſtion préſente, ſi on imagine que les lignes X, Y, Z, R, R', deviennent, en variant infiniment peu la poſition de la Lune autour de ſon centre, $X+\delta X$, $Y+\delta Y$, $Z+\delta Z$, $R+\delta R$, $R'+\delta R'$, il eſt facile de voir que les différences δX, δY, δZ, δR, $\delta R'$, exprimeront les eſpaces parcourus en même tems par le point α dans des directions oppoſées à celles des puiſſances $\alpha \frac{d^2X}{dt^2}$, $\alpha \frac{d^2Y}{dt^2}$, $\alpha \frac{d^2Z}{dt^2}$, $\alpha \frac{T}{R^2}$, $\alpha \frac{S}{R'^2}$, qui ſont ſenſées agir ſur ce point; on aura donc, pour les conditions de l'équilibre, l'équation générale.

$$\int\left(\alpha \frac{d^2X}{dt^2} \times -\delta X + \alpha \frac{d^2Y}{dt^2} \times -\delta Y + \alpha \frac{d^2Z}{dt^2} \times -\delta Z + \alpha \frac{T}{R^2} \times -\delta R + \alpha \frac{S}{R'^2} \times -\delta R'\right) = 0.$$

Savoir, en changeant les ſignes.

$$\frac{1}{dt^2}\int \alpha\,(d^2X\,\delta X + d^2Y\,\delta Y + d^2Z\,\delta Z)$$
$$+T\int\frac{\alpha\,\delta R}{R^2}+S\int\frac{\alpha\,\delta R'}{R'^2}=0. \ldots\ldots\ldots (A)$$

Les quantités δX, δY, δZ, δR, $\delta R'$, ne ſont autre choſe que les différentielles des lignes X, Y Z : priſes à l'ordinaire & affectées de la caractériſtique δ au lieu de la commune d, pour les diſtinguer des autres différentielles des mêmes lignes qui ont rapport au mouvement réel du corps.

Quant au ſigne d'intégration $\int$ il eſt mis pour marquer la ſomme de toutes les formules ſemblables qui répondent à tous les élémens α de la maſſe de la Lune.

I V.

SCHOLIE. Le principe de Statique que je viens d'expoſer n'eſt, dans le fond qu'une généraliſation de celui qu'on nomme communément le principe des vîteſſes virtuelles, & qui eſt reconnu depuis longtems par les Géomètres pour le principe fondamental de l'équilibre. M. Jean Bernouilli eſt le premier, que je ſache, qui ait enviſagé ce principe ſous un point de vue général & applicable à toutes les queſtions de Statique, comme on le peut voir dans la Section IX. de la nouvelle Mecanique de M. Varignon, où cet habile Géomètre, après avoir rapporté, d'après M. Bernouilli, le principe dont il s'agit, fait voir par différentes applications, qu'il conduit aux mêmes concluſions que celui de la compoſition des forces.

C'eſt auſſi ce même principe qui ſert de baſe à celui que M. de Maupertuis a donné dans les Mémoires de l'Académie de 1740, ſous le nom de Loi du Repos; & que M. Euler a développé enſuite & rendu très-général dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1751.

Enfin c'eſt de ce principe que dépend celui de la conſervation des forces vives, comme M. d'Alembert l'a remarqué le premier à la fin de ſa Dynamique ; ce qui peut d'ailleurs ſe démontrer généralement ainſi. Soit un ſyſtême quelconque de tant de corps qu'on voudra m, m', m'', &c. qui peſent, ou qui ſoient attirés vers des centres par des forces quelconques ; ſoient P, Q, R, &c. les forces qui agiſſent ſur le corps m, & p, q, r, &c. les diſtances reſpectives de ce corps, aux centres de ſes forces ; ſoient auſſi P', Q', R', &c. P'', Q'', R'', &c. &c. les forces des corps m', m'', &c. & p', q', r', &c. p'', q'', r'' &c. &c. leurs diſtances aux centres des forces ; ſi l'on imagine que tous ces corps ſe meuvent, durant un inſtant quelconque dt, par les eſpaces ds, ds' ds'', &c. avec les vîteſſes v, v', v'', &c. il faudra, par le principe général de la Dynamique, que le ſyſtême des corps m, m', m'', &c. animés chacun des forces $-\frac{m dv}{dt}$, $-\frac{m' dv'}{dt}$, $-\frac{m'' dv''}{dt}$, &c. dans la direction même des eſpaces ds, ds', ds'' ſoit en équilibre avec les forces mP, mQ, mR, &c. $m'P'$, $m'Q'$, $m'R'$, &c. $m''P''$, $m''Q''$, $m''R''$, &c. &c. Or ſi l'on conſidére le ſyſtême pendant que les corps changent infiniment peu de poſition, en parcourant les eſpaces ds, ds', ds'', &c. il eſt clair que dp, dq, dr, &c. dp', dq', dr', &c. dp'', dq'', dr'', &c. &c. exprimeront les eſpaces parcourus par chacun des corps, dans des directions contraires à celles des forces P, Q, R, &c. P', Q', R', &c. &c. on aura donc, par le principe de l'équilibre dont nous parlons.

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{m dv}{dt} \times ds + mP \times -dp + mQ \times -dp + mR \times -dr + \text{&c.} \\ -\frac{m' dv'}{dt} \times ds' + m'P' \times -dp' + m'Q' \times -dq' + m'R \times -dr' + \text{&c.} \\ -\frac{m'' dv''}{dt} \times ds'' + m''P'' \times -dp'' + m''Q'' \times -dq'' + m''R \times d - dr'' + \text{&c.} \\ \text{&c.} \end{array}\right\} = 0$$

Mettant, au lieu de dt, ſes valeurs $\frac{ds}{v}$, $\frac{ds'}{v'}$, $\frac{ds''}{v''}$, &c. & intégrant, on aura

$$mv^2+m'v'^2+m''v''^2+\&c. = mV^2+m'V''^2+m''V''^2+\&c.$$
$$-2m\int(Pdp+Qdq+Rdr+\&c.)$$
$$-2m'\int(P'dp'+Q'dq'+R'dr'+\&c.$$
$$-2m''\int(P''dp''+Q''dq+R''dr''+\&c.)-\&c.$$

V, V', V'' &c. étant les valeurs primitives de v, v', v'', &c. & cette équation renferme, comme on le voit, la conſervation des forces vives priſe dans toute ſon étendue.

Au reſte, le Principe de Statique que je viens d'expoſer, étant combiné avec le Principe Dynamique donné par M. d'Alembert, conſtitue une eſpece de formule générale qui renferme la ſolution de tous les problêmes qui regardent le mouvement des corps. Car on aura toujours une équation ſemblable à l'équation (A), art. préc. & toute la difficulté ne conſiſtera plus qu'à trouver l'expreſſion analytique des forces qu'on ſuppoſe agir ſur les corps, & des lignes ſuivant leſquelles ces forces agiſſent, en n'employant dans ces expreſſions que le plus petit nombre poſſible de variables indéterminées, de maniere que leurs différentielles déſignées par le δ ſoient entierement indépendantes les unes des autres; après quoi faiſant ſéparément égaux à zéro, les termes qui ſe trouveront multipliés par chacune des différentielles dont je parle, on aura tout d'un coup autant d'équations particulieres qu'il en faudra pour la ſolution du problême; comme on le verra dans les articles qui ſuivent.

V.

Soient préſentement l'inclinaiſon du plan de l'équateur lunaire par rapport à celui de l'écliptique. . . π.

La longitude du nœud deſcendant de l'équateur lunaire, c'eſt-à-dire l'angle que l'interſection de cet équateur,

teur, avec l'écliptique, ou avec le plan parallèle à l'écliptique, & passant par le centre de la Lune fait avec l'axe des abscisses (art. II.) . . . . . ε.

La distance d'un méridieu lunaire pris à volonté sur la surface de la Lune, & qu'on appellera dorénavant le premier méridien, au nœud descendant de l'équateur, cette distance étant comptée à l'ordinaire sur l'équateur & selon la suite des signes. . . . . ω.

Il est aisé de voir que ces trois variables suffiront pour déterminer à chaque instant, la situation de la Lune par rapport à son centre qui est censé immobile ; aussi ce seront les seules qu'il faudra faire varier dans les différentielles des lignes X, Y, Z, R, R'.

Soit de plus le rayon ou la distance d'un point quelconque α au centre de gravité de la Lune. . . . . r.

L'angle que ce rayon fait avec le plan de l'équateur, ou la distance du point α à l'équateur comptée sur le méridien qui passe par ce point . . . . . P.

L'angle que le méridien passant par le point α fait avec le premier méridien, c'est-à-dire la distance entre ces deux méridiens comptée sur l'équateur en allant d'Occident en Orient. . . . . Q.

Il est visible que ces trois nouvelles indéterminées ne dépendent nullement de la position de la Lune sur son centre, mais seulement de la situation particuliere de chacun de ces points α par rapport à tous les autres. Ainsi ces quantités r, P, Q, ne seront variables dans nos formules que relativement aux intégrations indiquées par le signe $\int$ dans l'équation (A).

Au reste il est bon de remarquer d'avance que, comme on suppose que le centre de rotation de la Lune soit dans son centre même de gravité, on aura par la propiété connue de ce centre les trois conditions suivantes : $\int \alpha\, r\, sin.\, P = 0$; $\int \alpha\, r\, cos.\, P\, sin.\, Q = 0$; $\int \alpha\, r\, cos.\, P\, cos.\, Q = 0$. . . . . (B).

VI.

Maintenant pour avoir les valeurs des coordonnées X, Y, Z exprimées en $r, P, Q, \omega, \varepsilon, \pi$, je conſidere que l'angle P peut être regardé comme exprimant la declinaiſon du point α vu du centre de la Lune, & rapporté à l'équateur lunaire; & que dans cette ſuppoſition, l'angle $Q + \omega$, que je nommerai Q' pour abréger ſera l'aſcenſion droite du même point comptée à l'ordinaire depuis le nœud deſcendant de l'équateur. Donc en rapportant le point α au plan de l'écliptique lunaire (j'appelle ainſi le plan que nous avons imaginé parallèle à l'écliptique, & paſſant par le centre de la Lune) lequel eſt incliné à l'équateur de l'angle π, on trouvera facilement, par les formules de la trigonometrie, ſa latitude que j'appellerai p, & ſa longitude que je nommerai q'; car on aura, comme il aiſé de le démontrer.

$$\left.\begin{aligned} \text{ſin. } p &= \text{ſin. } P \text{ coſ. } \pi - \text{coſ. } P \text{ ſin. } Q' \text{ſin. } \pi \\ \text{ſin. } q' &= \frac{\text{ſin. } P \text{ ſin. } \pi + \text{coſ. } P \text{ ſin. } Q' \text{ coſ. } \pi}{\text{coſ. } p.} \\ \text{coſ. } q' &= \frac{\text{coſ. } P \text{ coſ. } Q'}{\text{coſ. } p.} \end{aligned}\right\} \ldots (D).$$

Mais il eſt clair d'autre part que l'angle p n'eſt autre choſe que l'angle fait par le rayon r avec le plan des X & Y; & que $q' + \varepsilon$, que je nomme q, eſt l'angle que la projection de r ſur ce plan fait avec l'axe des X; on aura donc, comme il eſt facile de le concevoir même ſans figure : $Z = r \text{ ſin. } p$.

$$\left.\begin{aligned} Y = r \text{ coſ. } p \text{ ſin. } q = r \text{ coſ. } p \text{ coſ. } q' \text{ ſin. } \varepsilon \\ + r \text{ coſ. } p \text{ ſin. } q' \text{ coſ. } \varepsilon \\ X = r \text{ coſ. } p \text{ coſ. } q = r \text{ coſ. } p \text{ coſ. } q' \text{ coſ. } \varepsilon \\ - r \text{ coſ. } p \text{ ſin. } q' \text{ ſin. } \varepsilon \end{aligned}\right\} \ldots (D).$$

& ſubſtituant pour *ſin. p*, & pour *ſin. q'*, & *coſ. q'* leurs valeurs, ci-devant, ...

$$\left.\begin{aligned} X &= r\,cos.P\,cos.Q'\,cos.\varepsilon - r\,cos.P\,sin.Q'\,sin.\varepsilon\,cos\,\varpi \\ &\quad - r\,sin.P\,sin.\varepsilon\,sin.\pi \\ Y &= r\,cos.P\,cos.Q'\,sin.\varepsilon + r\,cos.P\,sin.Q'\,cos.\varepsilon\,cos.\varpi \\ &\quad + r\,sin.P.\,cos.\varepsilon\,sin.\pi \\ Z &= r\,sin.P\,cos.\pi - r\,cos.P\,sin.Q'\,sin.\pi \end{aligned}\right\} \ldots (E).$$

où l'on ſe reſſouviendra que $Q' = Q + \omega$.

VII.

On différentiera d'abord ces valeurs de X, Y, Z, en faiſant varier ſeulement ω, ε, π (Art. V.), & en mettant la caractériſtique δ au lieu de la d, pour avoir celles de δX, δY, δZ; on différentiera enſuite les mêmes valeurs X, Y, Z deux fois à l'ordinaire, pour avoir les differentio-différentielles d^2X, d^2Y, d^2Z; après quoi on fera les produits $d^2X\delta X$, $d\,Y\delta Y$, $d^2Z\delta Z$; & l'on aura, après avoir effacé ce qui ſe détruit, & mis pour $sin.Q'\,cos.Q'$, $sin.Q'^2\,cos.Q'^2$, leurs valeurs $\frac{1}{2}sin.2\,Q'$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos.2\,Q'$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos.2\,Q'$.

$d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z = r^2\,cos.P^2\,[\,d^2\omega + d\,(cos.\pi\,d\varepsilon) + \frac{1}{2}sin.2\,Q'\,(sin.\pi^2\,d\varepsilon^2 - d\pi^2) + cos.2\,Q'sin.\pi\,d\pi\,d\varepsilon\,]\,\delta\omega + r^2\,sin.P\,cos.P\,[\,sin.Q'\,(sin.\pi^2\,d^2\varepsilon + 2\,cos.\pi\,d\varpi\,d\varepsilon) + cos.Q'\,(d^2\pi - sin.\pi\,cos.\pi\,d\varepsilon^2)\,]\,\delta\omega + r^2\,cos.P^2\,[\,d.(cos.\pi\,d\omega + d\varepsilon - \frac{1}{2}sin.\pi^2\,d\varepsilon) - sin.2\,Q'\,(sin.\pi^2\,d\omega\,d\varepsilon + \frac{1}{2}d\,(sin.\pi\,d\pi)) + cos.2\,Q'\,(\frac{1}{2}d.(sin.\pi^2\,d\varepsilon) - sin.\pi\,d\omega\,d\varepsilon)\,]\,\delta\varepsilon + r^2\,sin.P\,cos.P\,[sin.Q'\,(sin.\varpi\,d^2\omega + d.(sin.2\pi\,d\varepsilon)) + cos.Q'\,(sin.\pi\,d\omega^2 + sin.2\pi\,d\varepsilon\,d\omega + d.(cos.\pi\,d\pi))\,]\,\delta\varepsilon + r^2\,sin.P^2\,[\,d.(sin.\pi^2\,d\varepsilon)\,]\,\delta\varepsilon + r^2\,cos.P^2\,[\,sin.\pi\,d\omega\,d\varepsilon + \frac{1}{2}sin.\pi\,cos.\pi\,d\varepsilon^2 + \frac{1}{2}d^2\pi + sin.2\,Q'\,(d\omega\,d\pi - \frac{1}{2}sin.\pi\,d^2\varepsilon) - cos.2\,Q'\,(sin.\pi\,d\omega\,d\varepsilon + \frac{1}{2}sin.\pi\,cos.\pi\,d\varepsilon^2 + \frac{1}{2}d^2\pi)\,]\,\delta\pi + r^2\,sin.P\,cos.P\,[-sin.Q'\times(2\,cos.\pi\,d\omega\,d\varepsilon + d\varepsilon^2\,cos.2\pi + d\omega^2) + cos.Q'\times d.$

$(d\omega + cof.\pi d\varepsilon)]\delta\pi + r^2 fin.P^2[d^2\pi - fin.\pi cof.\varpi d\varepsilon^2]\delta\pi$.

On multipliera cette quantité par α, & on en prendra l'intégrale en faisant varier seulement r, P, Q, (Art. V.); l'on aura ainsi la valeur de $\int\alpha(d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z)$ qu'il faudra substituer dans l'équation (A), Art. III.

VIII.

Remarque. Il y a plusieurs moyens d'abréger le calcul de la valeur de $d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z$; en voici un qui quoique indirect est néanmoins préférable par sa simplicité & sa généralité. On commencera par chercher la valeur de $dX^2 + dY^2 + dZ^2$; & pour ce j'observerai dans la supposition présente, que la valeur de X devient celle de Y, en mettant simplement $-cof.\varepsilon$ à la place de $fin.\varepsilon$, & $fin.\varepsilon$ à la place de $cof.\varepsilon$, c'est-à-dire en augmentant l'angle ε de 90°; ce qui aura par conséquent lieu aussi dans les valeurs de dX^2, & de dY^2; d'où il s'ensuit que dès que l'on aura la valeur de dX, on en pourra tirer tout de suite celle de $dX^2 + dY^2$ en négligeant simplement dans le quarré de dX tous les termes qui renfermeroient $fin.\varepsilon\, cof.\varepsilon$, & effaçant dans les autres les quarrés $fin.\varepsilon^2$, & $cof.\varepsilon^2$; après cela il n'y aura plus qu'à faire le quarré de dZ, & l'on aura après quelques réductions:

$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = r^2 cof.P^2[d\omega^2 + 2cof.\pi d\omega d\varepsilon + d\varepsilon^2 - \frac{1}{2}fin.\pi^2 d\varepsilon^2 + \frac{1}{2}d\pi^2 + \frac{1}{2}cof.2Q'(fin.\pi^2 d\varepsilon^2 - d\pi^2) + fin.2Q'fin.\pi d\pi d\varepsilon] + 2r^2 fid.P cof.P[fin.Q' \times (fin.\pi d\omega d\varepsilon + fin.\pi\, cof.\pi d\varepsilon^2) + cof.Q'(d\omega d\pi + cof.\pi d\varepsilon d\pi)] + r^2 fin.P^2[fin.\pi^2 d\varepsilon^2 + d\pi^2]$.

Je différentie à présent cette équation par δ, c'est-à-dire en affectant les différentielles de δ au lieu de d; j'aurai après avoir divisé par 2, $dX\delta dX + dY\delta dY + dZ\delta dZ$

$= r^2 \cos. P^2 [d\omega \delta d\omega + \cos.\pi d\varepsilon \delta d\omega + \cos.\varpi d\omega \delta d\varepsilon - \sin.\pi d\omega d\varepsilon \delta\pi$ &c. Je ne mets pas cette différentielle en entier parce que je ne veux que donner une idée de la méthode que je propose. Maintenant je considere que δX est la même chose que $d\delta X$, comme il est aisé de s'en convaincre en considérant la nature du calcul différentiel ; il en est de même des autres différentes affectées de δd ; on peut dont mettre par tout $d\delta$ au lieu de δd ; & l'on aura $dX d\delta X + dY d\delta Y + dZ d\delta Z = r^2 \cos. P^2 [d\omega d\delta\omega + \cos.\pi d\varepsilon d\delta\omega + \cos.\pi d\omega d\delta\varepsilon - \sin.\pi d\omega d\varepsilon \delta\pi$ &c. On prendra l'intégrale de cette équation, & regardant les différences affectées de δ comme de simples variables on fera disparoître leurs différentielles par l'opération assez connue des intégrations par parties ; ce qui donnera $dX\delta X + dY\delta Y + dZ\delta Z - \int (d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z) = r^2 \cos. P^2 [d\omega\delta\omega + \cos.\pi d\varepsilon\delta\omega + \cos.\pi d\omega\delta\varepsilon$ &c. $- \int (\cos. P^2] d^2\omega\delta\omega + d.(\cos.\pi d\varepsilon)\delta\omega + d.(\cos.\pi d\omega)\delta\varepsilon + \sin.\pi d\omega d\varepsilon\delta\pi$ &c.). Or, il est aisé de comprendre que cette équation doit être identique ; & que par conséquent il faut que la partie algébrique du premier membre soit égale à la partie algébrique du second, & la partie intégrale à la partie intégrale ; donc, n'ayant égard qu'à la partie intégrale de l'un & de l'autre membre, & ôtant le signe $\int$ on aura sur le champ $d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z = r^2 \cos. P^2 [d^2\pi\delta\omega + d.(\cos.\pi d\varepsilon)\delta\omega + d.(\cos.\pi d\omega)\delta\varepsilon + \sin.\pi d\omega d\varepsilon\delta\pi$ &c.

On peut remarquer encore que cette valeur ne différe de celle de $dX\delta dX + dY\delta dY + dZ\delta dZ$, qu'en ce que la lettre d qui étoit après la δ dans les différentielles affectées de δd se trouve maintenant devant les quantités mêmes qui multiplient ces différentielles ; & que les autres termes qui ne renferment point de semblables différentielles, ont des signes contraires. Ainsi ayant la valeur de $dX^2 + dY^2 + dZ^2$ on aura facilement celle de

$d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d\,Z\,\delta Z$ dont on a beſoin dans la ſolution de tous les problêmes de Dinamique qu'on voudra traiter ſuivant notre méthode.

IX.

Juſqu'ici la poſition de l'axe de rotation, autour duquel nous ſuppoſons que la Lune tourne en décrivant d'occident en orient l'angle ω, eſt abſolument arbitraire, & nous pourrons prendre telle ligne qu'il nous plaira pourvu qu'elle paſſe par le centre de gravité ; mais le calcul ſera beaucoup ſimplifié ſi on ſuppoſe, qu'abſtraction faite des forces étrangeres, la rotation de la Lune doive être uniforme, & ſon axe une ligne fixe & invariable. Voyons donc les conditions qui réſultent de ces ſuppoſitions ; pour cela il n'y a qu'à faire $T = o$, & $S = o$ dans l'équation (A) ; ce qui la réduit à $\frac{1}{dt^2}\int (d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z)\,\alpha = o$ & il faudra que cette équation ſoit vraie en faiſant $d^2\omega = o$, $d\varepsilon = o$ & $d\pi = o$; or, dans ce cas on aura (Art. VII.) $d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z = r^2 \mathit{ſin.}\, P \mathit{cof.}\, P \mathit{cof.}\, Q' \mathit{ſin.}\, \pi\, d\omega^2 \delta\varepsilon - r^2 \mathit{ſin.}\, P \mathit{cof.}\, P \mathit{ſin.}\, Q'\, d\omega^2 \delta\pi$; donc l'équation à vérifier ſera $\frac{\mathit{ſin.}\,\pi\, d\omega^2 \delta\varepsilon}{dt^2}\int \alpha\, r^2 \mathit{ſin.}\, P \mathit{cof.}\, P \mathit{cof.}\, Q' + \frac{d\omega^2 \delta\pi}{dt^2}\int \alpha\, r^2 \mathit{ſin.}\, P \mathit{cof.}\, P \mathit{ſin.}\, Q' = o$, laquelle donne ſéparément les deux ſuivantes (IV. à la fin) $\int \alpha\, r^2 \mathit{ſin.}\, P \mathit{cof.} P \mathit{cof.}\, Q' = o$; & $\int \alpha\, r^2 \mathit{ſin.}\, P \mathit{cof.}\, P \mathit{ſin.}\, Q' = o$. ($F$)

Telles ſont les conditions néceſſaires pour que la Lune puiſſe d'elle-même tourner uniformément autour d'un axe fixe ; par conſéquent ſi on ſuppoſe, comme les obſervations de la Libration paroiſſent le démontrer, que ces conditions ayent lieu dans la rotation de la Lune, il faudra négliger dans la valeur de $d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z$ (Art. VII.) tous les termes où ſe trouvent $\mathit{ſin.}\, P \mathit{cof.}\, P \mathit{cof.}\, Q'$,

& $\sin. P \cos. P \sin. Q'$; & pour avoir l'intégrale $\int \alpha (d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z)$, il n'y aura plus qu'à mettre au lieu de Q' sa valeur $Q + \omega$; ce qui donne $\cos. 2 Q' = \cos. 2 Q \cos. 2\omega - \sin. 2 Q \sin. 2\omega$, $\sin. 2 Q' = \cos. 2 Q \sin. 2\omega + \sin. 2 Q \cos. 2\omega$; en supposant pour abréger,

$$\left.\begin{array}{l} \int \alpha r^2 \cos. P^2 = H ; \int \alpha r^2 \sin. P^2 = K ; \\ \int \alpha r^2 \cos. P^2 \cos. 2 Q = M ; \int \alpha r^2 \cos. P^2 \sin. 2 Q = N \end{array}\right\} (G)$$

On trouvera pour la valeur de $\frac{1}{dt^2} \int \alpha (d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z)$ une expression de cette forme $\Omega \delta\omega + E \delta\varepsilon + \Pi \delta\pi$; dans laquelle

$$\Omega = \frac{d(d\omega + \cos.\pi d\varepsilon)}{dt^2} \times H + \frac{\sin.\pi^2 d\varepsilon^2 - d\pi^2}{2\, dt^2} \times (M \sin. 2\omega + N \cos. 2\omega)$$
$$+ \frac{\sin.\pi\, d\pi\, d\varepsilon}{dt^2} \times (M \cos. 2\omega - \sin. 2\omega).$$

$$E = \frac{d(\cos.\pi\, d\omega + d\varepsilon)}{dt^2} \times H + \frac{d(\sin.\pi^2 d\varepsilon)}{dt^2} \times (K - \tfrac{1}{2} H)$$
$$- \frac{\sin.\pi^2 d\omega d\varepsilon + \frac{1}{2} d.(\sin.\pi d\pi)}{dt^2} \times (M \sin. 2\omega + N \cos. 2\omega)$$
$$+ \frac{\frac{1}{2} d(\sin.\pi^2 d\varepsilon) - \sin.\pi d\pi\, d\omega}{dt^2} \times (M \cos. 2\omega - N \sin. 2\omega)$$

$$\Pi = \frac{\sin.\pi d\omega d\varepsilon}{dt^2} \times H + \frac{d^2\pi}{dt^2} \times (\tfrac{1}{2} H + K) + \frac{\sin.\pi \cos.\pi d\varepsilon}{dt^2} \times (\tfrac{1}{2} H - K)$$
$$+ \frac{d\omega\, d\pi - \frac{1}{2} \sin.\pi\, d^2\varepsilon}{dt^2} \times (M \sin. 2\omega + N \cos. 2\omega)$$
$$- \frac{\sin.\pi d\omega d\varepsilon + \frac{1}{2} d^2\pi + \frac{1}{2} \sin.\pi \cos.\pi d\varepsilon^2}{dt^2} \times (M \cos. 2\omega - N \sin. 2\omega).$$

X.

SCHOLIE I. On auroit tort de croire que les conditions $\int \alpha r^2 \sin. P \cos. P \cos. Q = 0$, & $\int \alpha r^2 \sin. P \cos. P \sin. Q = 0$, rendissent notre solution moins générale ; car je vais démontrer que dans quel corps que ce soit, on peut tou-

jours trouver trois axes qui paſſent par le centre de gravité, par rapport à chacun deſquels ces deux équations ayent lieu en même tems.

Pour cela imaginons pour un moment que la poſition de la Lune, que je conſidérerai ici comme un corps quelconque, ſoit fixe par rapport au plan de ſon écliptique; & cherchons la poſition du plan de l'équateur de maniere que l'on ait $\int \alpha r^2 \, sin.\, P \, cof.\, P \, cof.\, Q' = o$, $\int \alpha r^2 \, sin.\, P \, cof.\, P \, ſin.\, Q' = o$; on aura d'abord en combinant les formules (*C*) de l'Art. VI. $ſin.\, P = ſin.\, \pi \, cof.\, p \, ſin.\, q' + cof.\, \pi \, ſin.\, p$; $cof.\, P \, ſin.\, Q = cof.\, \pi \, cof.\, p \, ſin.\, q' - ſin.\, \pi \, ſin.\, p$; $cof.\, P \, cof.\, Q' = cof.\, p \, cof.\, q'$; donc $ſin.\, P \, cof.\, P \, ſin.\, Q' = ſin.\, \pi \, cof.\, \pi \, (cof\, p^2 \, ſin.\, q^2 - ſin.\, p^2) + (cof.\, \pi^2 - ſin.\, \pi^2) \, cof.\, p \, ſin.\, p \, ſin.\, q' =$ en mettant pour q' ſa valeur $q - \varepsilon$ afin que l'angle q ait une origine fixe) $ſin.\, \pi \, cof.\, \pi \, (cof.\, p^2 \, ſin.\, q^2 \, cof.\, \varepsilon^2 - 2 \, cof.\, p^2 \, ſin.\, q \, cof.\, q \, ſin.\, \varepsilon \, cof.\, \varepsilon + cof.\, p^2 \, cof.\, q^2 \, ſin.\, \varepsilon^2 - ſin.\, p^2) + (cof.\, \pi^2 - ſin.\, \pi^2) \times (cof.\, p \, ſin.\, p \, ſin.\, q \, cof.\, \varepsilon - cof.\, p \, ſin.\, p \, cof.\, q \, ſin.\, \varepsilon)$ & $ſin.\, P \, cof.\, P \, cof.\, Q = ſin.\, \pi \, cof.\, p^2 \, ſin.\, q' \, cof.\, q' + cof.\, \pi \, ſin.\, p \, cof.\, p \, cof.\, q' = ſin.\, \pi \, cof.\, p^2 \, ſin.\, q \, cof.\, (cof.\, \varepsilon^2 - ſin.\, \varepsilon^2) + ſin.\, \pi \, ſin.\, \varepsilon \, cof.\, \varepsilon \, (cof.\, p^2 \, ſin.\, q^2 - cof.\, p^2 \, cof.\, q^2) + cof.\, \pi \, (ſin.\, p \, cof.\, p \, ſin.\, q \, ſin.\, \varepsilon + ſin.\, p \, cof.\, p \, cof.\, q \, cof.\, \varepsilon)$. Donc ſi l'on fait pour abréger :

$\int \alpha r^2 \, cof.\, p^2 \, ſin.\, q^2 = A$; $\int \alpha r^2 \, cof.\, p^2 \, cof.\, q^2 = B$; $\int \alpha r^2 \, cof.\, p^2 \, ſin.\, q \, cof.\, q = C$; $\int \alpha r^2 \, cof.\, p \, ſin.\, p \, ſin.\, q = D$; $\int \alpha r^2 \, cof.\, p \, ſin.\, p \, cof.\, q = E$; $\int \alpha r^2 \, ſin.\, p^2 = F$; on aura $\int \alpha r^2 \, ſin.\, P \, cof.\, P \, ſin.\, Q' = ſin.\, \pi \, cof.\, \pi \, (A \, cof.\, \varepsilon^2 - 2 \, C \, ſin.\, \varepsilon \, cof.\, \varepsilon + B \, ſin.\, \varepsilon^2 - F) + (cof.\, \pi^2 - ſin.\, \pi^2) \, (D \, cof.\, \varepsilon - E \, ſin.\, \varepsilon) = o$; & $\int \alpha r^2 \, ſin.\, P \, cof.\, P \, cof.\, Q' = ſin.\, \pi \, ((A - B) \, ſin.\, \varepsilon \, cof.\, \varepsilon + C \, (cof.\, \varepsilon^2 - ſin.\, \varepsilon^2)) + cof.\, \pi \, (D \, ſin.\, \varepsilon + E \, cof.\, \varepsilon) = o$; deux équations d'où l'on tirera les valeurs de ε, & π.

La

La première nous donne

$\frac{tang.\pi}{1-tang.\pi^2} = \frac{E\,sin.\varepsilon - D\,cos.\varepsilon}{A\,cos.\varepsilon^2 - 2c\,sin.\varepsilon\,cos.\varepsilon + B\,sin.\varepsilon^2 - F}$, & la seconde nous donne auſſi $tang.\pi = \frac{-D\,sin.\varepsilon - E\,cos.\varepsilon}{(A-B)\,sin.\varepsilon\,cos.\varepsilon + C\,(cos.\varepsilon^2 - sin.\varepsilon^2}$ donc chaſſant $tang.\pi$, & faiſant $sin.\varepsilon = x$, on aura, après les réductions, une équation de cette forme $ax + bx^3 + f\sqrt{1-x^2} + gx^2\sqrt{1-x^2} = 0$; dans laquelle

$a = CDR - EHK - C^2E - 2CHD + 2D^2E - E^3$,

$b = -2CDK - EHK + 3CDH + 2EH^2 + 2C^2E - 3DE - E^3$;

$f = CEK - C^2D + E^2D$;

$g = DHK - 2CEK + 3CEH + 2C^2D + D^3 - H^2D - 3E^2D$;

K étant $= A - F$, & $H = A - B$; cette équation étant dégagée des ſignes radicaux, devient celle-ci

$x^6 + \frac{2ab + 2bg - g^2}{b^2 + g^2}x^4 + \frac{a^2 + f^2 - 2fg}{b^2 + g^2}x^2 - \frac{f^2}{b^2 + g^2} = 0$, laquelle ayant ſon dernier terme négatif, & ne renfermant aucune puiſſance impaire de x, aura néceſſairement, come l'on ſait, au moins deux racines réelles & égales, l'une poſitive & l'autre négative ; donc puiſque

$tang.\varepsilon = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{f + gx^2}{x + gx^2}$, on aura au moins une valeur réelle de $tang.\varepsilon$, & par conſéquent de l'angle ε ; & cette valeur étant ſubſtituée dans l'expreſſion de $tang.\pi$ ci-deſſus, on aura l'angle π correſpondant. Ayant les angles ε, & π, on aura, comme on le voit, la poſition du plan cherché de l'Équateur, par rappart au plan donné de l'Écliptique. Si $D = 0$, & $E = 0$, alors $tang.\pi = 0$, & le plan cherché tomberoit dans le plan donné, ce qui eſt évident, parce que les deux équations $\int \alpha r^2\,cos.\,p\,sin\,p\,sin.q = 0$; $\int \alpha r^2\,cos.\,p\,sin.\,p\,cos.q = 0$, ſont analogues aux équations de condition $\int \alpha r^2\,cos.\,P\,sin.\,P\,sin.\,Q' = 0$; & $\int \alpha r^2\,cos.\,P\,sin.\,P\,cos.\,Q' = 0$; mais en re-

prenant les équations qui réſultent immédiatement de ces deux dernières équations, & y mettant $D=0$ & $E=0$, on trouve $\sin.\pi\cos.\varpi(A\cos.\varepsilon^2-2C\sin.\varepsilon\cos.\varepsilon+B\sin.\varepsilon^2-F)=0$; & $\sin.\pi(A-B\times\sin.\varepsilon\cos.\varepsilon+C\times\cos.\varepsilon^2-\sin.\varepsilon^2)=0$, équations qui, outre la racine $\varpi=0$, donnent encore $\cos.\varpi=0$ & $(A-B)\sin.\varepsilon\cos.\varepsilon+C(\cos.\varepsilon^2-\sin.\varepsilon^2)=0$; ſavoir en faiſant $tang.\varepsilon=t$, $t^2+\frac{P-A}{C}t-1=0$, dont les deux racines ſont néceſſairement réelles, à cauſe du dernier terme négatif: de-là il s'enſuit que ſi, après avoir trouvé par les équations ci-deſſus, la poſition du plan cherché, on regarde maintenant ce plan comme donné, on trouvera encore deux autres plans qui auront la même propriété, & dont la poſition par rapport à celui-la ſera déterminé par les équations $\cos.\pi=0$; & $t^2+\frac{B-A}{C}t-1=0$. Donc 1.° ces deux derniers plans couperont le premier à angles droits: 2.° ils ſe couperont l'un l'autre avec un angle égal à la différence des angles qui ont pour tangentes les deux racines de l'équation en t; c'eſt-à dire, qu'en nommant t', & t'' ces racines, la tangente de l'angle en queſtion ſera $=\frac{t'-t''}{1+t't''}=$ (à cauſe de $t't''=-1$) $\frac{t'-t''}{0}=\infty$.

XI.

SCHOLIE II. A l'égard des quantités H, K, M, N de l'art IX, (G); il eſt clair que leur valeur dépend entièrement de la figure & de la conſtitution intérieure de la Lune; car, ſoit D la denſité d'une particule quelconque α, on trouvera aiſément $\alpha=Dr^2\cos.PdQdPdr$, & l'on aura $H=\int Dr^4dr\cos.P^2dPdQ$; $K=\int Dr^4dr\sin.P^2\cos.PdPdQ$; $M=\int Dr^4dr\cos.P^2dP\cos.2QdQ$;
$N=\int Dr^4dr\cos.P^2dP\sin.2QdQ$: & pour avoir la valeur complette de ces intégrales, il faudra, après avoir ſubſtitué

pour D sa valeur en r, P & Q, intégrer 1.° en faisant varier r, & en mettant, après l'intégration, sa valeur en P & en Q, qui dépend de la figure de la Lune; 2.° en faisant varier Q & en mettant, après l'intégration $Q=c$, c étant circonférence d'un cercle dont le rayon $=1$; 3.° en faisant varier P; & en mettant, après l'intégration, $P=\frac{c}{4}$, & doublant les termes. Comme la figure de la Lune est sensiblement sphérique, on ne s'éloignera pas de la vérité en la regardant comme formée de différentes couches à-peu-près sphériques, & dont chacune soit par-tout de la même densité; soit donc $r'(1+e\xi)$ le rayon variable d'une couche quelconque de densité uniforme; r' étant le rayon de cette couche, qui est perpendiculaire au plan de l'Équateur; e une quantité constante très-petite, & ξ une fonction quelconque de r, P & Q, qui soit nulle, lorsque $P=90°$. On remarquera 1.° que la quantité D sera une fonction de r' seulement; 2.° que si on néglige les quarrés & les puissances plus hautes de e, on aura $r^4dr=r'^4dr'+e\frac{d(r'\cdot\xi)}{dr'}dr'=$(en faisant pour abréger $\frac{d(r'\cdot\xi)}{dr'}=X$) $r'^4dr'+eXdr'$; d'où il suit qu'on aura

$$\left.\begin{aligned}
H&=\int D\,r'^4dr'\cos.P^3dPdQ+e\int DXdr'\cos.P^3dPdQ\\
K&=\int Dr'^4dr'\sin.P^2\cos.PdPdQ+e\int DXdr'\sin.P^2\cos.PdPdQ\\
M&=\int Dr'^4dr'\cos.P^2\cos.2QdPdQ+e\int DXdr'\cos.P^2\cos.2QdPdQ\\
N&=\int Dr'^4dr'\cos.P^2d^n\sin.2QdQ+e\int DXdr'\cos.P^2dP\sin.2QdQ
\end{aligned}\right\}\ldots.(H)$$

Soit $\int Dr'^4dr'=F$; on aura

$\int Dr'^4dr'\cos.P^3dPdQ=F\int\cos.P^3dPdQ=cF\int\cos.P^3dP=\frac{4}{3}cF$;

on trouvera de la même manière

$\int Dr'^4dr'\sin.P^2\cos.PdPdQ=\frac{2}{3}cF$;

$\int Dr'^4dr'\cos.P^3dP\cos.2QdQ=0$; &

$\int Dr'^4dr'\cos.P^3dP\sin.2QdQ=0$; on aura donc

$$\left.\begin{aligned} H &= \tfrac{4}{7}CF + e\int DX dr' \cos.P\, dP dQ = \tfrac{4}{7}CF \\ K &= \tfrac{2}{3}CF + e\int DX dr' \sin.P^2 \cos.PdPdQ = \tfrac{2}{3}CF \end{aligned}\right\}\text{à très-peu-près}$$
$$\left.\begin{aligned} M &= e\int DX dr' \cos.P\, dP \cos.2QdQ \\ N &= e\int DX dr' \cos.P\, dP \sin.2QdQ \end{aligned}\right\}\ldots.(I)$$

D'où l'on voit 1.° que les quantités H & K sont des quantités finies; 2.° que les quantités M & N sont des quantités très petites par rapport à H & K, étant de l'ordre de e; 3.° que la quantité $K - \frac{1}{2}H$ est aussi une quantité très-petite du même ordre, étant

$= e\int DX dr' (\sin P^2 - \frac{1}{2}\cos.P^2)\cos.PdPdQ.$

Quant à la masse de la Lune, on la trouve en intégrant l'expression de α, savoir $Dr^2 dr \cos.PdPdQ =$ (dans la supposition présente) $Dr'^2 dr' \cos.PdPdQ + eDXdr' \cos.PdPdQ$; & son intégrale sera $2e\int Dr'^2 dr' + e\int DX' dr' \cos.PdPdQ$, en prenant ici X' pour la valeur de $\frac{d.(r'^2\xi)}{dr'}$.

Donc nommant cette masse L, on aura aux quantités de l'ordre de e près, $L = 2e\int Dr'^2 dr'$; d'où $\int Dr'^2 dr' = \frac{L}{2e}$. Or quoique sans connoître la valeur de D on ne puisse déterminer le rapport de F ou de $\int Dr'^4 dr'$ à $\int Dr'^2 dr'$; on peut néanmoins trouver des limites entre lesquelles ce rapport doit nécessairement demeurer. Il est clair 1.° que si f exprime la valeur de r' à la surface, $\int Dr'^4 dr' < f^2 \int Dr'^2 dr'$, parce que r'^4 est toujours $< f^2 r'^2$. De plus on a $\int Dr'^4 dr' = \frac{1}{5}Df^5 - \frac{1}{5}\int r'^5 dD$, & $\int Dr'^2 dr' = \frac{1}{3}Df^3 - \frac{1}{3}\int r'^3 dD$; ce qui donne $3f\int Dr'^3 dr' - 5\int Dr'^4 dr' = \int r'^3 (r'^2 - f^2) dD =$ à une quantité positive, si dD est négatif, & à une quantité négative si dD est positif, parce que $r' < f^2$; donc 2.° si la densité diminue du centre à la circonférence, $\int Dr'^4 dr' < \frac{3}{5}f\int Dr'^2 dr'$; mais si elle augmente,

$\int Dr'^4 dr' > \frac{1}{5} f^5 \int Dr'^4 dr'$; ainſi dans ce dernier cas, la valeur de F ſera contenue entre les limites $\frac{f^2 L}{2c}$, & $\frac{3}{5} \times \frac{f^2 L}{2c}$. Si la denſité étoit par-tout la même, on auroit alors $F = \frac{3}{5} \cdot \frac{f^2 L}{2c}$.

VII.

SCHOLIE III. On peut au reſte déterminer la figure de la Lune, par la théorie, en ſupoſant qu'elle ait été originairement fluide, & qu'elle ait conſervé, en ſe durciſſant, la forme qu'elle auroit dû prendre, en vertu de la gravitation mutuelle de ſes parties, combinée avec la force centrifuge, & avec l'attraction de la Terre. Pour cela, nous ſupoſerons que le premier méridien de la Lune, d'où l'on commence à compter les angles Q, ſoit celui qui paſſe par la Terre, lorſque le lieu moyen de cette planète eſt égal à ſon lieu vrai, & nous regarderons l'attraction de la Terre comme agiſſant dans le ſens du diamètre de l'Équateur qui ſe trouve dans le premier méridien ; ce qui eſt vrai à-très-peu-près, à cauſe que la Lune nous préſente toujours ſenſiblement la même face. Or ſoit φ le rapport de la force centrifuge à la peſanteur ſous l'équateur de la Lune & ρ la diſtance moyenne du centre de la Lune à la Terre, on trouvera généralement pour la figure de chaque couche $\xi = A \cos P + B \cos P \cos Q$, & les deux quantités A & B ſeront déterminées par les deux équations ſuivantes

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{e} \times \frac{5 L r'^5}{4 c f^3} - \frac{5 I r'^3 A}{2c} + \int Dd(Ar'^5) + r'^5(\beta - \int DdA) = 0 \\ &\frac{1}{e} \times \frac{3T}{2\rho^3} \times \frac{5 r'^5}{2c} - \frac{5 L r'^3 B}{2c} + \int Dd(Br'^5) + r'^5(\eta - \int DdB) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (K)$$

β & η étant égales à ce que deviennent $\int DdA$ & $\int DdB$, lorſque $r' = f$; la démonſtration de ces formules eſt facile à trouver par les principes établis par MM. Clairaut & d'Alembert ; je ne la donne point ici, pour ne pas

m'écarter trop de mon objet principal. On aura donc dans cette hypothèse

$$X=\frac{d(r'^5\xi)}{dr'}=\frac{d(A'r'^5)}{dr'}\,cos.P^2+\frac{d(B'r'^5)}{dr'}\,cos.P^2cos.Q^2;$$

& par conséquent on trouvera

$$\int DXdr'cos.P^3dPdQ=\tfrac{16}{15}c\int Dd(A'r'^5)+\tfrac{16}{30}c\int Dd(r'^5B),$$

$$\int DXdr'sin.P^2cos.PdPdQ=\tfrac{4}{15}c\int Dd(r'^5A)+\tfrac{2}{15}c\int Dd(r'^5B);$$

$$\int DXdr'cos.P^3dPcos.2QdQ=\tfrac{4}{15}c\int Dd(r'^5B);\ \&$$

$$\int DXdr'cos.P^3dPsin.2QdQ=0.$$

Par-là on aura $M=\frac{4cc}{15}\int Dd(r'^5B)$; $N=0$,

$$K-\tfrac{1}{2}H=-\frac{4cc}{15}\int Dd(r'^5A)-\frac{2cc}{15}\int Dd(r'^5B).\ \Big\}\ \ldots\ldots\ (L)$$

Si on suppose $D=1$, on aura alors $M=\frac{4ccf^5B'}{15}$, $N=0$, & $K-\frac{1}{2}H=-\frac{4ccf^5}{15}(A'+\frac{1}{2}B')$, en prenant A' & B' pour les valeurs de A & B, lorsque $r'=f$. Mais si l'on veut avoir égard aux conditions de l'équilibre, on aura, par les équations (K), quelque soit d'ailleurs la densité D,

$$\int Dd(r'^5A)=\frac{5Lf^2A'}{2c}-\frac{5L\varphi f^2}{4ce};\ \&\int Dd(r'^5B)=\frac{5Lf^2B'}{2c}-\frac{3T}{2p^3}\times\frac{5f^5}{2ce},$$

en mettant $r'=f$. Si l'on supposoit de plus la densité constante & $=1$, on auroit $Ae=\frac{5L\varphi}{10L-4cf^3}=$ (à cause de $L=\frac{2cf^3}{3}$ dans cette hypothèse) $\frac{5}{4}\varphi$; & $B'e=\frac{15Tf^3}{2p^3(5L-2cf^3)}$ $=$ (par la même raison) $\frac{15Tf^3}{4p^3L}$. Du reste on remarquera que $e(A'+B')$ sera dans ce cas l'ellipticité du premier méridien, & eA' celle du méridien qui est à 90° de là; d'où il suit que les deux demi-axes de l'Équateur seront $f(1+eA'+eB')$, & $f(1+eA')$; & que son ellipticité sera, à-très-peu-près, $=eB'$.

XIII.

Il reſte encore à trouver la valeur des deux termes $\int\frac{\alpha\delta R}{R^2}$, & $\int\frac{\alpha\delta R'}{R'^2}$ de l'équation (A). Pour cela ſoient

Le rayon de l'orbite la Terre autour de la Lune, projetté ſur le plan de l'écliptique lunaire; ou ce qui revient au même, le rayon de l'orbite de la Lune autour de la Terre, réduit à l'écliptique . . . . . ρ

La longitude de la terre, vue du centre de la Lune; ce qui eſt la même choſe que la longitude de la Lune vue du centre de la Terre & augmentée de 180° . . . . υ

La tangente de la latitude de la Terre, vue de la Lune, & ſuppoſée au-deſſus de l'écliptique lunaire, laquelle eſt égale mais de ſigne contraire à celle de la Lune vue de la Terre . . . . . λ

On aura, comme, il eſt très-facile de le concevoir, $x=\rho\,cof.\upsilon$, $y=\rho\,cof.\upsilon$, $z=\rho\lambda$; & ſi ζ exprime la longitude du nœud aſcendant de la Lune, & i l'inclinaiſon de l'orbite, la valeur de λ ſera, ſuivant les dénominations qu'on vient de poſer, $=-i\,ſin.(\upsilon-180°-\zeta)=i\,ſin\,(\upsilon-\zeta)$

Soient auſſi le rayon de l'orbite apparente du Soleil autour de la Terre . . . . . ρ'
ſa longitude . . . . . υ'

Il eſt viſible qu'on aura $x'-x=\rho'\,cof.\upsilon'$; $y'-y=\rho'\,ſin.\upsilon'$; & $z'=z$; ſavoir $x'=\rho'\,cof.\upsilon'+\rho\,cof.\upsilon$; $y=\rho'\,ſin.\upsilon'+\rho\,ſin.\upsilon$, & $z'=z=\rho\lambda$.

On fera donc toutes ces ſubſtitutions dans l'expreſſion de R & de R', art. II, & l'on aura, après quelques réductions fort ſimples,

$R^2=\rho^2(1+\lambda^2)-2\rho(X\,cof.\upsilon+Y\,ſin.\upsilon+Z\lambda)+X^2+Y^2+Z^2=$ (en ſubſtituant pour X, Y, Z, leurs valeurs art. VI, (E), & réduiſant)

$$\rho^2(1+\lambda^2) - 2\rho r \sin.P\big(\sin.(\upsilon-\varepsilon)\sin.\pi+\lambda\cos.\pi\big) - 2\rho r\cos.P\sin.Q'\big(\sin.(\upsilon-\varepsilon)\cos.\pi-\lambda\sin.\pi\big) - \rho r\cos.P\cos.Q'\cos.(\upsilon-\varepsilon)+q^2.$$

On aura de même $R'^2=\rho'^2+2\rho'\rho\cos.(\upsilon'-\upsilon)+\rho^2(1+\lambda^2) - 2\rho'(X\cos.\upsilon'+Y\sin.\upsilon') - 2\rho(X\cos.\upsilon+Y\sin.\upsilon+Z\lambda)+X^2+Y^2+Z^2=\rho'^2+2\rho'\rho\cos.(\upsilon'-\upsilon)+\rho^2(1+\lambda^2) - 2\rho' r\sin.P\sin.(\upsilon'-\varepsilon)\sin.\pi - 2\rho' r\cos.P\sin Q'\sin(\upsilon'-\varepsilon)\cos.\pi - 2\rho r\cos.P\cos.Q'\cos.(\upsilon'-\varepsilon) - 2\rho r\sin.P\big(\sin(\upsilon-\varepsilon)\sin.\pi+\lambda\cos.\pi\big) - 2\rho r\cos.P\sin.Q'\big(\sin.(\upsilon-\varepsilon)\cos.\pi-\lambda\sin.\pi\big) - 2\rho r\cos.P\cos.Q'\cos.(\upsilon-\varepsilon)+r^2.$

Substituant au lieu de Q', sa valeur $Q+\omega$, & faisant, pour abréger, après avoir développé les *sinus* & les *cosinus* de $Q+\omega$.

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma &= \sin.(\upsilon-\varepsilon)\sin.\pi+\lambda\cos.\pi.\\
\Delta &= \sin.\omega\sin.(\upsilon-\varepsilon)\cos.\pi+\cos\omega\cos.(\upsilon-\varepsilon)-\lambda\sin.\omega\sin.\pi.\\
\Lambda &= \cos.\omega\sin.(\upsilon-\varepsilon)\cos.\Pi-\sin.\omega\cos.(\upsilon-\varepsilon)-\lambda\cos.\omega\sin.\pi\\
\Gamma' &= \sin.(\upsilon'-\varepsilon)\sin.\pi.\\
\Delta' &= \sin.\omega\sin.(\upsilon'-\varepsilon)\cos.\pi+\cos.\omega\cos.(\upsilon'-\varepsilon).
\end{aligned}\right\}\ldots(M)$$

$\Lambda'=\cos.\omega\sin.(\upsilon'-\varepsilon)\cos.\pi-\sin.\omega\cos.(\upsilon'-\varepsilon)$. On aura

$$R^2=\rho^2(1+\lambda^2) - 2\rho r\sin.P\times\Gamma - 2\rho r\cos.P\cos.Q\times\Delta - 2\rho r\cos.P\sin.Q\times\Lambda+r^2.$$

$$R'^2=\rho'^2+2\rho'\rho\cos.(\upsilon'-\upsilon)+\rho^2(1+\lambda^2) - 2r\sin.P(\rho'\Gamma'+\rho\Gamma) - 2r\cos.P\cos.Q(\rho'\Delta'+\rho\Delta) - 2r\cos.P\sin.Q(\rho'\Lambda'+\rho\Lambda)+r^2.$$

XIV.

Je différencie maintenant la valeur de R^2 qu'on vient de trouver, en faisant varier seulement ω, π, π, & en écrivant δ au lieu de d, j'aurai, en retenant les lettres Γ, Δ, Λ, & divisant par 2

$$R\delta R = -\rho r(\sin.P\times\delta\Gamma+\cos.P\cos.Q\times\delta\Delta+\cos.P\sin.Q\times\delta\Lambda;$$

on

On a de plus, en négligeant les quarrés & les autres puiſſances de r vis-à-vis de ρ $\frac{1}{R^3}=\frac{1}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3\rho r}{\rho^4(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}$ $(\sin.P\times\Gamma+\cos.P\cos.Q\times\Delta+\cos.P\sin.Q\times\Lambda)$.

On multipliera donc enſemble ces valeurs de $R\delta R$, & de $\frac{1}{R^3}$, en ayant attention de rejetter tous les termes qui renfermeroient $r\sin.P$, $r\cos.P\sin.Q$, $r\cos.P\cos.Q$, $r^2\sin.P\cos.P\cos.Q$, & $r^2\sin.P\cos.P\sin.Q$; par la raiſon que l'intégrale de ces termes, après avoir été multipliés par α, eſt $=0$ (art. V, (B); art. IX, (F)); on multipliera enſuite chaque terme du produit par α, & on en prendra l'intégrale, en ſe ſouvenant que l'on a $\int\alpha r^2\cos.P^2=H$, $\int\alpha r^2\sin.P^2=K$, $\int\alpha r^2\cos.P^2\cos.2Q=M$, $\int\alpha r^2\cos.P^2\sin.2Q=N$ (art. IX, (G)); ce qui donne $\int\alpha r^2\cos.P^2\cos.Q^2=\frac{1}{2}(H+M)$; $\int\alpha r^2\cos.P^2\sin.Q^2=\frac{1}{2}(H-M$, & $\int\alpha r^2\cos.P^2\sin.Q\cos.Q=\frac{1}{2}N$. Par ce moyen on aura

$$\int\frac{\alpha\delta R}{R^2}=-\frac{3\rho^2}{\rho^4(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}\Big(K\Gamma\delta\Gamma+\tfrac{1}{2}H(\Delta\delta\Delta+\Lambda\delta\Lambda)+\tfrac{1}{2}M(\Delta\delta\Delta-\Lambda\delta\Lambda)+\tfrac{1}{2}N(\Lambda\delta\Delta+\Delta\delta\Lambda)\Big)$$

Or on trouve, par la différentiation des valeurs de Γ, Δ, Λ, art. précédent,

$\delta\Gamma=-\cos.(\upsilon-\epsilon)\sin.\pi\delta\epsilon+\big(\sin(\upsilon-\epsilon)\cos.\pi-\lambda\sin\pi\big)\delta\pi.$

$\delta\Delta=\big(\cos.\omega\sin.(\upsilon-\epsilon)\cos.\pi-\sin.\omega\cos.(\upsilon-\epsilon)-\lambda\cos.\omega\sin.\pi\big)\delta\omega$
$-\big(\sin.\omega\cos(\upsilon-\epsilon)\cos\pi-\cos.\omega\sin.(\upsilon-\epsilon)\big)\delta\epsilon-\big(\sin.\omega\sin.(\upsilon-\epsilon)\sin.\pi-\lambda\sin.\omega\cos.\pi\big)\delta\pi.$

Savoir, comme il eſt facile de le voir, par la ſeule inſpection des formules (M), art. précédent;

$\delta\Delta=\Lambda\delta\omega+(\Lambda\cos.\pi+\Gamma\cos.\omega\sin.\pi)\delta\epsilon-\Gamma\sin.\omega\delta\pi.$

On a de même

$\delta\Lambda=-\Delta\delta\omega-(\Delta\cos.\pi+\Gamma\sin.\omega\sin.\pi)\delta\epsilon-\Gamma\cos.\omega\delta\pi$; donc

$\Delta\delta\Delta+\Lambda\delta\Lambda=\Gamma(\Delta cos.\omega-\Lambda sin.\omega)sin.\pi\delta\varepsilon-\Gamma(\Delta sin.\omega+\Lambda cos.\omega)\delta\pi.$

$\Delta\delta\Delta-\Lambda\delta\Lambda=2\Delta\Lambda\delta\omega+2\Delta\Lambda cos.\pi\delta\varepsilon+\Gamma(\Delta.cos.\omega+\Lambda sin.\omega)sin.\pi\delta\varepsilon-\Gamma(\Delta sin.\omega-\Gamma cos.\omega)\delta\pi.$

$\Lambda\delta\Delta+\Delta\delta\Lambda=(\Lambda^2-\Delta^2)\delta\omega+(\Lambda^2-\Delta^2)cos.\pi\delta\varepsilon+\Gamma(\Lambda cos.\omega-\Delta sin.\omega)sin.\pi\delta\varepsilon-\Gamma(\Lambda sin.\omega+\Delta cos.\omega)\delta\pi.$

Donc si l'on fait, pour abréger,

$\int\frac{\alpha\delta R}{R^2}=-\frac{3p^2}{p^3(1+\lambda)^{\frac{5}{2}}}(\Omega'\delta\omega+E'\delta\varepsilon+\Pi'\delta\pi)$, on aura

$\Omega'=M\Delta\Lambda+\frac{1}{2}N(\Lambda^2-\Delta^2).$

$E'=(-K+\frac{1}{2}H)\Gamma cos.(\upsilon-\varepsilon)sin.\pi+\frac{1}{2}M[2\Delta\Lambda cos.\pi+\Gamma(\Delta cos.\omega+\Lambda sin.\omega)sin.\pi]+\frac{1}{2}N[(\Lambda^2-\Delta^2)cos.\pi+\Gamma(\Lambda cos.\omega-\Delta sin.\omega)sin.\pi]$

$\Pi'=(K-\frac{1}{2}H)\Gamma[sin.(\upsilon-\varepsilon)cos.\pi-\lambda sin.\pi]-\frac{1}{2}M\Gamma[\Delta sin.\omega-\Lambda cos.\omega]-\frac{1}{2}N\Gamma[\Lambda sin.\omega+\Delta cos.\omega].$

On remarquera que dans ces formules j'ai mis pour $\Delta cos.\omega-\Lambda sin.\omega$ sa valeur $cos.(\upsilon-\varepsilon)$, & pour $\Delta sin.\omega+\Lambda cos.\omega$, $sin.(\upsilon-\varepsilon)cos.\pi-\lambda sin.\pi$; mais j'ai conservé dans les autres termes les lettres Γ, Δ, Λ, tant pour rendre les expressions moins composées, que pour les raisons qu'on verra plus bas.

XV.

On cherchera d'une manière semblable la valeur de $\int\frac{\alpha\delta R'}{R'^2}$; & pour cela il suffira de remarquer 1.° que dans l'expression de R'^2 (art. XIII), on peut négliger les termes $\rho\Gamma$, $\rho\Delta$, $\rho\Lambda$ vis-à-vis de $\rho'\Gamma'$, $\rho'\Delta'$, $\rho'\Lambda'$, parce que le rayon ρ' de l'orbite du soleil est incomparablement plus grand que le rayon ρ de l'orbite de la Lune. 2.° Que la valeur de

R'^2 ne différera, après cela, de celle de R^2, qu'en ce qu'il y aura au lieu de $\rho^2(1+\lambda^2)$, $\rho'^2+2\rho'\rho\cos.(v'-v)+\rho^2(1+\lambda^2)$, quantité qu'on peut réduire par la même raiſon à ρ'^2; & au lieu des Γ, Δ, Λ, ρ, & λ; Γ', Δ', Λ', ρ' & zéro: d'où il s'enſuit que ſi l'on fait pareillement

$\int \frac{\alpha\delta R'}{R'^2} = -\frac{3\rho'^2}{\rho'^3}(\Omega''\delta\omega+E''\delta\varepsilon+\Pi''\delta\pi)$, on trouvera auſſi

$\Omega'' = M\Delta'\Lambda'+\frac{1}{2}N(\Lambda'^2-\Delta'^2)$

$E'' = (K-\frac{1}{2}H)\Gamma'\cos.(v-\varepsilon)\sin.\pi+\frac{1}{2}M[2\Delta'\Lambda'\cos.\pi+\Gamma'(\Delta'\cos.\omega-\Lambda'\sin.\omega)\sin.\pi]+\frac{1}{2}N[(\Lambda'^2-\Delta'^2)\cos.\pi+\Gamma'(\Lambda'\cos.\omega-\Delta'\sin.\omega)\sin.\pi]$.

$\Pi'' = (K-\frac{1}{2}H)\Gamma'\times\sin.(v'-\varepsilon)\cos.\pi-\frac{1}{2}M\Gamma'[\Delta'\sin.\omega-\Lambda'\cos.\omega]-\frac{1}{2}N\Gamma'[\Lambda'\sin.\omega+\Delta'\cos.\omega]$.

XVI.

Remarque. La valeur de R de l'art. XIII nous fournit un moyen commode & ſimple de trouver la poſition du centre apparent de la Lune par rapport à ſon équateur & à ſon premier méridien. Car comme la quantité R exprime la diſtance de chaque poinr α de la Lune au centre de la Terre, il eſt évident qu'elle ſera la plus petite, lorſque le rayon r ſera dans la ligne qui joint les centres de la Lune & de la Terre, c'eſt-à-dire qui paſſe par le centre apparent de la Lune: donc ſi on fait

La diſtance du centre apparent de la Lune au plan de l'équateur Lunaire . . . . . $\downarrow$

La diſtance du méridien qui paſſe par le centre apparent au premier méridien . . . . . θ

Il n'y aura qu'à mettre, dans l'expreſſion de R, $\downarrow$ au lieu de P, & θ au lieu de Q; & faire enſuite ſa différentielle égale à zéro, en regardant $\downarrow$ & θ comme variables; ce qui donera

$-2\rho r(\Gamma \cos.\downarrow - \Delta \cos.\theta \sin.\downarrow - \Lambda \sin.\theta \sin.\downarrow)\, d\downarrow + 2\rho r(\Delta \cos.\downarrow \sin.\theta - \Lambda \cos.\downarrow \cos.\theta) d\theta = 0$; d'où l'on tire séparément les deux équations $\Gamma \cos.\downarrow - \Delta \cos.\theta \sin.\downarrow - \Lambda \sin.\theta \sin.\downarrow = 0$; $\Delta \cos.\downarrow \sin.\theta - \Lambda \cos.\downarrow \cos.\theta = 0$; la dernière donne d'abord $\frac{\cos.\theta}{\sin.\theta} = \frac{\Lambda}{\Delta}$; d'où $\sin.\theta = \frac{\Lambda}{\sqrt{(\Lambda^2+\Delta^2)}}$ & $\cos.\theta = \frac{\Delta}{\sqrt{(\Lambda^2+\Delta^2)}}$; enſuite la première nous donnera $\frac{\sin.\downarrow}{\cos.\downarrow} = \frac{\Gamma}{\Delta \cos.\theta + \Lambda \sin.\theta} =$ (en ſubſtituans pour $\sin.\theta$ & $\cos.\theta$ les valeurs qu'on vient de trouver) $\frac{\Gamma}{\sqrt{(\Delta^2+\Lambda^2)}}$; d'où l'on tire $\sin.\downarrow = \frac{\Gamma}{\sqrt{(\Gamma^2+\Delta^2+\Lambda^2)}}$; & $\cos.\downarrow = \frac{\sqrt{(\Delta^2+\Lambda^2)}}{\sqrt{(\Gamma^2+\Delta^2+\Lambda^2)}}$; mais on a par les valeurs de Γ, Δ, Λ, art. XIII (M), $\Gamma^2+\Delta^2+\Lambda^2 = 1+\lambda^2$; donc ſubſtituant cette valeur, on aura $\Gamma = \sin.\downarrow \sqrt{1+\lambda^2}$; $\sqrt{(\Delta^2+\Lambda^2)} = \cos.\downarrow \sqrt{1+\lambda^2}$; & par-là $\Delta = \cos.\theta \cos.\downarrow \sqrt{1+\lambda^2}$; $\Lambda = \sin.\theta \cos.\downarrow \sqrt{1+\lambda^2}$. Ainſi l'on aura les valeurs de Γ, Δ, Λ, exprimées par les angles θ & $\downarrow$, & *vice-verſâ* on aura ces angles exprimés par les quantités Γ, Δ, Λ ; c'eſt-à-dire par les angles ω, ε, π & υ.

On trouvera de la même manière, en changeant ſimplement Γ, Δ, Λ, en $\Gamma', \Delta', \Lambda'$, & faiſant $\lambda = 0$, les angles θ' & $\downarrow'$ qui donnent le centre apparent de la Lune vue du Soleil, c'eſt-à dire du centre de l'hémiſphère éclairé ; & combinant ces angles avec les angles θ & $\downarrow$, il ſera aiſé de déterminer généralement les phaſes de cette Planète.

XVII.

COROLLAIRE GÉNÉRAL. Il faut maintenant ſubſtituer dans l'équation (A) les valeurs que nous avons trouvées (art. IX, XIV & XV) ; ce qui la changera en celle-ci

$$\left(\Omega - \frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}} \times \Omega' - \frac{3S}{\rho'^3} \times \Omega''\right) \delta\omega + \left(E - \frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}} \times E' - \frac{3S}{\rho'^3} \times E''\right) \delta\varepsilon$$

$+\left(\Pi-\frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\times\Pi'-\frac{3S}{\rho'^3}\times\Pi''\right)\delta\pi=0$; laquelle devant être vraie, quelles que soient les valeurs des différentielles $\delta\omega$, $\delta\varepsilon$, $\delta\pi$ (art. III & IV), nous fournit les trois suivantes.

$$\Omega-\frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\times\Omega'-\frac{3S}{\rho'^3}\times\Omega''=0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$E-\frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\times E'-\frac{3S}{\rho'^3}\times E''=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\Pi-\frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\times\Pi'-\frac{3S}{\rho'^3}\times\Pi''=0 \quad \ldots\ldots (3).$$

La première de ces équations servira à déterminer les loix de la rotation de la Lune autour de son axe ; la seconde à déterminer la nutation, & la troisième à déterminer la précession.

XVIII.

SCHOLIE. Les équations (1), (2), (3), que nous venons de trouver répondent exactement aux équations (G), (H), (K) données par M. d'Alembert, dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1754, pag. 424, 425, pour la précession des équinoxes & la nutation de l'axe de la Terre, en vertu de l'action du Soleil & de la Lune.

Pour en faire la comparaison, on remarquera

1.° Que les angles P, ε, π, dans les formules de M. d'Alembert, répondent dans les nôtres aux complémens des angles ω, ε, π.

2.° Que les lignes f & $a-b$ dans celles-là, ont dans celle-ci pour valeurs $r\,cos.P$ & $r\,sin.P$; & que les angles X'' sont la même chose que les complémens des angles Q'.

3.° Que les angles V', X', V, X répondent aux complémens des angles $\downarrow-180°$, $Q-\theta$, $\downarrow'-180°$, $Q-\theta'$.

4.° Que les angles υ', & υ répondent ici aux angles $\upsilon-(\ell+270°)$, $\upsilon'-(\varepsilon+270°)$.

Enfin on mettra dans les formules citées T au lieu de L, & ρ, ρ' & $-\lambda$, au lieu de u', u, & p'.

XIX.

Réſolution de l'Équation

$$\Omega - \frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \times \Omega' - \frac{3S}{\rho'^3} \times \Omega'' = 0 \ldots\ldots (1).$$

J'obſerverai d'abord qu'en regardant la Lune comme peu différente d'un globe, ainſi qu'elle l'eſt en effet, les quantités M, N ſont incomparablement plus petites que les quantités H, K (art. XI); d'où il ſuit que dans l'expreſſion de Ω (art. IX), on peut négliger les termes qui renferment M & N vis-à-vis de ceux qui renferment H; ce qui la réduit à $\frac{d(d\omega + cof.\pi d\varepsilon)}{dt^2} \times H$. J'obſerve enſuite qu'au lieu de l'angle ω, qui repréſente le mouvement de rotation de la Lune, il eſt beaucoup plus commode d'employer l'angle θ (art. XVI), lequel eſt toujours néceſſairement très-petit, à cauſe que la Lune montre toujours à-peu-près la même face à la Terre. Or pour trouver la valeur de ω en θ, on aura recours aux formules de l'article cité, & l'onremarquera 1.° que $\Delta \, sin.\,\omega + \Lambda \, cof.\,\omega = \sqrt{1+\lambda^2}\, cof.\,\downarrow (cof.\,\theta \, sin.\,\omega + sin.\,\theta \, cof.\,\omega) = \sqrt{1+\lambda^2}\, cof.\,\downarrow sin.\,(\omega+\theta)$; & que de même $\Delta \, cof.\,\omega - \Lambda \, sin.\,\omega = \sqrt{1+\lambda^2}\, cof.\,\downarrow cof.\,(\omega+\theta)$. 2.° Que $\Delta \, sin.\,\omega + \Lambda \, cof.\,\omega =$ (en ſubſtituant pour Δ & pour Λ leurs valeurs, art. XIV, (M)) $sin.\,(\upsilon - \varepsilon)\, cof.\,\pi - \lambda \, sin.\,\pi$; & que $\Delta \, cof.\,\omega - \Lambda \, sin.\,\omega =$ (par les mêmes ſubſtitutions) $cof.\,(\upsilon - \varepsilon)$; d'où il s'enſuit que l'on aura $\frac{sin.\,(\omega+\theta)}{cof.\,(\omega+\theta)} = \frac{sin.\,(\upsilon-\varepsilon)\,cof.\,\pi - \lambda \, sin.\,\pi}{cof.\,(\upsilon-\varepsilon)}$, ou bien $tang.\,(\omega+\theta) = tang.\,(\upsilon-\varepsilon)\, cof.\,\pi - \lambda \, sin.\,\pi \, ſec.\,(\upsilon-\varepsilon) = tang.\,(\upsilon-\varepsilon) - 2 \, sin.\,(\frac{\pi}{2})^2 \, tang.\,(\upsilon-\varepsilon) -$

$\lambda \sin.\pi \sec.(\upsilon-\varepsilon)$, parce que $\sin.(\frac{\pi}{2})^2 =$ (comme l'on sait) $\frac{1-\cos.\pi}{2}$. 3.° Que la quantité λ, qui dénote la tangente de la latitude de la Lune (art. XIII) eſt toujours une quantité aſſez petite, puiſque ſa plus grande valeur eſt d'environ *tang.* 5° 9′. 4.° Que l'angle π qui repréſente l'inclinaiſon de l'éqvateur lunaire à l'écliptique (art. V) eſt auſſi très-petit ; car ſuivant les obſervations de M. Caſſini, on a $\pi = 2° 30'$, & ſuivant celles de M. Mayer, on a ſeulement $\pi = 1° 29'$. D'où il s'enſuit qu'on aura à-très-peu-près $tang.(\omega+\theta) = tang.(\upsilon-\varepsilon)$, & par conſéquent $\omega+\theta = \upsilon-\varepsilon$, ou, ſi on veut faire le calcul plus exactement, en ne négligeant que les quantités de l'ordre $\sin.\pi^4$, & de $\lambda^2 \sin.\pi^2$, $\omega+\theta = \upsilon-\varepsilon-\frac{2\sin.\frac{\pi^2}{2}\, tang.(\upsilon-\varepsilon)}{1+tang.(\upsilon-\varepsilon)^2}-\frac{\lambda \sin.\pi \sec.(\upsilon-\varepsilon)}{1+tang.(\upsilon-\varepsilon)^2} = \upsilon-\varepsilon$

$= \upsilon-\varepsilon-\sin.(\frac{\pi}{2})^2 \sin.(2\upsilon-2\varepsilon)-\lambda \sin.\pi \cos.(\upsilon-\varepsilon)$.

Mais nous nous contenterons ici de prendre ſimplement $\upsilon-\varepsilon$ pour la valeur de $\omega+\theta$, ce qui nous donnera $\omega = \upsilon-\varepsilon-\theta$; $d\omega = d\upsilon-d\varepsilon-d\theta$; & $d\omega+\cos.\pi\, d\varepsilon = d\upsilon-(1-\cos.\pi)d\varepsilon-d\theta$

$= d\upsilon-2\sin.\frac{\pi^2}{2}\, d\varepsilon-d\theta =$ (en négligeant, comme on vient de le faire, les termes de l'orde de $\sin.\frac{1}{2}\pi^2$) $d\upsilon-d\theta$. Faiſant donc cette ſubſtitution dans la valeur de Ω ci-deſſus, on aura $\Omega = \frac{d^2\upsilon-d^2\theta}{dt^2} \times H$.

Soit maintenant V le mouvement moyen de la Lune autour de la Terre, on aura, en regardant l'orbite de cette planète comme circulaire, $\frac{dV^2}{dt^2} = \frac{T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}$, (il faudroit mettre à la vérité $T+L$ au lieu de T; mais la différence qui en réſulte eſt trop petite pour qu'il ſoit néceſſaire d'en tenir compte ici). Donc $\frac{3T}{\rho^3(1+\lambda)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3dV^2}{dt^2} \times \frac{1+\lambda^2}{1} =$ (en négligeant le quarré de la quantité très-petite λ) $\frac{3dV^2}{dt^2}$.

On trouvera de même en nommant V' le mouvement moyen de la Terre autour du Soleil $\frac{3S}{r^3}=\frac{3dV'^2}{dt^2}$; mais on remarquera que $V'=$ à-très-peu-près $\frac{V}{1\frac{1}{2}}$, & par conséquent $\frac{3dV'^2}{dt^2}=$ environ $\frac{1}{180}\times\frac{3dV^2}{dt^2}$; d'où il s'ensuit qu'on peut négliger entièrement le terme $\frac{3dV'^2}{dt^2}\times\Omega''$ venant de l'action du Soleil, vis-à-vis du terme $\frac{3dV'^2}{dt^2}\times\Omega'$ qui vient de l'action de la Terre, desorte que l'équation (1) deviendra simplemet, après avoir fait les substitutions précédentes, & divisé par $\frac{dt^2}{H}$, $-d^2\theta+d^2v-\frac{3dV^2}{H}\Omega'=0$ . . . . . (4).

Or par l'art. XIV, on a $\Omega'=M\Delta\Lambda+\frac{1}{2}N(\Lambda^2-\Delta^2)$; & par l'art. XVI, $\Delta=cos.\theta\,cos.\psi\sqrt{1+\lambda^2}$, $\Lambda=sin.\theta cos.\psi\sqrt{1+\lambda^2}$; donc puisque $sin.\theta\,cos.\theta=\frac{1}{2}sin.2\theta$ & $sin.\theta^2-cos.\theta^2=-cos.2\theta$, on aura $\Omega'=\frac{1}{2}cos.\psi\sqrt{1+\lambda^2}\,(M\,sin.2\theta-N\,cos.2\theta$; mais on a, par le même art. XVI, $sin.\psi\sqrt{1+\lambda^2}=\Gamma=$ (art. XIII, (M)) $sin.(v-\varepsilon)\,sin.\pi+\lambda cos.\pi$; d'où l'on tire $cos.\psi\sqrt{1+\lambda^2}=\sqrt{\left(1+\lambda^2 sin.\pi^2-2\lambda sin.\pi cos.\pi sin.(v-\varepsilon)-sin.\pi^2 sin.(v-\varepsilon)^2\right)}=1$, en négligeant, comme nous l'avons fait jusqu'ici, les termes où se trouvent les quantités très petites λ & $sin.\pi$ formant des produits de deux ou de plusieurs dimensions.

De plus si on suppose, ce qui est permis, que le premier méridien de la Lune soit celui qui passe par la Terre, lorsque le lieu vrai de cette planète est égal à son lieu moyen, il est clair que l'angle θ qui représente la distance du méridien, qui passe par le centre apparent de la Lune, à son premier méridien (XVI) sera toujours très-petit; car, suivant les observations de la libration, cet angle ne va guères au-delà de 8°; par conséquent on aura à-très-peu-près

peu-près, & avec une exactitude suffisante pour notre objet, $\sin.2\theta = 2\theta$, & $\cos.2\theta = 1$. Donc enfin $\Omega' = -\frac{1}{2}N + Nt$.

Il ne reste plus qu'à trouver la valeur de d^2v; pour cela, on remarquera que $v - 180° =$ à la longitude vraie de la Lune, (art. XIII); par conséquent, si on appelle m le rapport du mouvement de l'anomalie moyenne de la Lune, à son mouvement moyen, & qu'on n'ait égard qu'à sa première inégalité, on aura $v - 180° = long.\ moy. - a \sin mV$; a étant, suivant M. Clairaut, 6° 19′, & m un nombre très-peu différent de l'unité; d'où l'on tire

$d^2v = m^2 a \sin. mV\, dV^2$.

Faisant donc ces substitutions dans l'équation (4) ci-dessus, on la changera en celle-ci:

$-d^2\theta - \frac{3M}{H}\theta dV^2 + \frac{3N}{2H}dV^2 + m^2 a \sin. mV\, dV^2 = 0$, d'où l'on aura, par les méthodes connues,

$$\theta = \frac{N}{2M}\left[1 - \cos.\left(V\sqrt{\tfrac{3M}{H}}\right)\right] + C\sin.\left(V\sqrt{\tfrac{3M}{H}}\right) - \frac{m^2 a}{m^2 - \frac{3M}{H}}\sin. mV. \quad (5)$$

C est l'une des deux constantes indéterminées introduites par la double intégration; l'autre ayant été supposée telle que l'angle θ soit nul lorsque $V = 0$, c'est-à-dire lorsque le lieu vrai de la Lune est le même que son lieu moyen.

De-là il est facile de voir que si on veut tenir compte des autres inégalités du mouvement vrai de la Lune, & qu'on suppose pour cela

$v - 180° = long.\ moy. - a \sin. mV - b \sin. nV - c \sin. pV$ &c.

on trouvera pareillement

$$\theta = C\sin.\left(V\sqrt{\tfrac{3M}{H}}\right) + \frac{N}{2M}\left[1 - \cos.\left(V\sqrt{\tfrac{3M}{H}}\right)\right]$$

$$- \frac{m^2 a}{m^2 - \frac{3M}{H}}\sin. mV - \frac{n^2 b}{n^2 - \frac{3M}{H}}\sin. nV \text{ &c.}$$

XX.

Conſéquences qui réſultent de la formule précédente, par rapport à la libration de la Lune, & à ſa rotation.

Comme l'Équateur Lunaire n'eſt que très-peu incliné à l'écliptique, il eſt clair que l'angle θ repréſentera, ſans erreur ſenſible, la libration de la Lune en longitude; d'où l'on voit que cette libration différera un peu de celle qui a été ſuppoſée juſqu'à préſent par les Aſtronomes. Pour en faire la comparaiſon avec plus de facilité, on mettra l'expreſſion de θ ſous la forme ſuivante:

$$\theta = -a\,\text{ſin.}\,mV - b\,\text{ſin.}\,nV - \&c.$$

$$-\frac{3M}{H}\times\frac{a}{m^2-\frac{3M}{H}}\,\text{ſin.}\,mV-\frac{3M}{H}\times\frac{b}{n^2-\frac{3M}{H}}\,\text{ſin.}\,nV-\&c.$$

$$+C\,\text{ſin.}\left(V\sqrt{\frac{3M}{H}}\right)+\frac{N}{2M}\times\left[1-\text{cof.}\left(V\sqrt{\frac{3M}{H}}\right)\right].$$

& l'on remarquera qu'elle comprend, pour ainſi dire, trois ſortes de librations.

La première eſt repréſentée par les termes $-a\,\text{ſin.}\,mV - b\,\text{ſin.}\,nV$ &c. qui expriment la différence entre le mouvement vrai & le mouvement moyen de la Lune; ainſi cette libration eſt purement optique; & c'eſt la ſeule qu'on ait obſervée juſqu'ici.

La ſeconde eſt contenue dans les termes

$$-\frac{3M}{H}\times\frac{a}{m^2-\frac{3M}{H}}\,\text{ſin.}\,mV-\frac{3M}{H}\times\frac{b}{n^2-\frac{3M}{H}}\,\text{ſin.}\,nV-\&c:$$

& vient en partie de l'irrégularité du mouvement de la Lune, & en partie de la non-ſphéricité de cette Planète; mais elle ſera preſqu'inſenſible, en ſuppoſant, comme on l'a fait

au commencement de l'article précédent, M incomparablement plus petite que H; & cela doit en effet être ainsi; autrement il seroit impossible que les Astronomes ne s'en fussent pas encore apperçus.

La troisième enfin est celle qui est représentée par les termes $C\,sin.(V\sqrt{\frac{3M}{H}})+\frac{N}{2M}\times\left[1-cos.(V\sqrt{\frac{3M}{H}})\right]$, & qui ne dépend aucunement du mouvement de la Lune autour de la Terre; mais simplement de sa figure non sphérique. Elle sera la plus grande, lorsque $tang.(V\sqrt{\frac{3M}{H}})=-\frac{2CM}{N}$; & alors sa valeur sera $\frac{N+\sqrt{N^2+4C^2M^2}}{2M}$; le signe $+$ a lieu lorsque la libration se fait dans le sens de la rotation de la Lune, c'est-à-dire d'occident en orient par rapport au centre de la Lune, & d'orient en occident par rapport à la Terre; & le signe $-$ est pour la libration du côté opposé; d'où l'on voit que ces deux librations ne seront jamais égales, excepté que $N=0$, auquel cas elles seront entièrement analogues aux oscillations d'un pendule simple de la longueur $\frac{H}{3M}$, qui décriroit des arcs $=2C$.

Au reste, soit que $N=0$, ou non, la durée d'une libration entière, composée d'une allée & d'un retour, sera toujours égale à la durée d'une oscillation totale du même pendule, ou bien, elle sera au tems périodique de la Lune comme $1:\sqrt{\frac{3M}{H}}$.

A l'égard de la rotation de la Lune, comme on a trouvé dans l'art. XIX, $\omega+\theta=$, à-très-peu-près, $v-\epsilon$, on aura, en substituant les valeurs de v & de θ, $\omega=long.\,moy.\,\mathbb{C}+180^\circ-\epsilon+\frac{3M}{H}\times\frac{a}{m^2-\frac{3M}{H}}sin.\,mV+\frac{3M}{H}\times\frac{b}{n^2-\frac{3M}{H}}sin.\,nV$ &c.
$-C\,sin.(V\sqrt{\frac{3M}{H}})-\frac{N}{2M}\times\left[1+cos.(V\sqrt{\frac{3M}{H}})\right]$.

D'où l'on voit

1.° Que la rotation moyenne de la Lune eſt égale à ſon mouvement moyen autour de la Terre, moins le mouvement moyen de ſes points équinoxiaux; condition néceſſaire pour que cette planète nous préſente toujours à peu près la même face.

2.° Que la viteſſe de la rotation vraie de la Lune eſt variable; cette viteſſe étant à celle du mouvement moyen autour de la Terre dans le rapport de $d\omega$ à dV, c'eſt-à-dire, de

$$1-\frac{d\varepsilon}{dV}+\frac{3M}{H}\times\frac{ma}{m^2-\frac{3M}{H}}\cos.mV+\frac{3M}{H}\times\frac{nb}{n^2-\frac{3M}{H}}\cos.mV \text{ \&c.}$$

$$-C\sqrt{\frac{3M}{H}}\times\cos.\left(V\sqrt{\frac{3M}{H}}\right)-\frac{N}{2M}\times\sqrt{\frac{3M}{H}}\times\sin.\left(V\sqrt{\frac{3M}{H}}\right);$$

à 1.

Ainſi faiſant $V=0$, on a

$$2-\frac{d\varepsilon}{dV}+\frac{3M}{H}\times\frac{ma}{m^2-\frac{3M}{H}}+\frac{3M}{H}\times\frac{nb}{n^2-\frac{3M}{H}} \text{ \&c. } -C\sqrt{\frac{3M}{H}},$$

pour la valeur de la viteſſe primitive de rotation, qui aura dû être imprimée a la Lune au commencement de ſon mouvement. Donc, à cauſe de l'indéterminée C, il eſt clair que cette viteſſe aura pu être quelconque, pourvû qu'elle différât très-peu de 1, c'eſt-à-dire de la viteſſe du mouvement moyen, & que d'ailleurs la valeur de M ne ſoit pas nulle, ni négative.

XXI.

Remarque. Juſqu'ici les Aſtronomes avoient toujours ſuppoſé que la Lune tournoit autour de ſon centre d'un mouvemement parfaitement uniforme; & ils avoient été obligés, en conſéquence, pour ſauver le phœnomène de la non-rotation apparente de cette Planète, d'imaginer qu'elle eût reçu d'abord une viteſſe de rotation exactement égale à celle de ſon mouvement moyen autour de la Terre,

ou plutôt de celui de ſes points équinoxiaux ; ce qui étoit néanmoins très difficile à comprendre. Il me ſemble que la théorie précédente fournit un dénouement tout ſimple de ce paradoxe, ou, pour mieux dire, ce paradoxe n'a point lieu dans la théorie que je viens de donner de la rotation de la Lune. Ainſi je puis à cet égard, me flatter d'avoir pleinement ſatisfait à la première partie de la queſtion propoſée par l'Académie.

XXII.

SCHOLIE. Si on ſuppoſe la Lune homogène, & que ſa figure ſoit celle d'un ſphéroïde dont l'équateur & les méridiens ſeroient des ellipſes, comme dans l'art. XII, on trouvera (art. XI & XII), $H=\frac{1}{5}cF=$ (en faiſant $D=1$) $\frac{4cf^5}{15}$, $Ml=\frac{4cf^5eB'}{15}$, & $N=0$; d'où l'on aura $\frac{M}{Ml}=eB'=$ à l'ellipticité de l'équateur, c'eſt-à-dire à la quantité dont le demi axe de l'équateur, qui eſt à peu près dans la même ligne que le centre de la Terre ſurpaſſe l'autre demi axe ; cette quantité étant ſuppoſée diviſée par le rayon de la Lune ; donc ſuivant l'art. XX, la Lune ſera réellement autour de ſon axe, en vertu de l'action de la Terre, des oſcillations exprimées par la formule $C\,\mathit{ſin}.\,(V\sqrt{3eB'})$.

Si on veut que l'allongement de la Lune vers la Terre ait été produit par l'action même de la Terre ſur cette Planète ſuppoſée fluide ; alors on aura (art. XII) $eB'=\frac{15f^3}{4\rho^3}\times\frac{T}{L}$.

Pour évaluer cette expreſſion, nous ferons, avec M. Clairaut, $\frac{T}{L}=67$; & avec M. de Lalande $\frac{f}{\rho}=\frac{1}{11}$ (f' eſt le rayon de la Terre) ; enſuite nous prendrons $\rho=60f'$, ce qui donnera $\frac{f}{\rho}=\frac{1}{11.60}$; de-là je trouve $eB'=\frac{236}{10000000}$;

& $\sqrt{3eB} = \frac{8414}{1000000}$. Donc le tems d'une oſcillation totale ſera de $\frac{1000000}{8414}$ mois périodiques = environ 3848 jours.

On peut regarder au reſte tout ce que nous venons de dire ſur la libration de la Lune comme un commentaire de la Prop. XXXVIII, liv. 3, *Princ. Math.*

XXIII.

Réſolution de l'Équation

$$E - \frac{3T}{p^3(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \times E' - \frac{3S}{p^3} \times E'' = 0 \ldots . (2).$$

On aura d'abord, en négligeant dans la valeur de E (art. IX) les termes qui renferment les quantités très-petites M, N, & $K - \frac{1}{2}\dot{H}$, $E = \frac{d(cos.\pi\, d\omega + d\varepsilon)}{dt^2} \times H$; expreſſion qu'on peut mettre ſous cette forme $\frac{cos.\pi\, d(cos.\, d\omega + cos.\pi\, d\varepsilon)}{dt^2} \times H - \frac{sin.\pi\, d\pi\, d\omega}{dt^2} \times H + \frac{sin.\pi^2 d^2\varepsilon + sin.\pi\, cos.\varpi\, d\pi\, d\varepsilon}{dt^2} \times H$, ou ſimplement à cauſe de $sin.\pi$ très-petit, & de $d\pi$, & $d\varepsilon$ très-petits auſſi par rapport à $d\omega$, comme on le verra dans la ſuite, $\frac{cos.\pi\, d(d\omega + cos.\pi\, d\varepsilon)}{dt^2} \times H - \frac{sin.\pi\, d\pi\, d\omega}{dt^2} \times H$; c'eſt-à-dire, (art. XIX) $E = \Omega\, cos.\pi - \frac{sin.\pi\, d\pi\, d\omega}{dt^2} \times H$.

En ſecond lieu, on aura (art. XIV) $E' = -(K - \frac{1}{2}H)\, \Gamma\, cos.(\upsilon - \varepsilon)\, sin.\pi + M\Delta\Lambda\, sin.\pi + \frac{1}{2}M\Gamma(\Delta\, cos.\omega + \Lambda\, sin.\omega) sin.\pi + \frac{1}{2}N(\Lambda^2 - \Delta^2)\, cos.\pi + \frac{1}{2}N\Gamma(\Lambda cos\,\omega - \Delta\, sin.\omega) sin.\pi$; c'eſt-à-dire, en ſubſtituant pour Δ & pour Λ, les expreſſions $cos.\theta\, cos.\psi\sqrt{1+\lambda^2}$, (art. XIV), & mettant Ω' à la place de $M\Delta\Lambda + \frac{1}{2}N(\Lambda^2 - \Delta^2)$, art. XIV, $E' = \Omega'\, cos.\pi + \Gamma\, sin.\pi \left(\frac{1}{2}H - K \times cos.(\upsilon - \varepsilon) + \frac{1}{2}M\, cos.\psi\sqrt{1+\lambda^2}\, cos.(\omega - \theta) - \frac{1}{2}N\, cos.\psi\sqrt{1+\lambda^2}\, sin.(\omega - \theta)\right)$.

On mettra ici, comme dans l'art. XIX, 1 au lieu de $\cos.\frac{1}{2}\sqrt{1+\lambda^2}$ & $\upsilon-\varepsilon-\theta$ au lieu de ω, c'eſt-à-dire $\upsilon-\varepsilon-2\theta$ au lieu de $\omega-\vartheta$, oubien ſimplement $\upsilon-\varepsilon$, à cauſe que l'angle θ eſt toujours très-petit, & l'on aura:

$$E'=\Omega'\cos.\pi+\Gamma\sin.\pi\left(\tfrac{1}{2}H-\overline{K+\tfrac{1}{2}M}\times\cos.(\upsilon-\varepsilon)-\tfrac{1}{2}N\sin.(\upsilon-\varepsilon)\right).$$

On ſubſtituera donc ces valeurs dans l'équation propoſée (2), & ôtant ce qui ſe détruit en vertu de l'équation (1), on aura, après avoir mis $\frac{3dV^2}{dt^2}$ au lieu de $\frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$ & effacé les termes qui contiennent $\frac{3S}{\rho'^3}$ comme dans l'art. XIX, l'équation

$$-d\pi d\omega-\frac{3(H-2K+M)}{2H}\Gamma\cos.(\upsilon-\varepsilon)dV^2+\frac{3N}{2H}\Gamma\sin.(\upsilon-\varepsilon)dV^2=0\ldots(6).$$

Or $\Gamma=\sin.(\upsilon-\varepsilon)\sin.\pi+\lambda\cos.\pi$ (art. XIII) & $\lambda=i\sin.(\upsilon-\zeta)$, article cité; donc $\Gamma\cos.(\upsilon-\varepsilon)=\frac{1}{2}\sin.(2\upsilon-2\varepsilon)\sin.\pi-\frac{1}{2}i\cos.(2\upsilon-\varepsilon-\zeta)\cos.\pi+\frac{1}{2}i\cos.(\zeta-\varepsilon)\cos.\pi$. De plus $\omega=\upsilon-\varepsilon-\theta$, & $d\omega=d\upsilon-d\varepsilon-d\theta=$ à-très-peu-près, $dV(1+\mu)$, μ étant le rapport de la préceſſion moyenne des points équinoxiaux lunaires au mouvement moyen V; en faiſant ces ſubſtitutions, on remarquera que les termes qui renferment les angles $\zeta-\varepsilon$ deviendront, par l'intégration, beaucoup plus grands que les autres, parce qu'ils auront alors pour diviſeur la quantité très-petite $\mu-p$, p exprimant le rapport du mouvement rétrograde moyen des nœuds de la Lune, à ſon mouvement moyen V; donc n'ayant égard qu'aux termes dont nous parlons, on changera l'équation (6) en celle-ci

$$d\pi=-\frac{3'H-2K+M)i\cos.\pi}{4(1+\mu)H}\sin.(\zeta-\varepsilon)dV+\frac{3Ni\cos.\pi}{4(1+\mu)H}\cos.(\zeta-\varepsilon)$$

$$dV+\frac{3N\sin.\pi}{4(1+\mu)H}dV.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7).$$

D'où l'on tire, en prenant ϖ pour la valeur moyenne de π,

$$\varpi = \varpi + \frac{3(H-2K+M)i\,cof.\varpi}{4(1+\mu)(\mu-p)H}\,cof.(\zeta-\varepsilon) + \frac{3Ni\,cof.\varpi}{4(1+\mu)(\mu-p)H}$$

$$sin.(\zeta-\varepsilon) + \frac{4'(1+\mu)H}{3N\,sin.\varpi}V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Et en supposant que ϖ', ζ', ε' soient les valeurs de ϖ, ζ, ε, lorsque $V=0$, on aura

$$\varpi = \varpi' - \frac{3(H-2K+M)i\,cof.\varpi}{4(1+\mu)(\mu-p)H}\,cof.(\zeta'-\varepsilon') - \frac{3Ni\,cof.\varpi}{4(1+\mu)(\mu-p)H}$$
$$sin.(\zeta'-\varepsilon').$$

XXIV.

Résolution de l'Équation

$$\Pi - \frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}\times\Pi' - \frac{3S}{\rho'^3}\times\Pi'' = 0 \ldots . (3).$$

1.° La valeur de Π est, par l'article IX, (en négligeant les termes multipliés par les constantes très-petites M, N, $\frac{1}{2}H-K$) $\frac{sin.\pi\,d\omega\,d\varepsilon}{dt^2}\times H + \frac{d^2\pi}{dt^2}\times(\frac{1}{2}H+K)$.

2.° La valeur de Π' est, par l'article XIV, (en mettant au lieu de $\Delta sin.\omega - \Lambda cof.\omega, sin.(\upsilon-\varepsilon)$, & au lieu de $\Lambda sin.\omega + \Delta cof.\omega, cof.(\upsilon-\varepsilon)$, comme dans l'article précédent, & négligeant de plus la quantité infiniment petite du second ordre $\lambda sin.\pi$, comme on l'a fait toujours) $\left((K-\frac{1}{2}H)cof.\pi - \frac{1}{2}M\right)\Gamma sin.(\upsilon-\varepsilon) - \frac{1}{2}N\,\Gamma cof.(\upsilon-\varepsilon)$.

3.° On mettra, comme dans l'article précédent au lieu $\Gamma sin.(\upsilon-\varepsilon)$, $\frac{1}{2}sin.\pi + \frac{1}{2}i\,cof.(\zeta-\varepsilon)\,cof.\pi$, au lieu de $\Gamma cof.(\upsilon-\varepsilon)$, $\frac{1}{2}i\,sin.(\zeta-\varepsilon)cof.\pi$, au lieu de $d\omega$, $(1+\mu)dV$, & au lieu de $\frac{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}{3T}$, $\frac{3dV^2}{dt^2}$; on effacera le terme $\frac{3S}{\rho'^3}\times\Pi'$, par les raisons alléguées, article XIX, & divisant toute l'équation (3) par $\frac{sin.\pi\,d\omega}{dt^2}\times H$, on aura

$$d\varepsilon =$$

$$d\varepsilon = -\frac{H+2K}{2H(1+\mu)} \times \frac{d\cdot\pi}{sin.\pi\, dV} + 3\frac{(2K-H)cos.\pi - M}{4(1+\mu)H} dV$$

$$+3\frac{(2K-H)cos.\pi - M}{4(1+\mu)H} \times \frac{cos.\pi}{sin.\pi} \times i\, cos.(\zeta-\varepsilon)\, dV - 3\frac{N\, i\, cos.\pi}{4(1+\mu)H\, sin.\pi}$$

$$sin.(\zeta-\varepsilon)\, dV.$$

Ce qui donne en intégrant, après avoir mis ϖ au lieu de π,

$$\varepsilon = \eta - \frac{H+2K}{2(1+\mu)H} \times \frac{d\varpi}{sin.\varpi\, dV} + 3\frac{(2K-H)cos.\varpi - M}{4(1+\mu)H} V$$

$$+3\frac{(2K-H)cos.\varpi - M}{4(1+\mu)(\mu-p)H} \times \frac{cos.\varpi}{sin.\varpi} \times i\, sin.(\zeta-\varepsilon) + 3\frac{N\, i\, cos.\varpi}{4(1+\mu)(\mu-p)H sin.\varpi}$$

$$cos.(\zeta-\varepsilon). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

η étant $= \varepsilon' - 3\frac{(2K-H)cos.\varpi - M}{3(1+\mu)(\mu-p)H} \times \frac{cos.\varpi}{sin.\varpi}\, i\, sin.(\zeta'-\varepsilon')$

$$-3\frac{4(1+\mu)(\mu-p)H sin.\varpi}{N\, i\, cos.\varpi}\, cos.(\zeta'-\varepsilon').$$

On remarquera que la valeur de $\frac{d\varpi}{dV}$ peut être négligée, parce qu'elle ne contiendra plus le diviſeur $\mu-p$ qui ſe trouve dans les autres termes.

XXV.

Conſéquences qui réſultent des formules précédentes (8), (9), par rapport à la préceſſion des équinoxes & à la nutation de l'axe de la Lune.

Si on fait, ce qui eſt permis, $H-2K+M = h\, cos.g$, & $N = h\, sin.g$; ſavoir $h = \sqrt{(H-2K+M)^2 + N^2}$ & $tang.g = \frac{N}{H-2K+M}$, & qu'on mette 1 au lieu de $cos.\varpi$, on aura, en négligeant μ vis-à-vis de 1,

$$\pi = \varpi + \frac{3hi}{4(\mu-p)H} cos.(\zeta-\varepsilon-g) + \frac{3N\, sin.\varpi}{4H} V$$

$$\varepsilon=\eta-\frac{3(H-2K+M)}{4H}V-\frac{3hi}{4(\mu-p)\sin.\varpi H}\sin.(\zeta-\varepsilon-g).$$

D'où l'on voit 1.° que si N n'eſt pas $=0$, l'inclinaiſon de l'Équateur ſera ſujette à une diminution ou augmentation conſtante ſelon que N ſera poſitive ou négative.

2.° Que la valeur de μ, c'eſt à-dire la préceſſion moyenne des équinoxes ſera $\frac{3(H-2K+M}{4H}$.

3.° Que le pole de l'équateur de la Lune décrira, pendant une révolution des nœuds de l'orbite par rapport aux nœuds de l'Équateur, un petit cercle dont le rayon ſera $\frac{3hi}{4(p-\mu)H}$.

Mais ſi $\mu=p$, c'eſt-à-dire ſi le mouvement des points équinoxiaux de la Lune eſt égal au mouvement des nœuds de l'orbite, comme l'a trouvé M. Caſſini; les formules précédentes ne ſerviront plus, mais il faudra mettre d'abord au lieu de ϖ ſa valeur $\pi'-\frac{3hi}{3(\mu-p)H}\cos.(\zeta'-\varepsilon'-g)$; & au lieu de η ſa valeur $\varepsilon'+\frac{3hi}{4(\mu-p)\sin.\varpi H}\sin.(\zeta'-\varepsilon'-g)$; on mettra enſuite au lieu de ε, $\varepsilon'+\mu V$, & au lieu de ζ, $\zeta'-pV$; après quoi, regardant $(\mu-p)V$ comme une quantité infiniment petite, on aura

$\cos.(\zeta-\varepsilon-g)=\cos.(\zeta'-\varepsilon'-g)-(\mu-p)V\sin.(\zeta'-\varepsilon'-g)$; &

$\sin.(\zeta-\varepsilon-g)=\sin.(\zeta'-\varepsilon'-g)+(\mu-p)V\cos.(\zeta'-\varepsilon'-g)$; &

les valeurs de ε & de π deviendront les ſuivantes

$$\pi=\pi'+\left(\frac{3N\sin.\varpi}{4H}-\frac{3hi}{4H}\sin.(\zeta'-\varepsilon'-g)\right)V.$$

$$\varepsilon=\varepsilon'-\left(\frac{3(H-2K+M)}{4H}+\frac{4hi}{4\sin.\varpi H}\cos.(\zeta'-\varepsilon'-g)\right)V.$$

D'où il s'enſuit que $\mu=\frac{3(H-2K+M)}{4H}+\frac{3hi}{4\sin.\varpi H}$

$cof.(\zeta'-\varepsilon'-g)$; & qu'il n'y aura plus de nutation ſenſible dans l'axe de la Lune.

XXVI.

Remarque. Il eſt bon de remarquer que, ſi on vouloit appliquer à la Terre regardée comme un ſphéroïde quelconque les formules (8) & (9), il faudroit effacer par-tout les lettres M & N; la raiſon de cela eſt que l'angle θ n'étant plus alors très-petit par rapport à υ, il ne ſeroit plus permis de mettre, comme nous l'avons fait, $ſin.(\upsilon-\varepsilon)$; & $cof.(\upsilon-\varepsilon)$ au lieu de $\Delta ſin.\omega-\Lambda cof.\omega$, & de $\Lambda ſin.\omega+\Delta cof.\omega$ dans les expreſſions de E' & de Π' ; mais il faudroit ſubſtituer pour Λ & pour Δ leurs valeurs (art. XIII, (M)) ; cependant comme les termes venant de ces ſubſtitutions ſeroient tous multipliés par $ſin.2\omega$, ou $cof.2\omega$, & que ω ſeroit dans ce cas beaucoup plus grand que V, étant à-très-peu-près dans le rapport de 27 à 15 il eſt clair que ces termes pourroient être négligés entièrement comme devant être, après l'intégration, conſidérablement plus petits que les autres. M. d'Alembert a fait le premier cette importante obſervation, ſans laquelle il eût été comme impoſſible de réſoudre le problême de la préceſſion des équinoxes dans la Terre conſidérée comme une ſphéroïde à méridiens diſſemblables ; mais elle n'a plus lieu à l'égard de la Lune, dans laquelle $\omega =$ à-peu-près V ; & c'eſt ce qui fait que nos réſultats diffèrent un peu de ceux de ce grand Géomètre, comme on va le voir.

XXVIII.

SCHOLIE I. En ſuppoſant la Lune homogène, & de figure elliptique, comme dans l'article XXII, on aura $H=\frac{4cf^5}{15}$, $M=\frac{4cf^5}{15}eB'$, $N=0$, & $K-\frac{1}{2}H=-\frac{4cf^5}{15}(eA'$

$+\frac{1}{2}eB'$), article XII; donc, article XXV, $g=0$;

$L=H-2K+M=\frac{{}^{\circ}c'}{15}(eA'+eB')$, & $\frac{I}{H}=2eA'+2eB'$;

donc, $\pi=\varpi+\frac{3i(eA'+eB')}{2(\mu-p)}\cos.(\zeta-\varepsilon)$,

$\epsilon=\eta-\mu V-\frac{3i'eA'+eB')}{2(\mu-p)\sin.\varpi}\sin.(\zeta-\varepsilon)$, & $\mu=\frac{3e(A'+B')}{2}$.

Où l'on remarquera que $eA'+eB'$ repréſente l'ellipticité du premier méridien, c'eſt à dire l'allongement de la Lune (dans le ſens de la ligne qui joint le centre de la Lune & de la Terre à-très-peu-près), par rapport au demi-axe de la Lune; & que par conſéquent le mouvement de l'axe de cette Planète dépend en ce cas uniquement de la quantité de cet allongement.

Par la théorie de la figure de la Lune, on a, art. XII, $eB'=\frac{15f^3T}{4p^3L}=\frac{36}{10000000}$ (art. XXII), & $eA'=\frac{5}{4}\varphi$; or φ exprime le rapport de la force centrifuge à la peſanteur ſous l'équateur de la Lune; donc ſi on nomme φ' ce même rapport ſous l'équateur de la Terre, f' le rayon de la Terre, t, t' les tems de la rotation de la Lune & de la Terre, on voit facilement qu'on aura

$\varphi:\varphi'=\frac{f}{t^2}\times\frac{T}{f'}:\frac{f'}{t'^2}\times\frac{L}{f'}$; ce qui donne $\varphi=\frac{f^3}{f'^3}\times\frac{T}{L}\times\frac{t'^2}{t^2}\times\varphi'$;

mettant au lieu de φ', $\frac{1}{288}$; au lieu de $\frac{f}{f}$, $\frac{3}{11}$; au lieu de $\frac{T}{L}$, 67; & au lieu de $\frac{t'}{t}$, $\frac{1}{27\frac{1}{3}}$, je trouve $\varphi=\frac{63126}{10000000000}$; d'où $eA=\frac{79}{10000000}$. & par conſéquent $eA'+eB'=\frac{315}{10000000}$; donc $\mu=\frac{47}{10000000}$, & multipliant ce nombre par 360°, on aura en ſecondes 61″ pour la préceſſion moyenne des points équinoxiaux lunaires dans un mois périodique.

Pour avoir la nutation, il faut multiplier μ par $\frac{i}{\mu-p}$, ou bien par $\frac{i}{p}$ ſimplement, à cauſe de μ extrêmement petit.

Or en prenant pour la tangente i de l'inclinaison de l'orbite lunaire, *tang.* 5°, 9′, & pour le rapport p du mouvement moyen des nœuds au mouvement périodique de la Lune $\frac{1^\circ, 26', 43''}{360^\circ}$, je trouve la nutation de l'axe $= 3'$, $39''$; & divisant ce nombre par *sin.* ϖ, (en prenant pour ϖ, 2°, valeur moyenne entre celles de M. Cassini & de M. Mayer) j'ai 1°, 44′, 15″ pour la plus grande équation de la précession.

Selon M. d'Alembert (Voyez le dernier Mémoire de ses Opuscules) la précession moyenne des équinoxes dans l'hypothèse présente est seulement de $\frac{3eA' + \frac{1}{2}eB'}{2}$; & la nutation est aussi diminuée à proportion : c'est ce qui fait que nos résultats ne s'accordent point; mais j'ai donné ci-dessus, art. XVII, la raison de cette différence entre les formules de ce grand Géomètre & les miennes.

XXIX.

Scholie II. Voyons maintenant quelle devroit être la valeur de $eA' + eB'$, pour que la précession moyenne des équinoxes lunaires fût égale au mouvement des nœuds de la Lune, dans ce cas on aura, (art. XXV), $\mu = p = \frac{3(H - 2K + M)}{4H} + \frac{3hi}{4 \sin. \varpi H} \cos.(\zeta' - \epsilon' - g) = \frac{3}{2}(eA' + eB') \times \left(1 + \frac{i}{\sin. \varpi} \cos.(\zeta' - \epsilon')\right)$; donc $eA' + eB' = \frac{2p}{3\left(1 + \frac{i}{\sin. \varpi} \cos.(\zeta' - \epsilon')\right)}$.

Donc si l'on veut, avec M. de Cassini, que le nœud descendant de l'équateur lunaire soit toujours au même point que le nœud ascendant de l'orbite de la Lune, on fera $\epsilon' = \zeta'$, & l'on aura $eA' + eB' = \frac{2p}{3\left(1 + \frac{i}{\sin. \varpi}\right)} = \frac{747}{1000000}$; & dans ce cas, il n'y aura plus de nutation sensible dans l'axe

XXX.

SCHOLIE III. Au reſte, quelle que ſoit la valeur de $eA'+eB'$: pourvû qu'elle ſurpaſſe $\frac{747}{1000000}$, je dis que le mouvement des équinoxes lunaires deviendra toujours, de lui-même égal au mouvement des nœuds de la Lune; car il eſt clair que l'on pourra toujours trouver un angle $\zeta'-\varepsilon'$ tel que l'on ait $eA'+eB'=\frac{2p}{3\left(1+\frac{1}{fin.\varpi}cof.(\zeta'-\varepsilon')\right)}$; donc lorſque les nœuds de l'équateur & de l'orbite, à force de s'éloigner, ſeront parvenus à la diſtance $=\zeta'-\varepsilon'$ entr'eux, le nœud de l'équateur recevra un mouvement égal à celui de l'orbite.

Il eſt vrai que l'inclinaiſon de l'axe ſera ſujette à une augmentation ou diminution conſtante, ſelon que $\varepsilon'>\zeta'$, ou $<\zeta'$, en vertu de laquelle la valeur $fin.\pi$ changera un peu, & l'équation $eA'+eB'=\frac{2p}{3\left(1+\frac{1}{fin.\varpi}cof.(\zeta'-\varepsilon')\right)}$ ceſſera d'être vraie; mais elle ſe rétablira enſuite par la variation de la diſtance $\zeta'-\varepsilon'$. Peut-être pourroit-on démontrer, par ce raiſonnement, que les nœuds de l'équateur lunaire devront enfin coincider pour toujours avec ceux de l'orbite.

XXXI.

SCHOLIE IV. Un moyen de déterminer ſi le mouvement des nœuds de l'équateur lunaire eſt exactement égal à celui des nœuds de l'orbite, ce ſeroit d'obſerver pendant une longue ſuite de révolutions de la Lune, la quantité de ſa plus grande libration en latitude. Car il eſt clair que cette libration peut être repréſentée ſans erreur ſenſible par l'angle que nous avons nommé ψ, (article XVI), à cauſe que l'inclinaiſon de l'équateur à

l'écliptique eſt extrêmement petite; or $\sin.\downarrow = \frac{r}{\sqrt{(1+\lambda^2)}}$, art. cité, $= \frac{\sin.(v-\varepsilon)\sin.\pi+\lambda\cos.\pi}{\sqrt{(1+\lambda^2)}}$, art. XIII, $=$ (en mettant pour λ ſa valeur $i\sin.(v-\zeta)$) $\frac{\sin.(v-\varepsilon)\sin.\pi+i\sin.(v-\zeta)\cos.\pi}{\sqrt{1+i^2\sin.(v-\zeta)^2}}$. Donc ſi $\zeta=\varepsilon$, on aura $\sin.\downarrow = \frac{\sin.(v-\zeta)}{\sqrt{(1+i^2\sin.(v-\zeta)^2)}} \times (\sin.\pi+i\cos.\pi)$, & comme $v=long.\mathbb{C}+180$ (art. XIII), & $\zeta=long.\Omega$, lorſque la Lune ſera dans ſes plus grandes latitudes boréales, on aura $v-180-\zeta=90$, ſavoir $v-\zeta=270$, & $\sin.(v-\zeta)=-1$; on trouvera de même $\sin.(v-\zeta)=1$ pour les plus grandes latitudes méridionales; donc la libration totale en latitude ſera $2\frac{\sin.\pi+i\cos.\pi}{\sqrt{1+i^2}}$, ce qui va à $\frac{1}{4}$ environ du rayon de la Lune. Soit maintenant $\varepsilon >$, ou $< \zeta$, il eſt évident qu'après quelques révolutions de la Lnne, on devra avoir $\varepsilon = \zeta + 180°$; & alors $\sin.\downarrow$ ſera $= \frac{\sin.(v-\zeta)}{\sqrt{(1+i\sin.(v-\zeta)^2)}} \times (-\sin.\pi+i\cos.\pi)$; & la libration totale $= 2\frac{-\sin.\pi+i\cos.\pi}{\sqrt{(1+i^2)}} = \frac{1}{9}$ ſeulement du rayon de la Lune.

XXXII.

SCHOLIE V. Je finirai ces recherches par expoſer une méthode par laquelle, ayant trois obſervations d'une même tache de la Lune, on pourra connoître la poſition de l'équateur de cette Planète par rapport à l'écliptique. Soit (comme dans l'article XIII), $v-180°$ la longitude du centre de la Lune, & λ ſa latitude ſuppoſée auſtrale; $U-180°$ la longitude de la tache, & $\lambda-b$ la tangente de ſa latitude, dans une obſervation quelconque; il eſt

facile de voir, en conservant les suppositions & les noms de l'article II, que l'on aura

$\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=\frac{x}{\rho}=cos.v$; $\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=\frac{y}{\rho}=sin.v$; $\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=\frac{z}{\rho}=\lambda$;

& de même

$\frac{y-Y}{\sqrt{(x-X)^2+y-Y)^2}}=sin.U$; $\frac{z-Z}{\sqrt{(x-X)^2+y-Y)^2}}=\lambda-l$; or

$\sqrt{x-X)^2+y-Y)^2}=$ à-très-peu-près $x^2+y^2-2xX-2yY=\rho^2-2xX-2yY$; donc en négligeant les quarrés, & les puissances plus hautes de X, Y, aussi bien que leurs produits, on aura $\frac{y-Y}{\sqrt{(x-X)^2+y-Y)^2}}=\frac{y}{\rho}-\frac{Y}{\rho}+\frac{xyX}{\rho^3}+\frac{y^2Y}{\rho^3}=$ (en mettant $sin.v$ & $cos.v$ au lieu de $\frac{y}{\rho}$, $\frac{x}{\rho}$), $sin.v+cos.v\frac{Xsin.v-Ycos.v}{\rho}$; par conséquent si on fait $sin.U=sin.v-S$, on aura l'équation

$$(1)\ldots\ldots\frac{\rho S}{cos.v}=Ycos.v-Xsin.v.$$

On trouvera de la même manière $\frac{z-Z}{\sqrt{(x-X)^2+y-Y)^2}}=\frac{z}{\rho}-\frac{Z}{\rho}+\frac{zxX}{\rho^3}+\frac{zyY}{\rho^3}=\lambda-\frac{Z}{\rho}+\frac{\lambda}{\rho}\times(Xcos.v+Ysin.v)=$, (hypot:) $\lambda-l$; ce qui donnera

$$(2)\ldots\ldots\frac{Z-\rho l}{\lambda}=Xcos.v+Ysin.v.$$

Il faut tirer de ces deux équations les valeurs de X, Y, Z; & pour cela on remarquera que, r étant le rayon de la Lune, on aura $X^2+Y^2+Z^2=r^2$; & que $\overline{Ycos.v-Xsin.v}^2+\overline{Xcos.v+Ysin.v}^2=X^2+Y^2=r^2-Z^2$; on aura donc

$r^2-Z^2=$

$r^2 - Z^2 = \frac{(Z-\rho l)^2}{\lambda^2} + \frac{\rho^2 S^2}{cos.v^2}$, d'où l'on tire, en faisant pour abréger $h = \sqrt{\left(\overline{1+\lambda^2} \times r^2 - \frac{\rho^2 S^2}{cos.v^2} - \rho^2 l^2\right)}$, $Z = \frac{\rho l + h\lambda}{+\lambda^2}$;

Ayant la valeur de Z, on trouvera aussitôt celle de X, & de Y, par les équations (1), (2) car

$X = \frac{Z-\rho l}{\mu} cos.v - \rho S\, tang.v$; $Y = \frac{Z-\rho l}{\lambda} sin.v + \rho S$.

On fera le même calcul pour chacune des deux autres observations, & l'on appellera X', Y', Z'; X'', Y'', Z'', les valeurs correspondantes de X, Y, Z.

Maintenant on a (article VI, (D)) $Z = r\, sin.p$, $Y = r\, cos.p\, sin.q$, $X = r\, cos.p\, cos.q$; de plus en combinant les deux premières formules (C), $sin.P = sin.p\, cos.\pi + cos.p\, sin.q' sin.\pi$, = (en mettant au lieu de q', $q - \varepsilon$) $sin.p\, cos.\pi + cos.p\, sin.q\, cos.\varepsilon sin.\pi - cos.p\, cos.q\, sin.\varepsilon sin.\pi$; donc substituant pour $sin.p$, $cos.p\, sin.q$, $cos.p\, cos.q$, leurs valeurs $\frac{Z}{r}$, $\frac{Y}{r}$, $\frac{X}{r}$, on aura

(3) . . . . . $r\, sin.P = Z cos.\pi + Y cos.\varepsilon sin.\pi - X sin.\varepsilon sin.\pi$.

Et de même pour les deux autres observations.

(4) . . . . . $r\, sin.P = Z' cos.\pi + Y' cos.\varepsilon sin.\pi - X' sin.\varepsilon sin.\pi$.

(5) . . . . . $r\, sin.P = Z'' cos.\pi + Y'' cos.\varepsilon sin.\pi - X'' sin.\varepsilon sin.\pi$

en supposant que la position de l'équateur demeure la même.

Retranchant l'équation (4) de l'équation (3), & l'équation (5) de l'équation (4) on aura deux nouvelles équations

6). $(Z - Z') cos.\pi + (Y - Y') cos.\varepsilon sin.\pi - (X - X') sin\, \varepsilon sin.\pi = 0$

$$(7).(Z'-Z'')\cos.\pi+(Y'-Y'')\cos.\varepsilon\sin.\pi-(X'-X'')\sin.\varepsilon\sin.\pi=0$$

d'où l'on tire $\frac{(X-X')\sin.\varepsilon-(Y-Y')\cos.\varepsilon}{Z-Z'}=\frac{\cos.\pi}{\sin.\pi}=$
$\frac{(X'-X'')\sin.\varepsilon-(Y'-Y'')\cos.\varepsilon}{Z'-Z''}$; & par conséquent

$$\tang.\varepsilon=\left(\frac{Y-Y'}{Z-Z'}-\frac{Y'-Y''}{Z'-Z''}\right):\left(\frac{X-X'}{Z-Z'}-\frac{X'-X''}{Z'-Z''}\right);$$

Connoissant ε, on trouvera π par la formule

$$\tang.\pi=\frac{Z-Z'}{(X-X')\sin.\varepsilon-(Y-Y')\cos.\varepsilon}.$$

FIN.

DE L'ARRIMAGE
DES VAISSEAUX.

MÉMOIRE pour concourir au prix proposé par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de Paris pour l'année 1765.

Par M. GROIGNARD, *Constructeur en chef des vaisseaux du Roi & de la Compagnie des Indes, au Port de l'Orient.*

MÉMOIRE
SUR L'ARRIMAGE
DES VAISSEAUX.

Qui dubiis auſus committere flatibus alnum,
Quas natura negat præbuit arte vias.

POUR me conformer aux vues de l'Académie, & diſcuter avec ordre le ſujet qu'elle propoſe, je diviſerai ce Mémoire en trois Chapitres.

Le premier traitera des méthodes uſitées dans les Ports, pour leſter ou arrimer les vaiſſeaux de toutes ſortes de grandeur, & de différentes eſpèces.

Le ſecond, des poids & de la diſtribution des matières qu'on employe, & de l'effet qu'elles produiſent ſur le

ſillage, ſur les lignes d'eau, ſur les propriétés de bien gouverner, de bien porter la voile, d'être doux à la mer, & ſur les autres qualités d'un vaiſſeau.

Le troiſième, des inconvéniens de ces méthodes & des remedes qu'on pourroit y apporter.

L'objet de ce Mémoire étant des plus intéreſſans, & devant être à la portée de tous les Marins, j'eſſayerai de le traiter de la façon la plus ſimple, & la plus praticable, & de le rendre auſſi utile à la Marine du Roi, qu'à celle de la Compagnie des Indes & des Marchands.

CHAPITRE I.

Des méthodes uſitées dans les Ports pour arrimer & leſter les vaiſſeaux de toutes ſortes de grandeurs, & de différentes eſpèces.

ARRIMER un vaiſſeau, c'eſt le charger, ou placer dans ſa calle, dans ſes ſoutes, entre-ponts & gaillards les différentes matières ou effets qu'exigent ſon eſpèce & ſa deſtination.

Comme ces effets peuvent être plus ou moins peſans relativement à la capacité ou au déplacement d'eau du vaiſſeau, & plus ou moins avantageuſement placés relativement à ſa ſtabilité, on ſe ſert de leſt, ou de matières plus ou moins peſantes, comme la pierre, le fer ou le plomb, pour augmenter le déplacement ou la ſtablilité, & c'eſt ce qu'on appelle leſter un vaiſſeau.

L'arrimage & leſtage des vaiſſeaux doit donc varier ſuivant leurs eſpèces & leurs deſtinations. On ne finiroit pas ſi on vouloit entreprendre de détailler toutes les eſpèces de vaiſſeaux & les différens arrimages qu'exigeroient leurs différens armemens.

Je me bornerai à parler des eſpèces de vaiſſeaux les plus connues, les plus en uſage, & les plus néceſſaires au ſervice du Roi, de la Compagnie des Indes & des Marchands, & je donnerai pour ces eſpèces de vaiſſeaux des principes applicables à toutes les autres.

De l'arrimage des vaiſſeaux de Roi.

JE prends pour exemple un vaiſſeau de ſoixante-quatorze canons.

La Calle.

L'arrimage des vaiſſeaux de Roi eſt le plus connu, & celui qui peut le moins varier, parce que chaque choſe y eſt toujours la même, & à ſa même place diſtincte.

Dans la partie la plus baſſe du vaiſſeau que l'on appelle la calle, ſont à-peu-près ſur le même plan, & ſucceſſivement à commencer par l'arrière ou l'étambot juſques en avant ou l'étrave.

1.° Les coffres & la ſoute aux poudres; cette ſoute occupe à-peu-près une eſpace de 5 à 6 pieds de hauteur & de 41 pieds de longueur à prendre du dehors de l'étambot: elle doit contenir en barils & en gargouſſes la quantité de poudres néceſſaires pour fournir au moins ſoixante coups pour chaque canon; cette ſoute eſt terminée par deux cloiſons à un pied de diſtance l'une de l'autre; & cet intervalle entre les deux cloiſons eſt ordinairement rempli de ſable ou de terre pour préſerver les poudres du feu ou de l'humidité voiſine.

2.° Sur l'avant & joignant la ſoute aux poudres, eſt la cave du Capitaine de 8 à 9 pieds de hauteur & 5 à 6 pieds de longueur: cette cave doit contenir la quantité de vin néceſſaire à la table du Capitaine pour 6 à 7 mois de campagne; elle eſt terminée par une ſimple cloiſon qui prend tout le travers ou la largeur du Vaiſſeau.

3.° La calle au vin & proviſions de l'équipage de 8 à 9 pieds de hauteur, & 24 à 26 pieds de longueur. Cette calle ou cave doit contenir le vin & partie des proviſions de l'équipage pour 6 à 7 mois de campagne, elle eſt terminée par une cloiſon joignant l'archipompe, & ſur l'avant, & à-peu-près de la grandeur de l'archipompe eſt le parquet ou coffre aux boulets. Ce coffre monte juſques à la hauteur du faux-pont eſt diviſé par caſes, & doit

contenir tous les boulets de différens calibres, à l'exception de ceux que l'on met dans de petits parquets entre les batteries, pour les avoir ſous la main. On embarque la quantité de boulets pour au moins ſoixante coups par canon.

4.° La calle à eau de 8 à 9 pieds de hauteur & de 48 à 50 pieds de longueur; elle doit contenir en piéces de quatre, de trois, de deux, & d'une barrique, la quantité d'eau pour deux mois & demi ou trois mois au plus, à raiſon d'une barrique par jour pour cent hommes. Il ne ſeroit pas poſſible d'en prendre davantage ſans trop charger le vaiſſeau, & l'on renouvelle cette eau dans les relaches. Cette calle à eau eſt terminée pour une ſimple cloiſon en travers du vaiſſeau

5.° La foſſe aux cables de 8 à 9 pieds de hauteur & de 22 à 24 pieds de longueur; elle doit contenir tous les cables, grelins; auſſières &c. néceſſaires à l'armement & au rechange du vaiſſeau.

6.° En avant de la cloiſon de la foſſe aux cables, & vis-à-vis du mât de mizaine, ſont deux petits coffres à poudre qui ſe terminent ſur l'extrémité, ou ſur l'avant du vaiſſeau, l'on y met dans un combat des gargouſſes pour accélérer le ſervice des canons de l'avant.

Le leſt ſe place dans la calle au-deſſous des piéces à eau, à vin & des cables.

Le Faux-pont.

Au deſſus & à la longueur des ſoutes à poudre, eſt un plancher ou platte-forme ſur laquelle ſont établis le rechange du maître Canonnier de 5 à 6 pieds de longueur, & cinq ſoutes à pain, dont une en travers du vaiſſeau ſur l'arrière, & deux de chaque côté ſéparées par un courroir ſuivant la longueur du vaiſſeau, pour communiquer de l'une à l'autre, & pouvoir deſcendre dans la ſoute aux

poudres au moyen de deux écoutilles pratiquées sur ce plancher, l'une en avant, & l'autre en arrière de l'archipompe d'artimon. Ces soutes à pain contiennent la quantité de biscuit nécessaire à l'équipage.

Au dessus & à la longueur de la cave du Capitaine & de la cave au vin de l'équipage, est un plancher sur lequel sont établies plusieurs soutes à grain & à légumes, séparées par un grand courroir au milieu, pour pouvoir au moyen de deux écoutilles descendre dans la cave du Capitaine & dans la cave au vin.

C'est sur ce plancher que l'on appelle la platte-forme du maître-valet que se fait la distribution journalière des vivres, & c'est dans ces soutes divisées en plusieurs compartimens que sont placées les provisions, légumes & grains du Capitaine & du Commis.

Au-dessus & à la longueur de la calle à eau, est un plancher volant, ou couvert de planches levatis, sur lequel on établit les soutes du Chirurgien, du Pilote, du Charpentier, le théatre des malades ou blessés dans un combat, & la soute à voile de 5 à 6 pieds de longueur tout en travers du vaisseau & joignant la cloison de la fosse aux cables.

Au dessus & à la longueur de la fosse aux cables & coffres à poudres de l'avant, sont la plate-forme du cable daffourche, la fosse à Léon, & quelques soutes pour les rechanges des maîtres d'équipage, calfats &c. & pour des grains.

Tous ces différens planchers joints ensemble, & prolongés depuis l'avant jusqu'à l'arrière du vaisseau, à l'exception du plancher des soutes à pain qui est deux à trois pieds plus bas que tous les autres, forment ce qu'on appelle le *faux-pont*. Tout autour de ce faux-pont à trois pieds de distance du bord, régne un espace vide ou galleries pour voir dans un combat les boulets qui pourroient percer le vaisseau à fleur d'eau, & boucher les trous des boulets avec des tapons de calibre.

Le

Le premier Pont.

A cinq pieds & demi de hauteur, au-deſſus du faux-pont, ſous poutre ou ſous beaux, eſt un autre plancher, prolongé depuis l'arrière juſqu'à l'avant du vaiſſeau, que l'on appelle le premier-pont.

Sur ce premier pont, à commencer par l'arrière, eſt la ſainte-barbe de 24 à 25 pieds de longueur, terminée par une cloiſon que l'on peut démonter dans un combat.

Dans la ſainte-barbe ſont établies de chaque côté les chambres, de l'Écrivain & du maître Canonnier, & les lits du Chirurgien, de l'Aumonier, &c.

Depuis la cloiſon de la ſainte-barbe, juſqu'en avant du vaiſſeau, ſont établis le cabeſtan, le four, le parc à moutons, les bittes, la gatte ou compartiment pour recevoir les eaux qui entrent par les écubiers, & tous les lits ou hamacs des matelots ſuſpendus au-deſſous des beaux ou poutres du ſecond-pont.

Ce premier pont eſt percé de pluſieurs trous, écoutilles ou panneaux, de grandeur convenable pour pouvoir deſcendre ſur les différens planchers, ou compartimens du faux-pont, & y embarquer les piéces de quatre ou autres effets qui doivent être placés dans ces compartimens ou dans la calle.

C'eſt ce premier pont qui porte le poids immenſe de la première batterie de 28 canons de 36, montés ſur leurs affuts avec palants & uſtenſilles néceſſaires.

Le ſecond Pont.

Sur le ſecond pont, à commencer par l'arrière, eſt la grande-chambre ou ſalle à manger de 20 à 22 pieds de longueur, terminée par une cloiſon qui peut ſe démonter dans un combat; dans la grande chambre joignant cette

cloiſon & de chaque côté du vaiſſeau, ſont pratiquées quatre ou ſix chambres en toile, qui peuvent auſſi ſe démonter.

En avant de cette grande chambre, eſt le poſte des Gardes de la Marine, l'office, la boucherie, & ſur le même pont, ſous le gaillard d'avant, ſont les cuiſines, les potagers, & un petit four pour la table du Capitaine.

C'eſt le ſecond Pont qui porte le poids de la ſeconde batterie de 30 canons de 18 liv. de la Chaloupe, Canots, & mâts d'hune de rechange, que l'on place ordinairement entre les deux gaillards.

La hauteur du premier au ſecond pont, ou de l'*entrepont* pour un vaiſſeau de 74 canons, eſt de 5 pieds 8 à 10 pouces ſous beau ou ſous poutre au milieu.

Les Gaillards.

A cinq pieds 6 à 8 pouces au-deſſus du ſecond pont ſous poutre eſt ſur l'arrière du vaiſſeau un plancher de 80. à 85 pieds de longueur qu'on appelle le *gaillard d'arrière* qui eſt prolongé juſques ſur l'avant du grand mât, & ſur l'avant du vaiſſeau eſt un autre plancher à-peu-près de même hauteur de 40 à 42 pieds de longueur qu'on nomme le *gaillard d'avant.*

Sur le gaillard d'arrière ſont établies la chambre de Conſeil ou de parade de 18 pieds de longueur, & en avant de cette chambre de Conſeil, & de chaque côté du vaiſſeau, ſix chambres pour le Capitaine, & les cinq premiers Officiers: entre ces chambres & ſur l'arrière du mât d'artimon, eſt la roue du gouvernail, & l'habitacle où ſont les bouſſolles ou compas de route.

En avant du mât d'artimon, ſur le Gaillard d'arrière, ſont au milieu les cages à poules & à dindes, & ſur les côtés 10 canons de 8 l.

Sur le gaillard d'avant ſont le petit cabeſtan, les boſſoirs qui ſupportent les ancres & ſix canons de 8 liv.

La Dunette.

A cinq pieds huit pouces ou ſix pieds au-deſſus du gaillard d'arrière ſous poutre ou ſous barrot, eſt un plancher de 35 pieds de longueur prolongé juſques en avant du mât d'artimont, ſur lequel ſont établies ſur l'arrière & de chaque côté, quatre cabanes de 4 pieds de hauteur & 6 pieds de longueur, chacune, pour le logement des Maîtres & Pilotes; en avant de ces cabanes, ſont des cages à poules.

C'eſt ſur cette Dunette, qui eſt l'endroit le plus élevé du vaiſſeau qu'on établit la mouſqueterie dans un combat.

Le détail que je viens de faire des emménagemens ou diſtributions des différentes parties de la calle, du faux-pont, entre-pont, &c. d'un vaiſſeau de guerre de 74 canons, peut convenir également aux vaiſſeaux du Roi de tous les rangs, en imaginant ces diſtributions relatives à la différente grandeur des vaiſſeaux, & même des frégates qui n'ont qu'un pont, une batterie, & une Dunete de moins que les vaiſſeaux, & qui d'ailleurs ſont également emménagées, à peu de choſe près.

On trouvera dans les différens Traités de conſtruction, Dictionnaires de Marine, & ſur-tout dans le Traité de M. Duhamel, des plans & coupes de différents vaiſſeaux de guerre, frégates & flutes qui repréſentent les emménagemens & diſtributions de ces bâtimens, que j'ai cru inutile de retracer ici.

D'après ce que je viens de dire des emménagemens & des diſtributions des différentes parties d'un vaiſſeau de guerre &c. l'arrimage des vaiſſeaux & frégates du Roi doit paroître d'autant plus aiſé, que chaque choſe a ſa place diſtincte, & que chaque place eſt plus grande à proportion, que ce quelle doit contenir.

Cela ſeroit exactement vrai s'il n'étoit queſtion pour

faire un bon arrimage, que de placer ce que le vaiſſeau doit porter; cette condition n'eſt pas la plus difficile à remplir: il faut qu'un vaiſſeau de guerre tout chargé ou arrimé, ait de la batterie, porte bien la voile, marche bien, gouverne bien, ait les mouvemens doux, & tout cela dépend beaucoup de la quantité, de l'eſpèce & de la poſition de ſon leſt, qui eſt la ſeule choſe qui paroiſſe indéterminée & la plus néceſſaire à l'arrimage d'un vaiſſeau de guerre; elle demande les plus ſérieuſes combinaiſons, puiſque c'eſt de là que dépendent toutes ſes bonnes qualités. C'eſt ce qui ſera le ſujet du ſecond Chapitre: je me bornerai à dire dans celui-ci que la bonne façon d'arrimer un vaiſſeau de guerre, eſt de lui donner la quantité & l'eſpèce de leſt proportionnée à ſa capacité ou déplacement, & à ſa ſtabilité, & de diſtribuer ce leſt de façon que chaque choſe à embarquer miſe à la place que j'ai ci-deſſus déſignée, le vaiſſeau ou la frégate ſoit au tirant d'eau, ait la hauteur de la batterie propoſée & toutes les autres qualités que l'on peut en attendre.

Comme il eſt très-difficile de rencontrer au juſte ce tirant d'eau, ou l'aſſiette du vaiſſeau, ſur-tout à ceux qui n'ont pas encore navigué, on conſerve une certaine quantité de leſt portatif que l'on place après l'arrimage ſur l'avant ou ſur l'arrière du vaiſſeau dans des endroits que l'on ménage exprès dans la calle, afin de pouvoir, au moyen de ce nouveau leſt, corriger la différence du tirant d'eau. On peut auſſi faire déplacer quelques futailles dans la calle à eau qui n'eſt jamais pleine, ſi ce leſt portatif ne ſuffit pas pour mettre le vaiſſeau en aſſiette.

De l'arrimage des vaiſſeaux de la Compagnie des Indes.

La Compagnie des Indes à trois eſpèces de vaiſſeaux relatifs à ſes objets de commerce.

Les vaisseaux pour l'Isle de France, Pondichery, &c. peuvent être du port de 1200 tonneaux, sans comprendre le poids de leur cocque, & de la force des vaisseaux du Roi de 64 Canons.

Les vaisseaux pour la Chine sont de 900 tonneaux, & à-peu-près de la grandeur & de la force des vaisseaux de 50 canons.

Ceux pour Bengale ou pour la côte, sont de 600 tonneaux, & à-peu-près de la grandeur, & de la force d'une frégate de 26 canons; l'objet des vaisseaux de la Compagnie étant de porter & rapporter des provisions & autres munitions & marchandises relatives à son commerce, le chargement de ces vaisseaux varie suivant les besoins & les denrées des colonies; soit en partant de l'Orient, soit en revenant des différens lieux d'ou ils rapportent des marchandises différentes.

Ces trois espèces de vaisseaux sont différemment emménagés que ceux du Roi, seulement dans leur calle & dans leur entrepont.

Il n'y a dans leur calle sur l'arrière, qu'une petite soute à poudre & au-dessus des soutes à pain; & sur l'avant qu'une calle à eau. Ces soutes & cette calle à eau, qui n'occupent, pour ainsi dire, que la partie irrégulière des façons de l'arrière & de l'avant du vaisseau, n'ont que la longueur strictement nécessaire pour contenir la poudre, le biscuit, & l'eau pour trois mois à un équipage bien moins nombreux qu'aux vaisseaux du Roi: ces vaisseaux portent ordinairement des vivres pour 18 mois que dure leur campagne.

On a jugé à propos de placer la calle à eau sur l'avant de ces vaisseaux, parce que cette partie étant plus exposée aux égouts, aux voyes d'eau, & à l'humidité, & d'une figure très-irrégulière, est moins propre à l'arrimage & à la conservation des marchandises légères & précieuses, & que la calle à eau placée comme dans les vaisseaux de

guerre, au milieu de la longueur de la calle & de ces mêmes marchandiſes, leur communiqueroit de l'humidité, &c.

Ces raiſons ont prévalu ſur les inconvéniens qui réſultent de la poſition de la calle à eau ſur l'étrave ou ſur l'avant du vaiſſeau. Le poids immenſe de cette eau tend à faire plonger & à délier cette partie, & rend les mouvemens de tangage fort durs : on eſt en même-temps obligé de mettre beaucoup de leſt de fer, ou les effets les plus lourds, ſur la partie de l'arrière du vaiſſeau, pour balancer le poids de la calle à eau ſur l'avant, qui joint à celui des cambuſes, des ancres, mât de mizaine, du beaupré, &c. ne peut que contribuer à faire promptement arquer, & délier ces vaiſſeaux.

L'eſpace immenſe de la calle, compris entre la cloiſon des ſoutes à pain, & celle de la calle à eau, eſt ordinairement occupé par cent ou cent cinquante tonneaux de leſt de fer & de pierres, ou fer de cargaiſon. Sur ce leſt de fer & de pierre, ſont établis deux ou trois plans de futailles ou piéces de deux remplies de différens vins & eau-de-vie, & tous ces plans ſont prolongés ordinairement depuis la cloiſon de la calle à eau, juſqu'à la diſtance de 8 à 12 pieds de la cloiſon des ſoutes à pain & à poudre ; l'on met dans ce vide de 8 à 12 pieds, du charbon de terre, & au-deſſus du charbon de terre, juſqu'à la hauteur du pont, de la poudre en barrils pour les colonies, que l'on maſque avec des piéces de toile à voile.

Au-deſſus de ces plans de vin & eau-de-vie, on met d'abord joignant la cloiſon de la calle à eau, en venant ſur l'arrière, des barrils de brays, goudron, cordages, caiſſes d'armes, d'habillemens de troupes, toiles & autres effets relatifs aux beſoins & commerce des colonies, & l'on finit de remplir & de bonder la calle avec des farines ou autres effets les plus légers.

Il n'y ā point de faux-pont dans les vaiſſeaux de la Compagnie, mais ſeulement quelques barrots ou poutres dans la calle environ à cinq pieds au-deſſous du premier pont, ſur leſquels on place quelquefois des mâts bruts pour ſervir au vaiſſeaux dans les colonies, & pour pouvoir faire entrer & ſortir ces mâts, on pratique, à-peu-près à la hauteur de ces barrots, dans l'arcaſſe ou ſur l'arrière du vaiſſeau, un ſabord de charge & un courroir entre les ſoutes à pain, du côté où eſt placé ce ſabord.

Sur le premier pont des vaiſſeaux de la Compagnie, eſt, comme aux vaiſſeaux du Roi, la ſainte-barbe avec les chambres de l'Écrivain, du maître Canonnier, les lits du Chirurgien, de l'Aumonier, &c. Mais comme la calle de ces vaiſſeaux n'eſt preſque occupée que des effets de cargaiſon, on eſt obligé de ſe ſervir de ce premier pont pour mettre les vivres qui ne peuvent être placés dans la calle; ainſi en avant de la ſainte-barbe, ſont pratiquées au milieu du vaiſſeau, des ſoutes à grain & à légumes. Il y a auſſi un parc à moutons, à double étage pour de plus longues campagnes, & tout en avant du vaiſſeau, & au deſſus de la calle à eau, ſont des cambuſes ou ſoutes pour les proviſions du Capitaine, du Commis pour la diſtribution journalière des vivres, les ſoutes des Maîtres Charpentiers, Calfats, Maîtres-d'équipage, le poſte du Chirurgien, des malades, &c ſont auſſi ſur ce premier pont.

Le reſte de ce premier pont eſt ordinairement rempli de barrils de farine, des coffres & hardes des équipages, des voiles, des cables, cordages, &c. parce qu'il n'y a point de canons ou de première batterie, quand ces vaiſſeaux ne ſont point armés en guerre.

Le ſecond pont, gaillards & dunettes de ces vaiſſeaux ſont à-peu près emménagés comme les vaiſſeaux du Roi, à cela près, que tout eſt, à proportion, plus reſſerré, plus multiplié, & relatif aux plus longues campagnes, & que le cabeſtan & les écubiers ſont établis ſur le ſecond pont.

On voit par ce que je viens de dire de l'arrimage des vaiſſeaux de la Compagnie, que ces trois eſpèces de bâtimens, en partant de l'Orient, doivent toujours être très-chargés & ſubmergés, parce que les effets qui compoſent leur arrimage ſont très-lourds, & rempliſſent toujours tout l'eſpace de leur calle & de leur entrepont, eſpace que l'on rend d'autant plus conſidérable, qu'il ne doit contenir, au retour des mêmes vaiſſeaux, que des marchandiſes légeres, & d'un grand volume, comme le thé, le caffé, le poivre, le coton, &c.

La conſtruction des vaiſſeaux de la Compagnie, demande donc plus de combinaiſon, que celle des vaiſſeaux de guerre, puiſqu'ils doivent être faits de façon, à pouvoir être chargés de marchandiſes lourdes pour l'approviſionnement des colonies, & à rapporter beaucoup de marchandiſes légères pour augmenter les profits & dédommager la Compagnie de leur armement; l'arrimage de ces vaiſſeaux demande auſſi plus de combinaiſon dans ces différens cas.

Pour bien arrimer un vaiſſeau de la Compagnie partant de l'Orient, chargé de marchandiſes ou effets très lourds, il faut combiner les différentes parties qui doivent compoſer ſon chargement, éloigner des extrémités du vaiſſeau les effets les plus lourds qui n'ont point de place decidée, les placer le plus bas qu'il eſt poſſible, pour baiſſer le centre de gravité, & diminuer d'autant la quantité de leſt qu'on eſt obligé de donner à ce vaiſſeau pour lui faire porter la voile, & le mettre en aſſiette ou en différence; parce que ce leſt eſt un poids inutile qui ne ſert qu'à augmenter le déplacement d'eau du vaiſſeau, la réſiſtance du fluide, & à tenir la place d'autres effets beaucoup plus néceſſaires que l'on pourroit porter.

On peut auſſi diminuer la quantité & le volume du leſt, en augmentant ſa peſanteur ſpécifique, & pour de pareils vaiſſeaux, le leſt de fer & de plomb doit être préféré au leſt de pierre.

Pour

Pour bien arrimer ce même vaisseau venant de la Chine, où les marchandises occupent à proportion beaucoup plus de place qu'elles ne pèsent, on ne sçauroit avoir trop d'attention à ne point perdre de terrein; pour cet effet les Chinois font des caisses de thé de différentes grandeurs & figures relatives à la courbure des côtés du vaisseau; & après avoir mis dans le fond la quantité de lest de fer, de pierre, & de caisses de porcelaine nécessaires pour suppléer au défaut de la pésanteur du thé, & pour faire un grenier ou une plate forme assez élevée pour empêcher que l'eau ou l'humidité ne se communique au thé, on remplit exactement de plusieurs rangs de caisses de thé, de hauteur & figures convenables toute la calle du vaisseau, depuis la cloison des soutes à pain & à poudre, jusqu'à la cloison de la calle à eau, que l'on diminue le plus qu'il est possible.

On a attention, avant d'arrimer le thé, de faire calfater la cloison de la calle à eau, de la tapisser de nates, ainsi que les côtés du vaisseau, & l'on prend toutes les précautions nécessaires pour empêcher les égoûts & l'humidité.

On remplit aussi de caisses de thé la partie de l'entrepont comprise entre la sainte-barbe, & les environs de l'archipompe.

On arrime à peu-près de la même façon les vaisseaux de la Compagnie chargés de café, & autres marchandises légères; c'est-à-dire, que pour bien arrimer ces vaisseaux il faut proportionner la quantité & l'espèce du lest à la pesanteur spécifique des matières qui composent leur chargement, & à la stabilité qui leur est nécessaire, & distribuer ce lest relativement à l'assiette de ces vaisseaux.

De l'Arrimage des Vaiſſeaux marchands.

LES vaiſſeaux marchands ſont à peu-près emménagés comme les vaiſſeaux de la Compagnie.

L'arrimage ou le chargement des vaiſſeaux marchands eſt relatif à l'objet de leur deſtination, & de leur commerce.

On porte chez l'étranger les denrées du pays, & l'on rapporte celles de l'étranger : Il eſt de l'intérêt des Armateurs de porter & de rapporter le plus qu'il eſt poſſible, pour diminuer les frais de tranſport ; l'on ne peut rien ajouter à l'expérience & à l'attention qu'ont les Arrimeurs des différens ports marchands pour tirer parti de l'eſpace de la calle & de l'entrepont des vaiſſeaux faits, pour ainſi dire, pour l'objet du commerce de chaque pays : Ceux deſtinés pour porter des effets de grandeur connue, ont une longueur & hauteur de calle & entrepont proportionnées, pour loger, comme dans un coffre, une certaine quantité de rangs les uns ſur les autres ; par exemple, de barriques de ſucre, de jarres d'huile, de balles de caffé, &c.

En général, tous ces arrimages n'ont rien de recherché, puiſqu'il n'eſt queſtion que d'entaſſer piéces ſur piéces, avec le plus de préciſion & d'attention ; ſur tout lorſque ces pieces ne ſont pas ſuſceptibles de preſſion, comme le ſont les balles de laine, de coton, &c.

L'arrimage de ces marchandiſes, ſuſceptibles de preſſion, qu'on appelle eſtiver à *grillou* ou à *traou*, demande plus d'attention, de préciſion, eſt moins ordinaire, & mérite d'être cité.

Pour arrimer ou eſtiver à *grillou*, on garnit les balles en deſſus & en deſſous de languettes ou coins de bois fort larges ; on fait prendre à ces balles, ſous un preſſoir avec ces mêmes languettes que l'on arrête, la forme d'un coin :

on introduit enſuite ces balles, ainſi formées en coin, avec ces languettes, entre les rangs de celles qui ont d'abord été rangées ſucceſſivement dans la calle & entaſſées juſqu'à la hauteur du pont; de façon que ſur un rang de ſix balles de hauteur, on introduit cinq autres balles preſſées en coin, au moyen du traou ou bellier que l'on pouſſe avec différentes manœuvres frappées au cabeſtan; & quand ces balles, ainſi preſſées, ont été introduites a force entre les autres, on retire les languettes au moyen d'une manœuvre frappée à chaque bout de ces languettes, & virée au cabeſtan. On fait entrer, par ce moyen 1000 à 1100 balles dans la calle & entrepont d'un vaiſſeau, qui n'en auroient contenu que 600. Cette façon d'arrimer eſt très-ingénieuſe, & demande beaucoup plus de temps & d'attention; mais tous ces arrimages des vaiſſeaux Marchands exigent moins de théorie, que ceux des vaiſſeaux du Roi & de la Compagnie des Indes, parce qu'on n'a en vue que de faire porter aux vaiſſeaux Marchands le plus qu'il eſt poſſible, ſans faire attention aux inconvéniens qui peuvent en réſulter par rapport aux qualités de ces vaiſſeaux, qui, faits au hazard, & par des Charpentiers ou Conſtructeurs ignorans, ne peuvent qu'être très-mauvais voiliers, & être arrimés au hazard. Ce n'eſt que la pratique qui a fait connoître à peu-près la figure & la façon d'arrimer ces vaiſſeaux pour leur faire paſſablement porter la voile avec les chargemens connus, & toujours les mêmes pour leſquels ils ſont conſtruits. Mais ſi l'on avoit à arrimer des vaiſſeaux Marchands faits par d'habiles Conſtructeurs, dont on connoîtroit les capacités, la ſtabilité & le tirant d'eau ou l'aſſiette, tout ce que j'ai dit au ſujet des différentes façons d'arrimer les vaiſſeaux de la Compagnie des Indes, ſuffiroit pour le bon arrimage de ces bons vaiſſeaux Marchands, qui ſeroient auſſi utiles au Commerce qu'à l'État.

CHAPITRE II.

Du poids & de la distribution des Matières qu'on emploie dans l'Arrimage des Vaisseaux, & de l'effet qu'elles produisent sur le sillage, sur les lignes d'eau, sur les propriétés de bien gouverner, de bien porter la voile, d'être doux à la mer, & sur les autres qualités du Vaisseau.

LE poids des matières qu'on emploie dans l'arrimage des vaisseaux du Roi, de la Compagnie des Indes & des Marchands, &c, doit toujours être égal à la capacité ou au déplacement d'eau du vaisseau ; ainsi, pour connoître d'avance le poids de ces matieres, il faut connoître le déplacement d'eau auquel il doit être comparé.

La figure de la carène ou de la partie du vaisseau qui entre dans l'eau étant très-irrégulière, on la divise en plusieurs tranches. On réduit ensuite, en pieds cubes, la solidité de chaque tranche supposée homogène, & l'on ajoute ensemble la somme des pieds cubes de toutes ces tranches, pour avoir la solidité entière de la carène ou de la partie submergée du vaisseau, supposée homogène.

Cette solidité entière de la carène est précisément égale au volume d'eau, dont elle occupe la place, & au poids de ce volume d'eau, parce qu'il est démontré que tout corps flottant déplace un volume d'eau précisément égal à son poids ; ainsi, connoissant la solidité de la carène ou la quantité de pieds cubes d'eau qu'elle a déplacée, on

connoîtra leur poids, en les multipliant par celui du pied cube d'eau de mer, qui eſt à-peu-près de 72 livres; & pour réduire ce même poids en tonneaux, on le diviſera par 2000 livres, poids ordinaire du tonneau d'eau de mer.

On aura donc toujours, par ce moyen, le poids ou le déplacement d'eau du vaiſſeau qui doit être égal & comparé au poids des différentes parties qui doivent compoſer ſa cocque, ſon gréément & ſa charge, ou ſon arrimage, pour être aſſuré que ce vaiſſeau n'enfoncera dans l'eau que de la quantité projettée.

EXEMPLE.

Du déplacement d'eau d'un vaiſſeau de 74 canons, comparé au poids de ſa cocque, de ſes apparaux & de ſes munitions.

Déplacement d'eau juſqu'à cinq pieds de batterie au ſabord du milieu.

	Pieds cubes.
Première tranche compriſe, depuis le deſſous de la quille, juſqu'à 46 pouces de hauteur au milieu audeſſus de la quille . . .	4514 liv.
Deuxième tranche de 24 pouces de hauteur	7641
Troiſième tranche de 24 pouces id. . . .	8559
Quatrième tranche de 24 pouces id. . . .	9668
Cinquième tranche de 24 pouces id. . . .	10873
Sixième tranche de 24 pouces id. . . .	12072
Septième tranche de 24 pouces id. . . .	13310
Huitième tranche de 24 pouces id. . . .	14413
TOTAL du déplacement en pieds cubes. .	81050

Leſquels 81050 pieds cubes d'eau pèſent à raiſon de 72 livres le pied cube, & de 2000 livres le tonneau . .	2917 ton.	1600 liv.

Poids de la cocque du vaiſſeau.

	Tonneaux.	
Bois de chêne travaillé 35250 pieds cubes, à 59 livres le pied cube, l'un dans l'autre, pèſe	1539	1750 liv.
Bois de ſapin 7500 pieds cubes, à 50 livres le pied cube . . .	187	1000
Sculpture	6	
Fer en courbes du premier pont, faux-pont, & une partie de celles du ſecond pont	26	
Fer en chevilles de toutes ſortes, ferrures de gouvernail, chaînes d'haubans & cloux	50	
Plomb des écubiers, dalots & coutures	3	
Rouets de fonte aux ſeps de driſſe & boſſoirs	1	
Serrurerie	1	
Etoupe	6	
Goloron	1	
Peinture	2	
Cuiſines, fours & potages . . .	14	
TOTAL du poids de la cocque . .	1640 t.	750 liv.

Poids des apparaux.

	Tonneaux.
Mâture complette & celle de rechange	66
Poulies & pompes	14
Rouets de fonte & de fer des Poulies	1
Voiles & leurs étuits	11
Cables, grêlins, orins & cordages pour les ancres	43
Cordages de la garniture	34
Rechange du Maître	11
Ancres avec les fûts	17
Chaloupe & canots	12
TOTAL du poids des apparaux	209 tonneaux.

Leſt.

En fer	80.
En pierres	120
TOTAL	200

Munitions de guerre.

Canons de fer	163
Affuts garnis	35
Boulets ronds & ramés	56
Poudre avec les barils	22
Valets	6
Pinces, anſpects, uſtencilles & rechange du Me. Canonnier	10
Fuſils, mouſquetons, haches d'armes, &c.	2
TOTAL des Munitions de guerre	294

Poids des munitions de bouche.

	Tonneaux.	
Vivres pour six mois à 700 hommes	378	
Eau pour deux mois . . .	150	
Futailles	46	
Table du Capitaine . . .	30	
TOTAL des munitions de bouche. .	604	tonneaux.

Poids des menus effets de l'armement & rechanges.

Effets du Chirurgien . . .	4	
Du Pilote	2	
De l'Aumonier		1000 liv.
Rechange du Charpentier . .	4	1000
Du Calfat	2	
TOTAL des menus effets, &c. . .	13	tonneaux.

Poids de l'État-Major & équipage.

19 Officiers-Majors . . .	5	
700 Hommes d'équipage . .	70	
TOTAL de l'Etat-Major & équipage.	75	tonneaux.

Récapitulation des différens poids.

Cocque du vaisseau . . .	1640 ton.	750 l.
Apparaux	209	
Lest	200	
Munitions de guerre . . .	294	
Munitions de bouche . . .	604	
Menus effets de l'armement & rechanges	13	
État-Major & équipage . . .	75	
TOTAL des différens poids. . .	3035 ton.	750 l.

Le

Le déplacement d'eau de ce vaiſſeau ayant été trouvé de 2910 tonneaux, & le poids de ſa cocque & de ſa charge ou de ſon armement devant être de 2908 tonneaux 1250 livres, il reſte un tonneau 750 livres de bénéfice que l'on mettra en outre des 200 tonneaux de leſt.

Ce n'eſt que par une pareille opération ou combinaiſon du déplacement d'eau du vaiſſeau, avec le poids de ſa cocque & des matières qui doivent compoſer ſon armement ou ſon arrimage, qu'un habile Conſtructeur s'aſſure d'avance, que ſon vaiſſeau tout armé ou chargé aura préciſément le tirant d'eau, & la hauteur de la batterie qu'il projette de lui donner.

L'exemple que je viens de donner pour un vaiſſeau de 74 canons, peut convenir aux vaiſſeaux & frégates du Roi de tous les rangs, aux vaiſſeaux de la Compagnie, & aux vaiſſeaux Marchands; il ſuffit de connoître le déplacement d'eau du vaiſſeau, & d'en déduire le poids de la cocque, pour connoître ſon port, ou le poids des matières qui doivent compoſer ſon chargement ou ſon arrimage.

Mais ce n'eſt pas aſſez pour le bon arrimage que le poids des matières ſoit préciſément égal au déplacement d'eau, il faut auſſi que ce poids, & ſur tout la diſtribution de ces matières, ſoient relatifs à la ſtabilité & à l'aſſiette du vaiſſeau.

On a vu, en comparant les différens poids qui entrent dans l'arrimage d'un vaiſſeau de 74 canons avec ſon déplacement, que la quantité de leſt a été portée à 200 tonneaux; mais cette quantité de leſt ſera-t-elle ſuffiſante pour que le vaiſſeau porte bien la voile? & ſera t-elle diſtribuée de façon que, lorſque le vaiſſeau ſera chargé, il ait l'aſſiette ou la différence du tirant d'eau projettée? C'eſt-là l'ouvrage du plus habile Conſtructeur qui joint la théorie à la pratique, & la condition la plus eſſentielle du bon arrimage, qui étant une ſuite des combinaiſons & des cal-

culs de ce Conſtructeur, doit concourir à procurer à ſon vaiſſeau les qualités qu'il a projetté de lui donner.

Cet habile Conſtructeur, en combinant le plan de ſon vaiſſeau, a calculé ſes capacités ou ſon déplacement, & les a comparées aux poids qu'il doit porter. Il a fixé la quantité de leſt, relativement à ſes capacités. Il a examiné ſi, avec cette quantité, & telle eſpèce de leſt répandu le plus uniformément dans la calle, & le plus éloigné des extr mités, le centre de gravité commun de toutes les matières, ſeroit effectivement audeſſous du meta-centre, & ſi ſon vaiſſeau auroit la ſtabilité néceſſaire; d'après ces calculs, il a déterminé le tirant d'eau de l'avant & de l'arrière, ou l'aſſiette de ſon vaiſſeau. Il a arrêté & travaillé ſon plan en conſéquence, trouvé les lignes d'eau les plus douces & les plus propres à diviſer le fluide; placé le centre de gravité par rapport à la longueur du vaiſſeau, ou le centre de rotation le plus avantageuſement, pour bien gouverner, & avoir les mouvemens doux, déterminé le point vélique. Enfin, il a fait ſur ce plan tous les calculs néceſſaires pour s'aſſurer au plus haut degré de toutes les bonnes qualités que peut réunir le meilleur vaiſſeau de ce rang & de cette eſpèce.

Quelqu'attention qu'ait pris cet habile Conſtructeur pour procurer à ce vaiſſeau ces qualités ſupérieures, il ne faut qu'un mauvais arrimage pour en faire un mauvais vaiſſeau : cent tonneaux de leſt de plus ou de moins, & différemment placés, vont tout gâter, & voici les inconvéniens qu'ils peuvent produire.

Je ſuppoſe qu'au lieu de 200 tonneaux de leſt, qui, joints aux poids des différentes parties du chargement, font un poids égal au déplacement d'eau du vaiſſeau, & ont été jugés néceſſaires à ſa ſtabilité, on en mette 300 tonneaux, il eſt clair que le vaiſſeau, au lieu de conſerver le tirant d'eau qu'il devoit avoir, enfoncera juſqu'à ce qu'il ait déplacé un volume d'eau égal à ce plus grand

poids de 100 tonneaux, ce qui fait à peu-près pour un pareil vaiſſeau une tranche ou excès de tirant d'eau d'environ ſix pouces; ainſi ce vaiſſeau qui devoit avoir cinq pieds de batterie, n'aura plus que quatre pieds ſix pouces, & ne ſera plus en état de ſe ſervir de ſa première batterie, pour peu que la mer ſoit groſſe, ce qui le mettroit dans le cas d'être pris par un vaiſſeau beaucoup plus petit.

Ce n'eſt pas là le ſeul inconvénient; ce plus grand tirant d'eau de ſix pouces ayant augmenté d'autant la colonne d'eau que ſa proüe doit refouler, ſa marche doit être d'autant plus retardée, que ſon poids a augmenté de 100 tonneaux. Il doit, par la même raiſon, trouver plus de difficulté à ſe mouvoir de côté, à virer de bord, & à obéir à ſon gouvernail dont la partie haute ne fait pas grand effet.

La ſtabilité de ce vaiſſeau ne devant exiger que 200 tonneaux de leſt, l'augmentation inutile de 100 tonneaux doit rendre ſes mouvemens trop durs & trop vifs, pour ne pas fatiguer le corps du vaiſſeau, & rompre ſa mâture.

Enfin, ſi, en mettant ces 100 tonneaux de leſt de plus, on les place au hazard, & de façon que le vaiſſeau n'enfonce pas parallèlement au premier tirant d'eau projetté, il doit en réſulter un changement total dans la figure des lignes d'eau, dans la poſition du centre de gravité, de rotation, du meta-centre, du point vélique, ce n'eſt plus le même vaiſſeau, & toutes les combinaiſons du Conſtructeur deviennent inutiles.

Si, au lieu de mettre 100 tonneaux de leſt de plus, on mettoit 100 tonneaux de leſt de moins que celui trouvé néceſſaire, le vaiſſeau en ſeroit d'autant plus léger & plus flottant, & il s'en faudroit d'environ ſix pouces qu'il n'eût le tirant d'eau projetté; c'eſt-à dire, qu'au lieu d'avoir cinq pieds de batterie, il auroit cinq pieds & demi: mais alors cette plus grande hauteur de batterie & de tous les

autres poids, élevant le centre de gravité, & augmentant la bricolle, & la quantité de leſt n'étant pas ſuffiſante à la ſtabilité du vaiſſeau, il ne porteroit pas la voile, & ne ſçauroit naviguer avec ſûreté.

La réſiſtance du fluide ſur la proüe ſeroit moins forte, à la vérité; mais celle du côté n'étant pas proportionnée à la hauteur des œuvres mortes, le vaiſſeau dériveroit beaucoup, & ſentiroit moins ſon gouvernail qui enfonceroit moins dans l'eau; & ſi ce vaiſſeau, devenant plus flottant avec cette moindre quantité de leſt, n'avoit pas conſervé le paralleliſme projetté, il pourroit, outre les inconvéniens de ne pas porter la voile & de dériver beaucoup, très-mal marcher, très-mal gouverner, & avoir des mouvemens de tangage fort durs.

Il pourroit ſe faire que le même vaiſſeau, fait & combiné pour porter ſix mois de vivres, ne fût armé que pour trois mois; ce qui feroit (la quantité d'eau reſtant la même) une différence ou un déficit de 200 tonneaux, dont le vaiſſeau deviendroit plus flottant, & pourroit produire les effets que je viens de citer, de ne pas porter la voile, de dériver beaucoup, &c.

Pour remédier à ce défaut de poids, & donner à ce vaiſſeau, qui n'auroit que trois mois de vivres, le même tirant d'eau, que s'il avoit ſix mois, il faudroit augmenter ſon leſt d'une quantité égale aux poids des vivres ſupprimés; mais comme ce leſt ſeroit d'une peſanteur ſpécifique plus grande, & beaucoup plus avantageuſement placé que les vivres, ſon centre de gravité ſeroit beaucoup plus bas, augmenteroit la ſtabilité du vaiſſeau, & cauſeroit des mouvemens fort durs qui pourroient faire rompre la mâture.

Pour obvier à ces inconvéniens, il faudroit avoir attention de choiſir ce nouveau leſt le plus léger qu'il ſeroit poſſible, de ſupprimer même le leſt de fer qu'on avoit jugé néceſſaire à la ſtabilité du vaiſſeau, pour le rempla-

cer en pierre, d'élever tout le leſt autant qu'on pourroit ſur les ailes, ou ſur le bout des varangues, & de faire enſorte que cette plus grande quantité de leſt ne fît pas trop baiſſer le centre de gravité commun du vaiſſeau par rapport au meta centre, ou n'augmentât pas trop la ſtabilité: c'eſt là le moyen de faire un bon arrimage, & de tirer le meilleur parti d'un vaiſſeau, dont le plan a été bien fait & bien combiné.

Ceci doit s'appliquer aux vaiſſeaux de la Compagnie des Indes, comme aux vaiſſeaux Marchands; un bon Conſtructeur, connoiſſant l'objet du Commerce, & la deſtination de chaque vaiſſeau, combine l'eſpèce & le poids des matières qu'il doit porter, & lui donne des capacités, un tirant d'eau & une figure relatives; mais ſi on changeoit l'eſpèce & la peſanteur ſpécifique des marchandiſes ou effets que ce vaiſſeau devoit porter, il faudroit augmenter, diminuer, ou ſupprimer la quantité de leſt, relativement à la différence du poids de ces marchandiſes.

Si on chargeoit, par exemple, un vaiſſeau de canons, de mortiers, de fer ou de plomb, dont la peſanteur ſpécifique ſeroit conſidérablement plus grande que celle des matières qu'il devoit porter, il ne faudroit pas remplir ſa calle de ces canons, fer, &c; parce que, leur peſanteur étant beaucoup plus forte que leur déplacement, le vaiſſeau couleroit bas ſous ce chargement; mais il faudroit en mettre ſeulement une quantité d'un poids égal au port du vaiſſeau, en tonneaux de poids, qu'il faut bien diſtinguer du tonneau d'arrimage. Le tonneau de poids eſt comme nous l'avons dit ci-deſſus de 2000 livres, & ſert pour exprimer le poids du déplacement d'eau du vaiſſeau, ou le poids de ſa charge. Le tonneau d'arrimage eſt de 42 pieds cubes, & ſert pour meſurer l'eſpace, ou ce que peut contenir la calle, l'entrepont, &c. du vaiſſeau.

Comme cette eſpèce de chargement en canons, &c. ſeroit beaucoup plus lourd, tiendroit moins d'eſpace dans la

calle, & auroit ſon centre de gravité beaucoup plus bas que le chargement ordinaire, la ſtabilité du vaiſſeau en ſeroit conſidérablement augmentée, & ſa cocque, ainſi que ſa mâture ſeroient en grand danger par la vivacité des mouvemens du tangage & du roulis; c'eſt ce que l'expérience ne prouve que trop ſouvent pour de pareils arrimages faits au hazard.

On a juſqu'aujourd'hui regardé comme impoſſible ou très-difficile de faire un bon arrimage de cette eſpèce. Le ſûr moyen d'y réuſſir eſt de répandre & d'élever tout ce chargement qui occupera peu d'eſpace dans la calle, de façon que ſon centre de gravité ſe trouve à-peu-près ſemblablement placé par rapport à la longueur du vaiſſeau, & à la même diſtance au-deſſous du meta-centre, que devoit être le centre de gravité du chargement ordinaire.

On peut ſe ſervir de pluſieurs moyens pour élever ce chargement ou ces canons audeſſus de la carlingue ou du fond de la calle; je préférerois un grillage de bois de ſapin le plus léger, où je pratiquerois le plus de vide, aux autres matières, comme fagots, billettes, &c, qui ſe compriment & ſe broyent dans les mouvemens du vaiſſeau, & ne produiſent plus leur effet.

CHAPITRE III.

Des inconvéniens qui doivent réſulter des méthodes uſitées dans les Ports pour leſter & arrimer les Vaiſſeaux, & des remèdes qu'on pourroit y apporter.

ON a penſé, & beaucoup de perſonnes penſent encore aujourd'hui dans les ports qu'il n'y a aucune régle certaine pour bien arrimer les vaiſſeaux. Chacun veut arrimer à ſa fantaiſie; en général, on veut une trop grande quantité de leſt pour naviguer avec plus de ſûreté, & mieux porter la voile.

L'un veut plus de leſt de fer & le placer deſſus, ou le plus près de la carlingue; l'autre veut plus de leſt de pierre, & penſe que le leſt de fer doit être plus élevé & placé ſur l'extrémité des varangues; qu'il doit être répandu dans la calle de telle ou telle façon; que le vaiſſeau doit être mis ſur ce leſt à la différence qu'il avoit lorſqu'il a été mis à l'eau; que cette même différence du tirant d'eau ou aſſiette doit lui être conſervé, quand il eſt chargé.

Toutes ces différentes opinions prouvent la diſette des principes, & que c'eſt le hazard qui fait faire preſque tous les arrimages des différens ports; doit-on s'étonner des inconvéniens qui en réſultent?

On voit le même vaiſſeau dans une campagne avoir d'excellentes qualités, les mouvemens doux, une belle batterie, bien gouverner, bien marcher, bien porter la voile, & dans une autre campagne avoir toutes ſortes de défauts.

On voit deux vaiſſeaux faits ſur le même plan, ſur le même gabarit ou ſur le même moule, partir enſemble, & avoir des qualités toutes différentes : doit-on s'en étonner, s'ils ſont différemment arrimés & leſtés, & s'ils n'ont pas le même tirant d'eau & la même aſſiette?

On voit enfin des vaiſſeaux rompus, arqués ou déliés avant le tems, parce que pour leur donner une aſſiette ou une différence de tirant d'eau qu'ils ne devoient pas avoir, on a chargé l'une ou l'autre de leurs extrémités de leſt ou autres poids, ce qui a rendu les mouvemens de tangage trop durs, & fait rompre les parties ſurchargées.

Voilà les inconvéniens trop fréquens d'un arrimage fait au hazard, & ſuivant le caprice de quelqu'un qui ne connoît pas le vaiſſeau qu'il arrime, & qui ſe croit aſſez ſavant, & a trop d'amour-propre pour conſulter ou écouter les avis d'un habile Conſtructeur, qui gémit de voir ſon vaiſſeau mal arrimé, & toutes ces combinaiſons infructueuſes.

Je ne dois pas diſſimuler que c'eſt autant la faute des Conſtructeurs que des Marins; ſi ces préjugés ſe ſont introduits dans les ports, on faiſoit autrefois, & l'on fait encore aujourd'hui, même dans les Ports du Roi, la plupart des vaiſſeaux au hazard, il n'eſt pas étonnant qu'on les arrime encore au hazard.

Le ſeul & plus ſûr remède, qu'on puiſſe apporter à ces inconvéniens, eſt de ne confier la conſtruction des vaiſſeaux qu'à des Conſtructeurs inſtruits, qui ſoient en état de combiner & calculer leurs plans, comme je l'ai expliqué dans le Chapitre précédent, & de charger ces mêmes Conſtructeurs de veiller dans les ports à l'arrimage de leurs vaiſſeaux, afin qu'ils ſoient faits relativement à leur projet, ou à la différente deſtination de ces mêmes vaiſſeaux.

Il conviendroit auſſi d'engager les Marins de ſe conformer aux inſtructions qui leur ſeroient données par les Conſtructeurs

Conſtructeurs des vaiſſeaux qu'ils commanderoient, pour leur conſerver, dans le cours de la navigation, autant que la conſommation des vivres, de l'eau, & des autres munitions peuvent le permettre, le tirant d'eau le plus parallèle à celui qu'ils avoient en partant, & le plus avantageux à leurs bonnes qualités, & à la douceur de leurs mouvemens.

On doit juger, par tout ce que je viens de dire, de quelle conſéquence il eſt, pour le bien du ſervice, d'avoir des Conſtructeurs inſtruits ; ce n'eſt que par leur moyen que le Roi & la Compagnie des Indes peuvent réuſſir à avoir d'excellens vaiſſeaux, & à les garantir des accidens qui peuvent provenir d'un mauvais arrimage, qui contribue autant à leurs mauvaiſes qualités, qu'à leur peu de durée.

Il ſeroit même à deſirer, pour le bien de l'État & du Commerce, que la conſtruction des vaiſſeaux Marchands fût confiée à leurs ſoins, & non à des Charpentiers ignorans, qui font au hazard les vaiſſeaux qui demandent le plus de combinaiſon, & dont l'arrimage ne peut qu'être auſſi fait au hazard. Ces vaiſſeaux Marchands n'ont ni marche, ni qualités, tirent beaucoup d'eau, ont beſoin de beaucoup de monde pour manœuvrer, & ſont ſûrement pris en tems de guerre, dès qu'ils ſont apperçus.

On pourroit faire des vaiſſeaux de même port, qui ne couteroient pas plus cher, navigueroient avec moins de monde, tireroient beaucoup moins d'eau, auroient d'excellentes qualités, & marcheroient comme des frégates. Ces vaiſſeaux, en tems de paix, procureroient, par de plus courtes traverſées, plus de profit aux Armateurs, & la ſanté aux équipages : en tems de guerre, ils approviſionneroient plus ſûrement les Colonies, feroient le Commerce avec moins de riſque, & conſerveroient à l'État,

par leur marche ſupérieure, des Matelots, dont l'eſpèce eſt auſſi précieuſe que rare, parce qu'ils ſont preſque tous pris dans les mauvais vaiſſeaux Marchands & Corſaires mal conſtruits, & périſſent dans les priſons.

Ce que je dis ici, ſur la meilleure conſtruction des vaiſſeaux Marchands, n'eſt point une idée, ni un problème à réſoudre. Il eſt des Conſtructeurs qui en ont démontré la poſſibilité & la vérité, tant pour les vaiſſeaux de la Compagnie, que pour les fluttes & bâtimens de tranſport, qu'ils ont conſtruits pour des particuliers auxquels ils ont ſçu procurer une marche ſupérieure avec les qualités de porter beaucoup, de tirer peu d'eau, & de naviguer avec peu de monde.

L'on doit ſentir le prix de pareils Conſtructeurs auſſi utiles que ſavans, pour porter à ce haut degré de perfection un art auſſi difficile que néceſſaire, & l'on ne devroit rien épargner pour les encourager, & en augmenter le petit nombre, en diſtinguant leur état, & rétabliſſant les Écoles qui ont formé d'auſſi excellens ſujets.

Il peut arriver néanmoins qu'on ait à arrimer un vaiſſeau fait au hazard, & dont on ne connoît ni le plan, ni la ſtabilité, ni l'aſſiette ; il faut alors que l'intelligence des Conſtructeurs & Officiers qui doivent arrimer ce vaiſſeau, ſupplée à l'ignorance de celui qui l'a fait. On peut avoir à-peu-près la figure de la carène, en la meſurant à différentes hauteurs & largeurs, déterminer en conſéquence la quantité de leſt, le chargement, & le tirant d'eau que l'on eſtime le plus avantageux ; mais ce n'eſt que par les obſervations & les expériences que l'on doit faire dans le cours de la navigation, que l'on peut porter cet arrimage à ſon point de perfection.

Si on s'apperçoit à la premiere campagne que ce vaiſſeau ne porte pas bien la voile, il faudra augmenter la quantité de leſt, ou bien lui donner un leſt d'une peſanteur

ſpécifique plus forte ; s'il a des mouvemens trop durs, il faudra au contraire diminuer ſon leſt, ou ſupprimer celui de fer pour le remplacer en pierre ; s'il ne gouverne pas bien, il faudra changer ſon aſſiette, en diſtribuant autrement ſon leſt, ou ſon chargement. Enfin, il faudra ſe ſervir, pour corriger l'arrimage de ce vaiſſeau, des principes établis dans ce Mémoire, & des défauts qu'on aura reconnus pendant le cours de ſa navigation, qui peuvent provenir, & de la mauvaiſe conſtruction du vaiſſeau, & de ce qu'on n'avoit pas d'abord trouvé l'aſſiette qui lui convenoit.

CONCLUSION.

Les différentes Méthodes que j'ai données, pour arrimer dans différens cas, & avec des chargemens différens, les vaiſſeaux du Roi, de la Compagnie des Indes, & les vaiſſeaux Marchands, ſont applicables, & peuvent convenir aux vaiſſeaux de toutes ſortes de grandeurs, & de différentes eſpèces

Elles m'ont paru ſuffiſantes pour faire connoître le poids & la diſtribution des matières qu'on y emploie, l'effet qu'elles produiſent ſur le ſillage, ſur les lignes d'eau, ſur les propriétés de bien gouverner, de bien porter la voile, d'être doux à la mer, & ſur les autres qualités d'un vaiſſeau, les inconvéniens dont les méthodes uſitées dans les ports ſont ſuſceptibles, & les remèdes qu'on peut y apporter.

L'on peut en conclure que la ſeule & bonne façon de bien arrimer, & leſter un vaiſſeau, eſt de connoître ſon plan, ſes capacités, ſa ſtabilité & ſon aſſiette, de les comparer aux poids qu'il doit porter, & déterminer en conſéquence la diſtribution de ſa charge, & la quantité, l'eſpèce & la poſition du leſt qu'on doit lui donner, afin que chaque choſe étant à ſa place, le vaiſſeau ait le tirant d'eau,

la hauteur de la batterie, & toutes les autres qualités projettées; c'eſt-là l'ouvrage du plus habile Conſtructeur: Perſonne ne peut mieux que lui connoître ſon vaiſſeau, & l'arrimage qui lui convient.

Hoc opus hic labor eſt.

Je pourrois donner ici les méthodes de calculer les capacités, la ſtabilité & l'aſſiette du vaiſſeau; mais je ne ferois que répéter ce qu'ont écrit à ce ſujet M Bouguer dans ſon Traité du Navire, & M. Duhamel dans ſon Traité de Conſtruction.

L'on trouvera dans ces deux excellens Ouvrages, non-ſeulement ces méthodes; mais encore tous les calculs les plus difficiles que doit ſavoir le meilleur Conſtructeur, & qui ont ſervi de baſe à ce Mémoire; je ſerai très flatté s'il peut être utile aux Marins, & remplir les vues de l'Académie.

F I N.

Fig. 3.

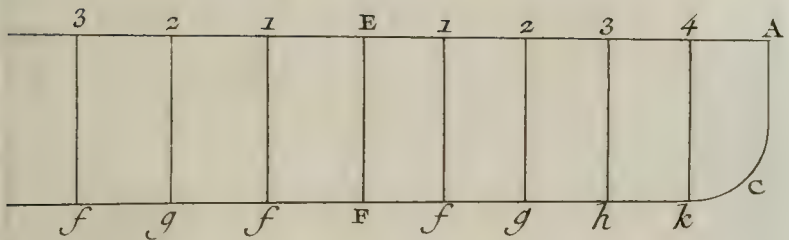


Fig. 2.

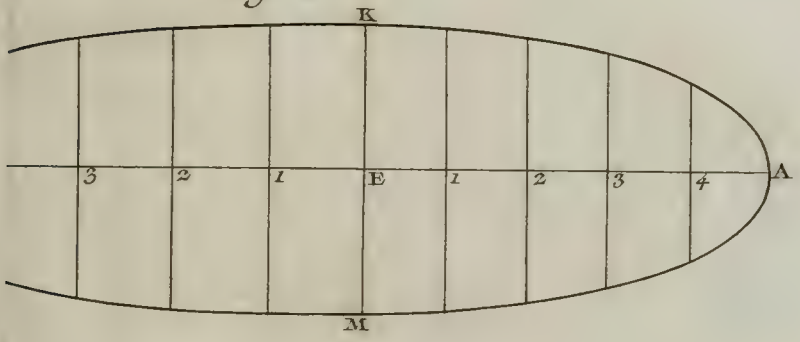


Fig 1ere

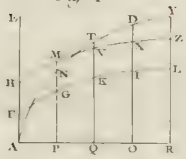


Fig 3

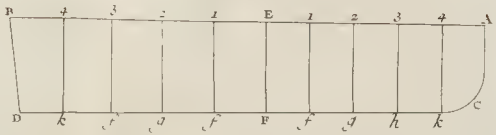


Fig 4

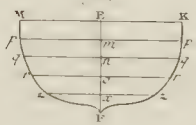
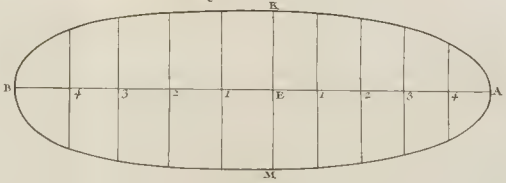
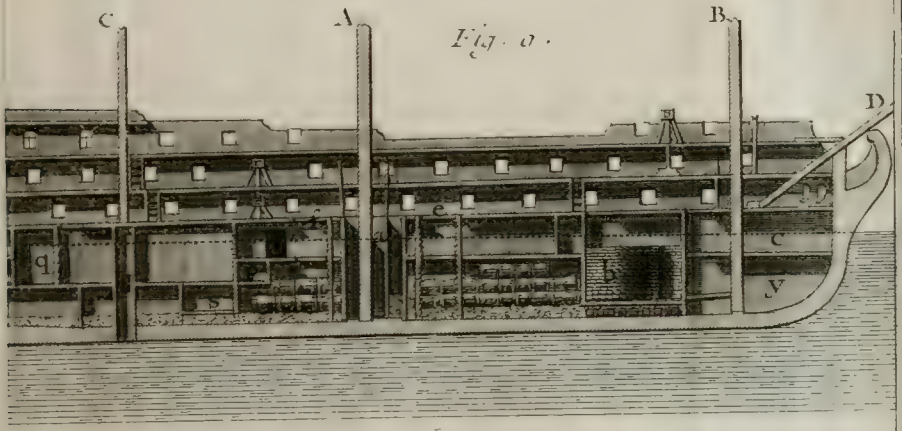


Fig 2.



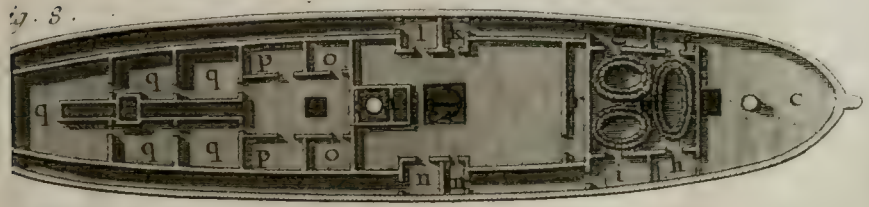
Coupe sur la longueur du Vaisseau l'Altier.

Fig. 2.



Plan à fleur d'eau du Vaisseau l'Altier.

Fig. 3.



Renvoy

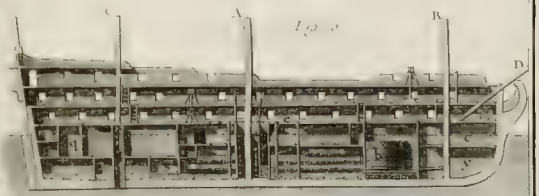
A. Grand Mât
B. Mât de Misaine
C. Mât d'Artimon
D. Mât de Beaupré
a. Archipompe Dupont
b. Ecoute aux Cables
c. Ecoute aux Lions.
d. Archipompe de Museau.
e. Grand Ecoutille
f. Ecoutille aux vivres
g. Soute au Tôlier
h. Soute au Calfat
i. Soute au Pilote
j. Soute au Charpentier
k. Soute aux Gardes Marines
l. Soute au Charbon
m. Soute au Chirurgien
n. Soute au Capitaine
o. Soute aux Légumes
p. Cave du Capitaine
q. Soute au Pain
r. Chambre aux Tôiles
s. Soute aux Poudres
t. Caissons à Poudre

Plan en Lest du Vaisseau l'Allier de 64 Canons Armé en 1762

Fig. 5

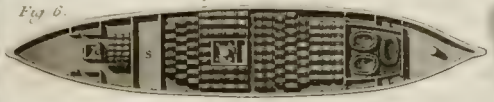
Coupe sur la longueur du Vaisseau l'Allier

Fig. 4



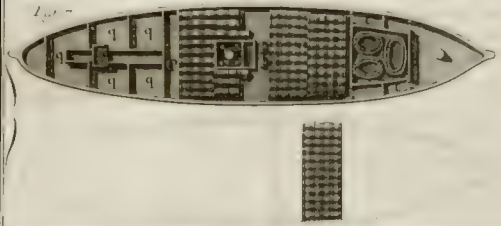
1er Plan des Bariques du Vaisseau l'Allier

Fig. 6.



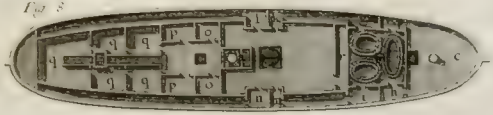
2e et 3e Plan des Bariques du Vaisseau l'Allier

Fig. 7

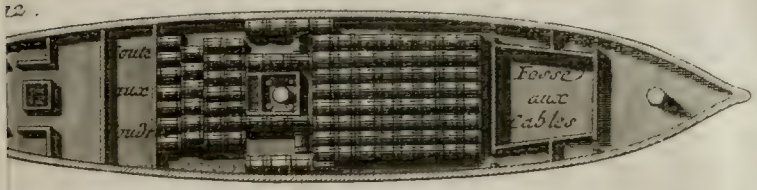


Plan à fleur d'eau du Vaisseau l'Allier

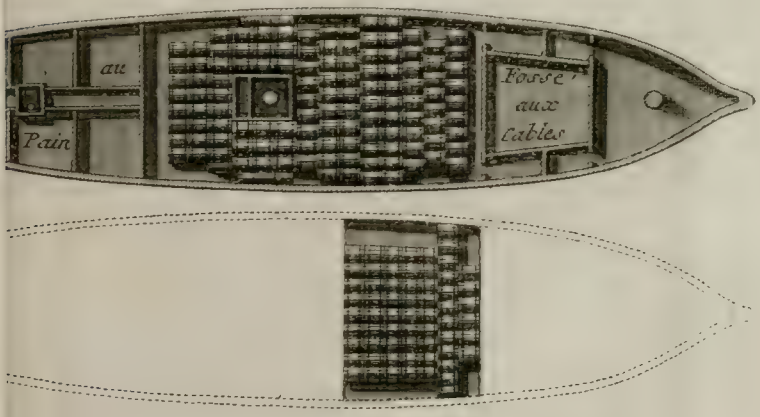
Fig. 8



1.er Plan des Bariques.

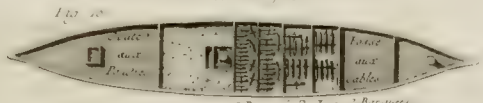


2.e et 3.e Plan des Bariques.



1er Plan en Lest du Vaisseau le Fantasque de 64 Canons Armé en 1760.

Fig. 10



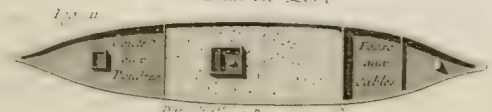
1 Barriques de Test 2 Barriques
dans Canons plein en Cave vers
Test Barriques dans Soute
aux 2 aux 3 aux Cables
Cables, une barrique en boulet
dans les vuides

1er Plan des Bariques

Fig. 12

2e Plan en Lest

Fig. 11



Deux Barriques
et le 2e Plan
Barriques
dans la Calle
au Vin

2e et 3e Plan des Bariques

Fig. 13

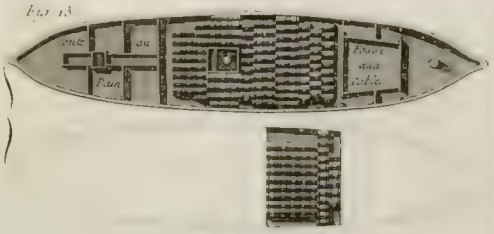


Fig. 15.

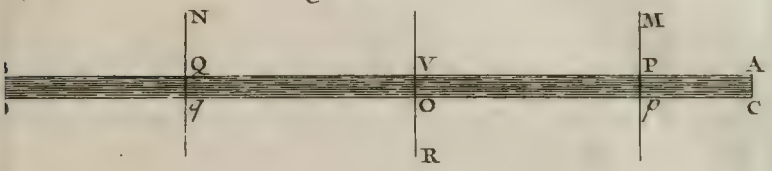
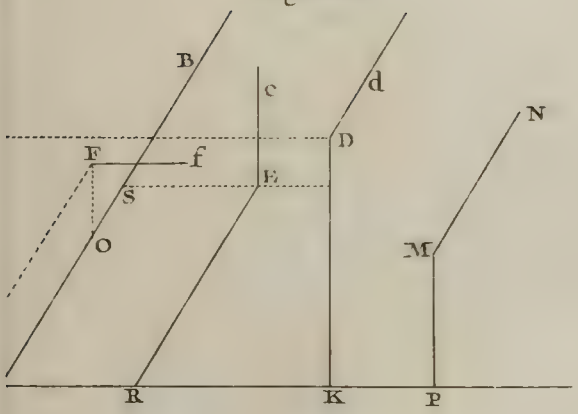


Fig. 18.



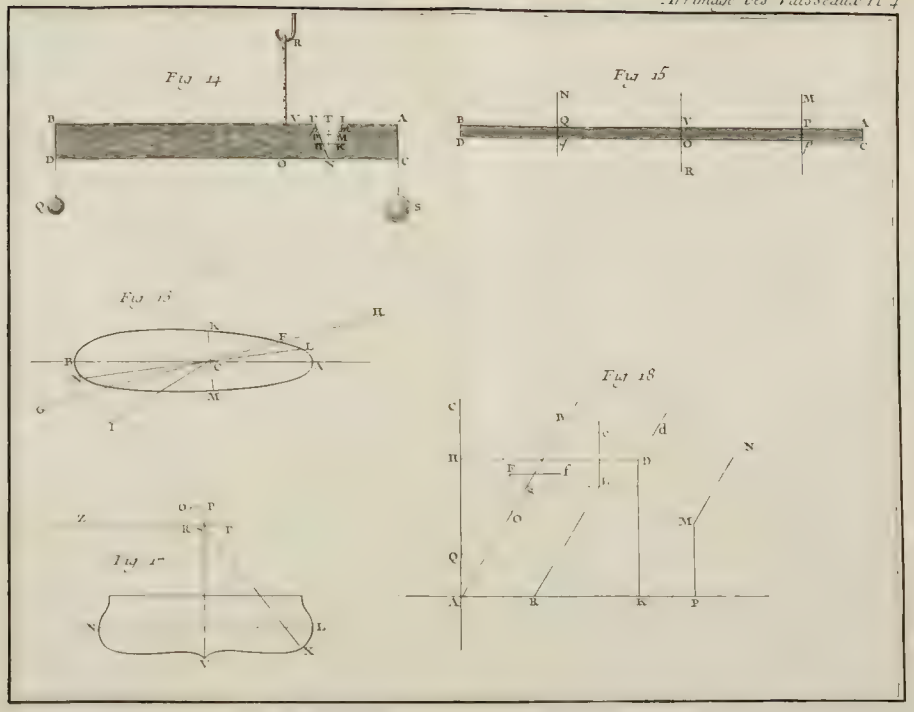


Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 18

Fig. 22.

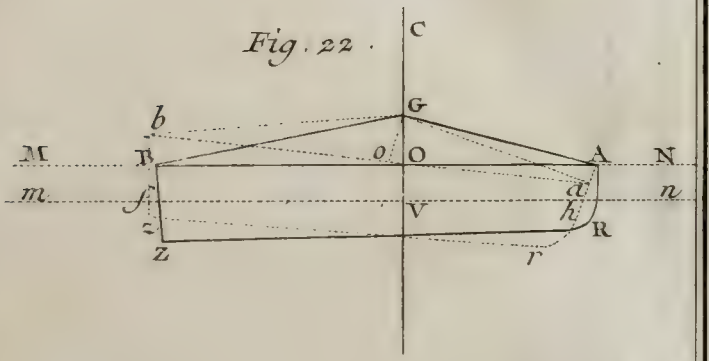


Fig. 23.

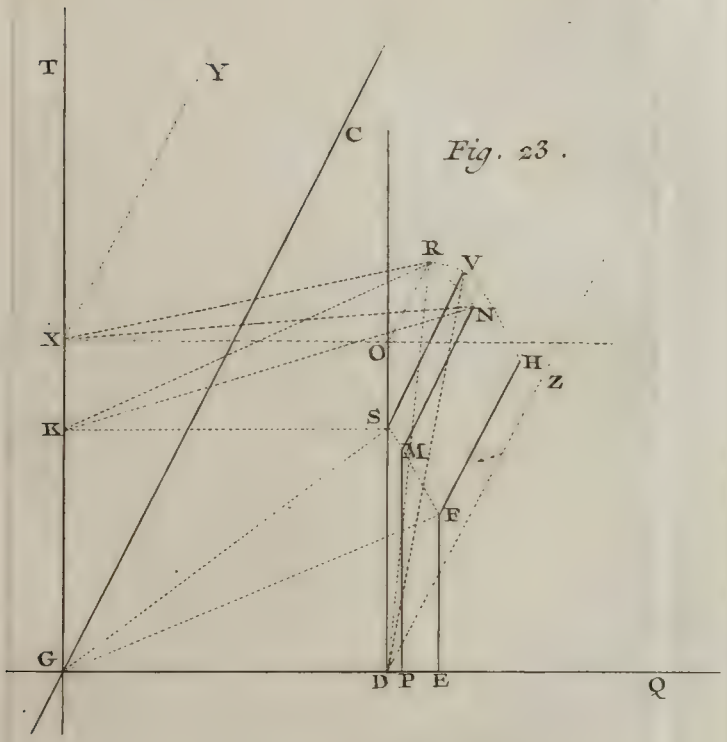


Fig 19.

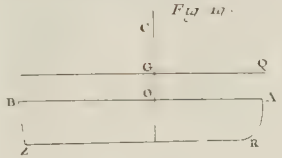


Fig 20

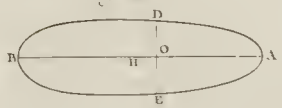


Fig 21

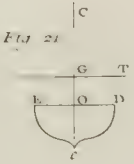


Fig 22

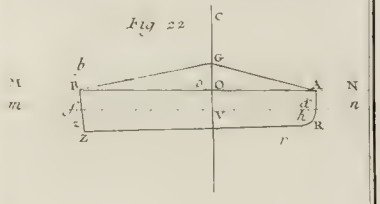
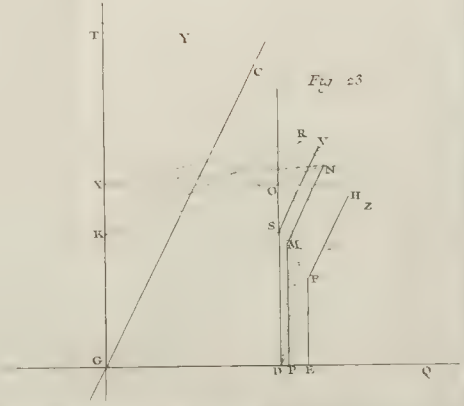


Fig 23



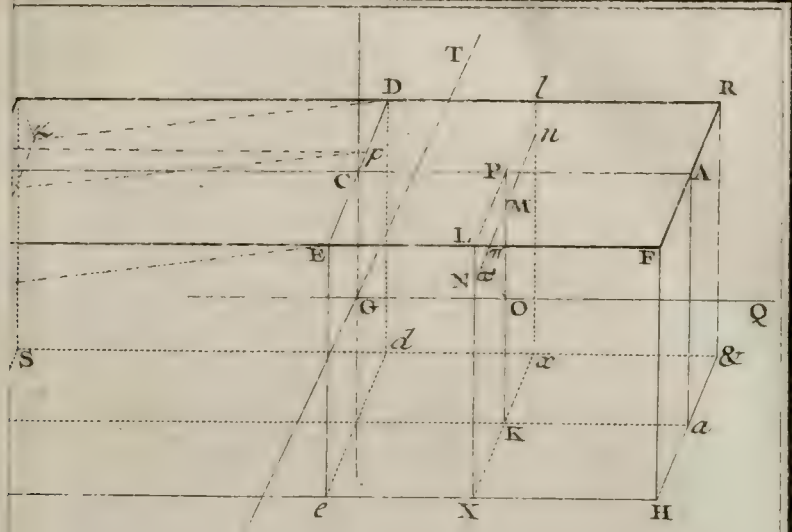
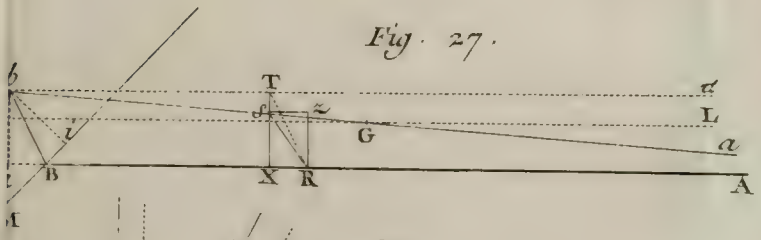


Fig. 27.



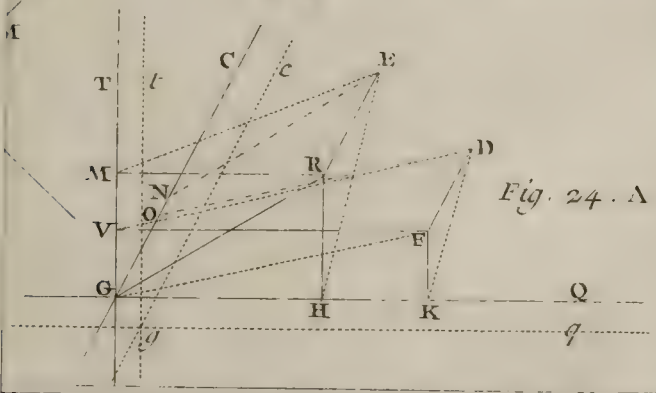


Fig. 24. A.

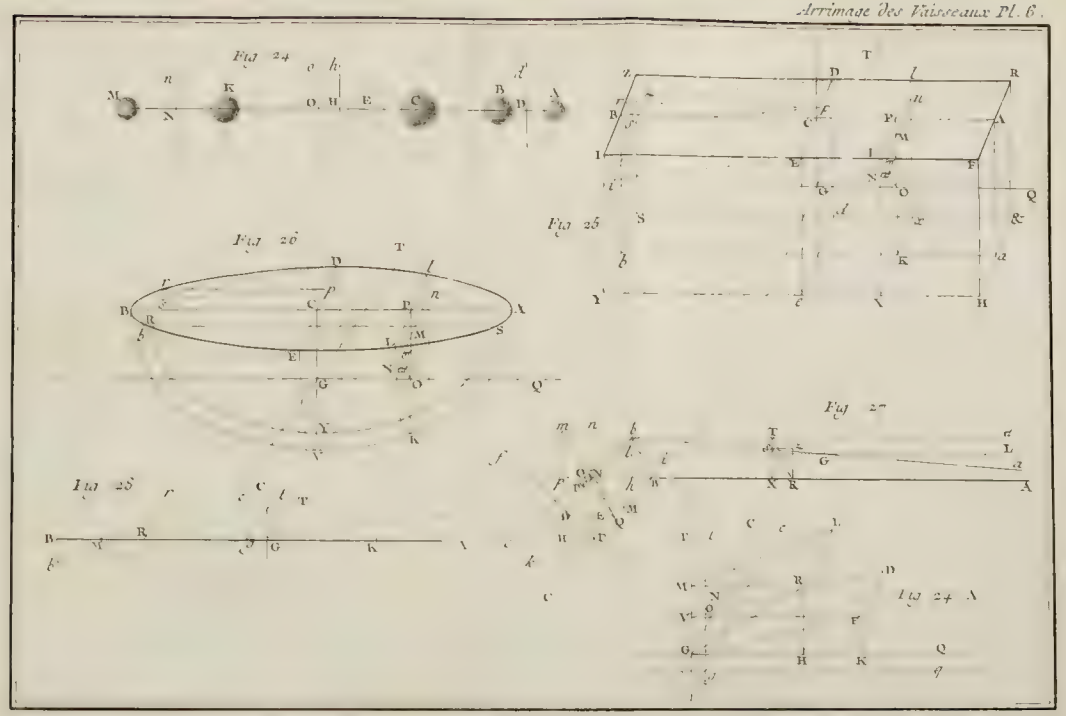


Fig 24
Fig 25
Fig 26
Fig 27
Fig 28
Fig 24 A

de Piece par M.r Bourdé.

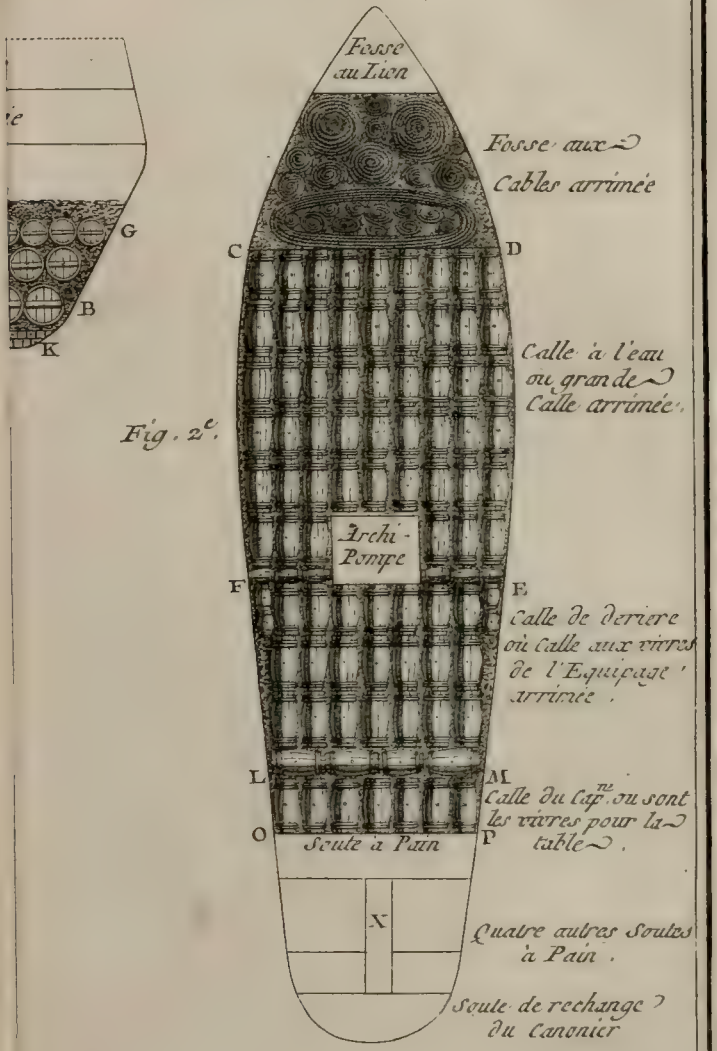


Fig. 2.e

Seconde Piece par M.r Bourdé.

Fig 1ere

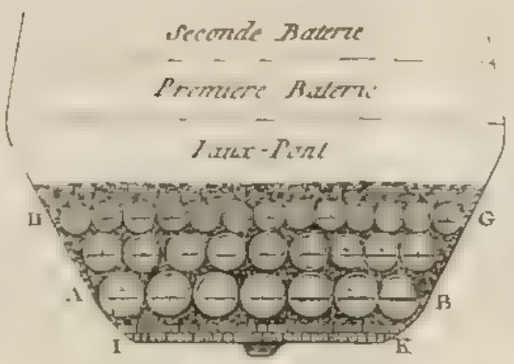


Fig 2e

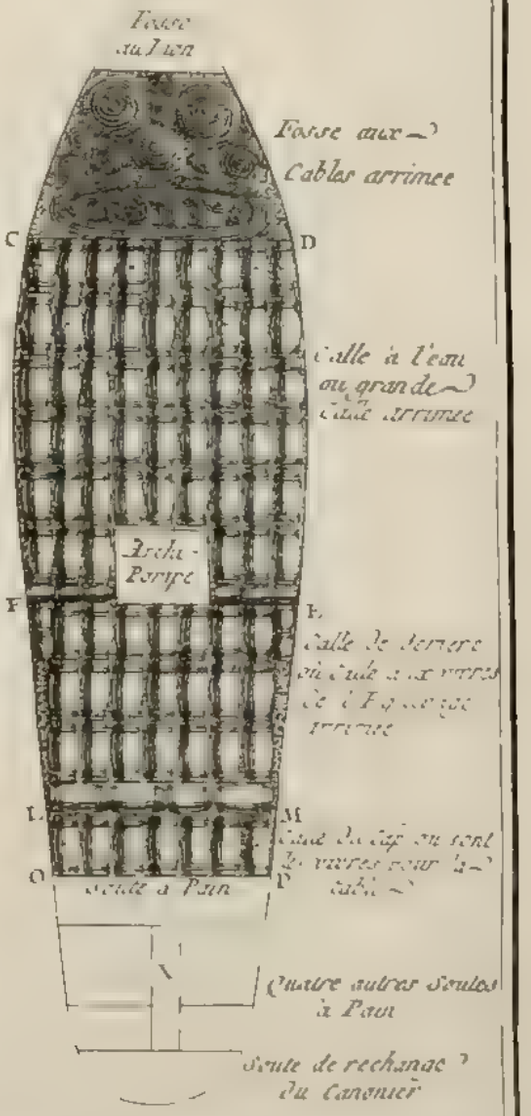


Fig 3e

DE L'ARRIMAGE
DU NAVIRE.

PIÉCE qui a remporté le prix proposé par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de Paris pour l'année 1766.

Par M. BOURDÉ DE VILLEHUET, Officier des vaisseaux de la Compagnie des Indes, à Saint-Malo.

DE L'ARRIMAGE DU NAVIRE.

Les qualités du Navire ſe feront connoître par un bon arrimage.

L'ARRIMAGE eſt l'art de diſpoſer & d'arranger tout ce qui entre dans un vaiſſeau, le plus ſolidement & le plus avantageuſement poſſible, pour que tout ſe conſerve ſans avarie, en même tems que l'on conſervera auſſi, par l'arrangement des effets, les qualités du navire.

DÉFINITIONS.

Le rang ſe forme par des futailles, ballots ou caiſſes que l'on arrange à côté les uns des autres ſur la même ligne, comme AB, d'un travers du vaiſſeau à l'autre. Figure I.

L'antenne eſt compoſée de rangs au-deſſus les uns des autres & vus par le bout verticalement comme ABGH.

Figure II. Le plan eſt compoſé de rangs bout à bout en vue d'oiſeau, comme CDEF.

Figure I. Le premier rang eſt le principe du premier plan qui eſt arrimé ſur un petit grenier de bois de billetes que l'on fait au-deſſus du leſt IK, quand il eſt en fer ou groſſes pierres, afin d'empécher les futailles de porter en plein & de ſe crever au mouvement, ou par leur propre poids.

Il ſuit de ce que nous venons d'expliquer, qu'un arrimage entier eſt compoſé de plans, ſi on en fait autant de tranches horizontales qu'il y a de rangs dans l'antenne.

Il eſt compoſé d'antennes, ſi on en fait autant de tranches verticales qu'il y a de rangs dans le plan.

La premiere figure repréſente une antenne entière d'un vaiſſeau de guerre, formée du leſt, du grenier, des trois rangs de futailles arrimées & garnies de bois à brûler, ſoutenues de leurs pailles d'arrimage, & appuyées de leurs coins; le tout étant baroté de bois à feu.

La ſeconde figure repréſente le troiſième plan d'un vaiſſeau de guerre découvert; on y voit le plan de la calle à l'eau CDEF garni de bois ainſi que les futailles en bréton EF, la calle aux vivres de l'équipage EFLM, avec des forains remplis de barillages & de piéces en bréton LM.

On voit à la ſuite la calle du Capitaine LMOP arrimée & les ſoutes à pain avec leurs courcives X.

On voit en avant la foſſe au lions, & celle aux cables, greſlins, auſſières, & cordages de rechange de toute eſpèce.

Deſcription de l'uſage de leſter & arrimer un Vaiſſeau de guerre.

Les vaiſſeaux de guerre n'ont ordinairement que du fer pour leſt, ſoit en gueuſes, vieux canons, morceaux d'ancres, ou autres.

On donne aux vaiſſeaux plus ou moins de leſt, quoique de même grandeur; ſouvent un vaiſſeau plus petit demande plus de leſt qu'un plus grand; cela dépend de leurs formes. Le vaiſſeau fin en demande plus que le vaiſſeau qui eſt à plattes varangues, parce que ſon centre de gravité eſt plus haut, & ils peuvent cependant avoir la même propriété de bien diviſer le fluide.

J'ai été ſur le Comte de Provence, vaiſſeau de 74 canons, qui par ſes qualités ſupérieures, fera toujours honneur à ſon conſtructeur: il avoit 160 pieds de quille, 176 de longueur, abſolue & 43 pieds de bau de dehors en dehors les membres; ſes maitreſſes varangues étoient plattes, c'eſt-à-dire ſans acculement; ſon leſt n'étoit que de 90 à 100 tonneaux en fer, & il étoit en tout temps fin voilier, même après être rompu & caſſé; il rouloit & tanguoit peu; le ſeul défaut de ce vaiſſeau unique étoit ſa charpente, défaut dans lequel tombent aujourd'hui tous les conſtructeurs, défaut en un mot qui ruinera l'état maritime en France, ſi on n'y remédie pas: le vaiſſeau le Comte de Provence marchoit comme les meilleures frégates. J'ai paſſé enſuite ſur le vaiſſeau le Fortuné de 64 canons qui pouvoit paſſer pour une grande frégate, par ſes qualités, ſa figure & ſa forme; ſa quille étoit de 146 pieds, ſa longueur abſolue n'alloit pas au-delà de 156, & ſon bau de dehors en dehors les membres étoit de 40 pieds; ſes maitreſſes varangues étoient fort acculées, & ſon leſt étoit de 120 tonneaux en fer & de 30 tonneaux en petits cailloux, dans leſquels on engravoit le premier plan dans les calles à l'eau & aux vivres; il étoit fin voilier, mais le Comte de Provence avoit au moins $\frac{1}{6}$ de marche de plus. Ces vaiſſeaux armés l'un à 4 pieds 8 pouces de batteries en belle, & l'autre à 6 pieds, & 5 pieds 10 pouces, portoient pour ſix mois de vivres à 600 & 700 hommes, ce qui eſt toujours aiſé à approximer en tonneaux, parce que les

Ordonnances fixent ce qu'il faut pour chaque homme, ainſi que la quantité des autres effets d'armement.

On fait un plan du leſt ſur le vaigrage du fond de la grande calle, & calle aux vivres; on en met auſſi en avant ſous la plateforme de la foſſe aux cables, en arrière ſous celle des ſoutes à poudre, de manière que le vaiſſeau ſur ſon leſt ſoit au tirant d'eau d'arrière & d'avant déſigné par le Conſtructeur; enſuite travaillant dans la calle à l'eau (ou dans toutes les calles en même temps) on fait un lit de bois de billetes, & l'on arrime par-deſſus le premier plan d'eau, en bottes de quatre, employant des pailles d'arrimage (2), que l'on met en travers ſous les bouts des piéces, pour les élever, afin d'empêcher le ventre des futailles de porter avec tout leur poids ſur les billetes qui couvrent le leſt; & lorſque la premiere piéce eſt bien parallèle au plan du leſt ſur ſes pailles, on la coinſe avec quatre coins, deux de chaque bord, pour l'aſſujettir & lui ôter tout mouvement dans les plus grands tangages ou roulis du vaiſſeau; cette piéce une fois placée au milieu de ſon rang, répondant ſur la quille, & joignant exactement la cloiſon de la foſſe aux cables, on continue d'arrimer les autres piéces des deux bords pour achever ce rang, en allant chercher les côtés du vaiſſeau de travers en travers; quand il eſt fini, on remplit le plus exactemement poſſible l'entre-deux des piéces par deſſous de bois de billetes, ainſi que les vides qui ſe trouvent quelquefois à bord; ce rang ainſi achevé, on en recomence au milieu un ſecond parallèle au premier, que l'on conduit de la même manière, avec les mêmes précautions & la même exactitude, faiſant toujours enſorte qu'une

(2) On appelle *pailles d'arrimage* des buches de 3 à 4 pieds de long & de 5 à 6 pouces de diamètre, que l'on met en travers ſous les bouts des futailles que l'on arrime.

piéce (n'importe dans quel rang elle ſe trouve), ne ſoit jamais plus haute que les autres; car il faut abſolument que tout ce qui compoſe le premier plan d'un arrimage ſoit de niveau, afin qu'il ne ſe trouve point d'inégalités dans le ſecond, qui doit être arrimé par-deſſus le premier avec le même ſoin & la même régularité; ſoit qu'il doive être compoſé de piéces de quatre ou de trois, ou mélé de ces deux eſpèces de futailles, deſſous leſquelles on met le bois néceſſaire pour remplir les vides qui ſe trouvent entre les piéces du premier plan. On met deſſous tout ce ſecond plan des pailles, qui doivent porter en plein ſur les billettes de garniture du premier, & ſur les bottes de deſſous: enſuite on aſſujettit les piéces que l'on arrime avec des coins, & de la même manière qu'au premier plan, ayant bien attention que tous les jables des futailles qui ſont bout-à-bout, ſe joignent bien exactement, rempliſſant toujours de bois les vides (ou interſtices) qu'elles laiſſent entr'elles par les bouges; le ſecond plan achevé, on procède à l'arrimage du troiſième, qui eſt ordinairement compoſé de piéces de deux, & quelquefois mêlé de piéces de trois; dans les uns & les autres de ces plans on met dans les forains des bariques, afin de ménager l'eſpace & de n'en point perdre, ſur tout quand il s'agit d'entreprendre de longues traverſées, dans leſquelles on n'a jamais trop d'eau; on n'épargne pas non-plus le bois à brûler, crainte d'en manquer, & l'on ne manque jamais de baroter avec ce dernier.

Si, en arrière de chaque plan, il ſe trouve trop peu d'eſpace, quand il eſt fini pour arrimer de long quelques piéces, on tâche de les placer en bréton; mais on ne pratique cette manière que quand on ne peut pas faire autrement, & pour ménager l'eſpace ſans le perdre, ſi on ne peut pas mettre de futailles d'une façon ou de l'autre, on remplit de bois, & tout l'eſpace eſt employé.

Dans la calle aux vivres, on diſpoſe l'arrimage comme

nous venons de le voir, obſervant de mettre dans le fond les futailles les plus conſidérables & les plus peſantes en liqueurs ou viande ſalée, plaçant au premier plan ce qui doit être conſommé le dernier ou en retour; au ſecond ce dont on a beſoin quelque tems après être en mer, ce qui eſt ordinairement contremarqué, tant pour les boiſſons, que pour les viandes, beurres, graiſſes, huiles & légumes, ou farines; dans le troiſième plan & dans les vides qui ſe trouvent au-deſſus, on met tout ce qui ſera d'abord conſommé en partant, diſpoſant les choſes de manière qu'à meſure qu'on les conſomme, on puiſſe découvrir celles dont on aura beſoin tout-de-ſuite après.

Quoique la calle du Capitaine ſoit fort petite, en comparaiſon des autres, on l'arrime cependant de la même manière que celle aux vivres de l'équipage & avec les mêmes précautions.

Les ſoutes à poudre ſont remplies de barrils qui contiennent chacun cent ou deux cens livres de poudre de guerre, & comme ils ſont fort maniables, on les arrime très-aiſément les uns ſur les autres par plans, & de manière à n'avoir point de jouement; on remplit les coffres à poudre de gargouſſes pleines, & l'on place dans les différens endroits ou forains des ſoutes les méches & autres uſtenſiles ſuſceptibles d'embrâſement, & qui ne ſont jamais d'un grand poids.

En avant de la calle à l'eau eſt la foſſe aux cables, on les y arrime, en les rouant ou cueillant de façon qu'il y en ait toujours au moins trois de parés à entalinguer: les uns mettent la grande touée (3) ſous le panneau; d'autres la placent tout-à-fait ſur l'avant de la foſſe aux cables;

(3) La *grande touée* eſt compoſée de deux cables de même groſſeur, & quelquefois de trois épicés bout-à-bout. J'ai vu un vaiſſeau de guerre anglois qui avoit une touée de 7 cables: on s'en ſert pour mouiller dans un grand fond, ou pour tenir contre un fort coup de vent.

mais

mais de quelque façon que ce soit, on tient les autres cables tribord & bas-bord vis-à vis l'un de l'autre, plaçant les grefslins & ausières dans les cables ou entr'eux, ainsi que le gros cordage de rechange, laissant toujours l'espace nécessaire pour passer librement les poudres qui sont en gargousses sous la fosse aux lions dans des coffres d'attache doublés de plomb, dont les ouvertures se regardent, étant séparés par une petite courcive. (Ces coffres doivent contenir deux mille coups de canon). Dans la fosse aux lions se place tout ce qui concerne le rechange du Maître-d'équipage, en menus cordages, comme le petit filain, carenthunier, lusin, merlin, ligne d'amarrage, bitord, fil de caret, suif, huile à brûler, goudron, &c.

Depuis la fosse au lions en arrière, jusqu'aux soutes à poudre & à pain qui sont au-dessus les unes des autres, est compris le faux-pont, porté par les faux baux, au-dessous desquels est fait l'arrimage que nous avons détaillé.

Au-dessus de la fosse aux cables, entre les cloisons du théâtre & de la fosse aux lions, est compris un espace faisant partie du faux-pont, dans lequel on trouve des soutes à grain, la soute du Voilier de travers en travers sur l'avant, celles du Charpentier, du Tonnelier & du calfat; les unes & les autres contiennent tout ce qui est propre à ces différens états pour le voyage, à l'exception du brai, goudron & suif, que l'on place dans les forains des autres endroits, parce qu'ils sont d'un trop gros volume pour entrer dans les petites soutes, autour desquelles règnent les galeries du vaisseau. (Galerie, dans ce sens, se dit d'un espace libre autour du vaisseau par-dessus le faux-pont, pour boucher en dedans les coups de canon que l'on peut recevoir à l'eau pendant un combat : les galeries ont ordinairement trois pieds de large).

Le théâtre ou poste du Chirurgien est compris entre les cloisons de la cambuse (4) & de la fosse aux cables,

(4) *Cambuse*, lieu où l'on distribue, à tous les repas, les vivres de l'Équipage.

dans tout l'eſpace qui eſt au-deſſus de la grande calle ou calle à l'eau ; il doit être abſolument vide de tout ce qui pourroit gêner les malades ou bleſſés, & contenir ce qui regarde les médicamens & les choſes propres aux panſemens.

En arrière du théâtre, entre les cloiſons des ſoutes à pain & du théâtre, au-deſſus des calles aux vivres, eſt la cambuſe autour de laquelle il y a pluſieurs aménagemens, pour le Capitaine, en ſoutes qui contiennent différentes choſes propres à l'avitaillement de table.

En arrière de tout cela ſont les ſoutes à pain, & une petite ſoute de rechange tout-à-fait ſur l'arrière pour les uſtenſiles du Canonier ; entre les ſoutes à pain il y a une petite courcive pour le paſſage des poudres qui vont ſe diſtribuer pendant le combat au panneau de la cambuſe.

Il y a quelquefois des changemens dans la diſtribution de la calle d'un vaiſſeau de guerre ; mais comme il n'eſt pas poſſible d'entrer dans le détail de ces ſortes de choſes qui peuvent être variées à l'infini, ſelon les différentes circonſtances & les différentes idées, je m'en tiendrai à ce que je viens d'expliquer, comme à ce qu'il y a de plus uſité & de meilleur, à ce que je crois.

OBSERVATION.

Quand au lieu d'avoir tout en leſt de fer, on a du cailloutage, & que l'on craint qu'il monte trop haut, ou que le vaiſſeau ſoit trop rude dans ſes roulis, on engrave le premier plan d'eau parmi les cailloux qui doivent être les plus petits poſſibles, afin que le leſt ne ſoit pas trop mat, c'eſt à-dire, que le centre de gravité du leſt ne ſoit pas trop au-deſſous de celui du vaiſſeau chargé & prêt à prendre la mer, parce qu'il le rappelleroit trop vîte, & donneroit trop de vivacité au roulis.

Description de l'usage de lester & arrimer un vaisseau de charge.

Les vaisseaux qui chargent en marchandises ou en flutes, prennent tant d'effets différens dans leurs cargaisons, qu'il est impossible d'entrer dans le détail de ces sortes d'arrimages: d'ailleurs chaque port & chaque navigation ont leurs différentes manières adoptées; ainsi nous ne pouvons que supposer une cargaison compliquée, & qui ne ressemblera peut-être à aucune de celles qui composent le chargement des vaisseaux que l'État employe à son commerce; mais comme il faut partir d'après quelque chose, je me propose un vaisseau qui doit charger en plein de fer & plomb, de canons & d'ancres, de vin ou eau-de-vie, farines, viandes, toiles & ballots de différentes marchandises séches, &c.

Les canons & ancres sont ce qu'il y a de plus embarrassant dans un arrimage; mais on en tire parti, en arrimant d'abord pour lest les canons ou mortiers que l'on met sur un petit lit de billettes; on place les canons de long, arrimant tout d'un temps entre les piéces les verges des ancres, mettant des semelles dessous les angles des becs qui doivent être arrimés à plat, de sorte qu'il ne paroisse rien au-dessus des canons, & de façon que le vaisseau soit à son tirant d'eau tel que le Constructeur l'aura donné pour son lest; on égalise ensuite par-tout avec du bois, des boulets, plomb, bombes ou fer vierge: ce grenier est haut, mais on ne fait pas autrement. Si le vaisseau est fort de côté & bien construit, il roule vivement & compromet sa mâture, aulieu que si on avoit élevé le lest de fer sur un grenier ou fardage de bois à trois pieds de haut, on auroit modéré ce mouvement.

Ce premier plan étant fait, on arrime dessus le vin & l'eau-de-vie de cargaison avec toutes les précautions

poſſibles, & de la même manière que nous l'avons déja vu dans l'arrimage du vaiſſeau de guerre, mettant dans les forains des quarts de viande ou autres petits barillages, de façon qu'ils ne ſoient pas trop preſſés par les autres marchandiſes du deſſus; enſuite, lorſqu'on a fini d'arrimer bien ſolidement les marchandiſes les plus peſantes, on arrime les viandes ſalées ſur les boiſſons, & par-deſſus on met les farines, en appuyant bien le tout avec le bois d'arrimage : on conſerve ordinairement la partie de l'arrière de la calle pour les marchandiſes en ballots & les toiles, en un mot pour tout ce qui doit être conſervé le plus ſéchement (le gaillard d'arrière faiſant un troiſième pont, met à l'abri de l'eau ces ſortes d'effets); on ne perd point d'eſpace dans la calle, & l'on vient peu-à peu à barroter par-tout au plein des écoutilles, depuis la calle à l'eau juſqu'à la cloiſon des ſoutes à poudre & à pain.

La calle à l'eau eſt compriſe depuis l'arrière du panneau d'avant juſqu'à l'étrave, & eſt arrimée par rangs, antennes & plans, de la même manière que nous l'avons déja dit ci-devant, de ſorte que la calle ſe trouve pleine en total de l'avant à l'arrière.

On met les cables entre pont & tout le rechange, mettant le menu cordage dans les endroits qui ſe trouvent débarraſſés dans des ſoutes que l'on pratique en avant auprès des cambuſes qui ſont auſſi entre pont, & que je trouverois bien mieux placées au milieu, parce qu'elles ne chargeroient pas l'extrémité du vaiſſeau, & qu'elles le fatigueroient moins.

Les ſoutes à poudre ſont, comme dans les autres vaiſſeaux, ſous celles à pain; & les boulets, qui ne vont point dans les parcs, ſe mettent dans l'archi-pompe.

OBSERVATIONS.

Si un vaiſſeau eſt obligé de charger en fer ou plomb, on fait d'abord un grenier en bois de billettes haut de trois pieds environ, & on arrime deſſus une bonne quantité de fer, en laiſſant dans le milieu un vide que l'on remplit à meſure avec du bois, afin de balancer le poids des deux côtés de l'axe du mouvement du roulis, en mêlant dans l'arrimage beaucoup de bois parmi le fer, pour le faire monter plus haut, & le rendre moins mat.

D'autres arriment différemment, en faiſant d'abord un lit de bois, enſuite un lit de plomb, ſur le plomb, un ſecond lit de bois; par-deſſus, un ſecond plan de plomb, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que le vaiſſeau ſoit entièrement chargé, élevant le bois plus ou moins.

Si, au lieu de fer, le vaiſſeau charge de laine, il prend ſon leſt en fer ou plomb, afin de conſerver plus d'eſpace que s'il prenoit des pierres, qui ſont d'un bien plus grand volume, & on le diſpoſe de façon à ne pas rendre le vaiſſeau trop dur dans ſes mouvemens: enſuite on arrime la laine en balles, en ſe ſervant de preſſes, pour ménager l'eſpace. Les Provençaux, qui font le commerce dans le Levant, appellent cette façon d'arrimer *eſtiver à trau.*

Les vaiſſeaux de la Compagnie des Indes, qui chargent richement dans les endroits où ſon commerce eſt établi, à Mahé, en poivre; à Pondicheri, en toiles de coton, mouſſelines de la côte Coromandel, chittes, mouchoirs de toutes eſpèces & caffé moka; à Bengale, en mouſſelines fines & poivres; à la Chine, en porcelaines, thé & ſoieries; aux Iſles de France & de Bourbon, en caffé, prennent beaucoup plus de précautions.

On commence par faire le plan du leſt, & d'un grenier élevé en tout de deux pieds à deux pieds & demi, afin de mettre les marchandiſes au-deſſus de l'eau qui ſe range

toujours au fond : enſuite on met une garniture d'un pied environ tout autour de la calle en rotin, bois de ſapan ou autres eſpèces de bois de cargaiſon, ſelon l'endroit où l'on charge, & par-deſſus le tout un chemiſe de toile à voile que l'on cloue, à meſure que l'on monte avec l'arrimage : cette garniture à bord eſt pour empêcher que l'eau qui s'écoule le long des côtés du navire, ne touche aux marchandiſes : quand tout cela eſt fait, on arrime les caiſſes de thé à la Chine (la porcelaine en bonnes caiſſes étant enterrée dans le leſt dont elle fait partie), par rangs & par plans, en commençant par l'avant à joindre la cloiſon de la calle à l'eau ; on force à coups de maſſe, que l'on frappe ſur des planches qui ſont miſes pour l'inſtant par-deſſus les caiſſes, pour les mettre de niveau les unes avec les autres, de façon qu'il n'y ait pas un coup de ligne de différence : on met auſſi des planches devant les bouts des caiſſes, afin de les faire entrer de force dans les rangs : on fait enſuite entrer des quarts de caiſſe ou demi-caiſſes dans les forains, & l'on ne perd pas un pouce d'eſpace, deſorte qu'il faut ordinairement rompre une caiſſe de chaque rang, pour défaire cet arrimage quand on décharge le vaiſſeau.

Si c'eſt à Pondicheri ou Bengale que l'on charge en ballots, on prend les mêmes précautions, quant à la garniture autour de la calle, & au grenier du leſt ; mais l'on engrave tous les plans de balles avec du poivre (5) en grenier, deſorte que le moindre petit vuide ſe remplit, en même temps que tout eſt préſervé d'inſectes.

On arrime les balles de caffé comme les ballots ; mais l'on n'y met point de poivre, à cauſe du goût : c'eſt le chargement le plus aiſé à faire, parce que tout eſt égal, & les vides ne s'apperçoivent pas.

(5) Cet aarrimage eſt terrible pour la ſanté de ceux qui le font, par la pouſſière qui en ſort, & qui affecte la poitrine.

Lorſqu'on charge en plein avec du grain de même eſpèce, on partage la calle d'un bout a l'autre par le milieu, avec une forte cloiſon du haut en bas bien étançonnée; enſuite on arrime le leſt, comme nous l'avons dit, obſervant de ne pas tant leſter le vaiſſeau, que s'il prenoit une autre cargaiſon; car celle-ci pèſe ordinairement plus que les autres, puiſqu'elle laiſſe moins de vide; & lorſque cela eſt fait, on arrange un grenier de bois, & l'on garnit à bord; enſuite on met une chemiſe par toute la calle, & l'on remplit de grain juſqu'à charger le vaiſſeau; il reſte ordinairement un peu de vide, la cloiſon du milieu ne ſe pratique que pour obvier au riſque qu'une forte bande feroit courir au vaiſſeau, car alors elle empêche le grain du vent de tomber ſous le vent. Si on charge de différentes eſpèces de grains, on fait des parquets pour les ſéparer, & on garnit de toiles.

Défauts des arrimages uſités, & moyens d'y remédier, autant qu'il me paroît poſſible de le faire.

Dans les vaiſſeaux de guerre, les aménagemens de la calle ſont autant bien diſtribués qu'ils puiſſent l'être pour l'objet auquel on les deſtine; mais l'inconvénient que je trouve dans leurs arrimages, vient de ce qu'on ne peut pas tranſporter, à la mer, les parties de la cargaiſon de l'avant à l'arrière, pour remettre avec facilité le vaiſſeau dans ſon aſſiette, quand il l'a perdue, en devenant trop léger dans l'une ou l'autre de ſes extrémités, par la conſommation des vivres ou du bois, ou par celle de ſes munitions de guerre; elles peuvent aller à trente-cinq tonneaux dans une action de quatre ou cinq heures, ſur un vaiſſeau de ſoixante-quatorze canons, comme je l'ai vu

arriver (6); & quand auſſi il ſe trouve trop léger en total, ce qui le met dans le cas de porter peu de voiles & de perdre ſur toutes ſes autres qualités, de bien gouverner, bien marcher, & ne point fatiguer ſa mâture.

Les mêmes inconvéniens ne ſont jamais auſſi conſidérables ſur les vaiſſeaux marchands, parce qu'à proportion de leurs grandeurs, les conſommations ne ſont pas auſſi fortes, deſorte qu'ils ſont toujours aſſez callés; mais leur aſſiette peut également ſe troubler & ſe perdre, s'ils légiſſent plus par une des extrémités que par l'autre.

Un autre inconvénient, qui eſt commun aux vaiſſeaux de guerre comme aux vaiſſeaux marchands, c'eſt que l'on étend le leſt ſur l'avant & l'arrière du centre de gravité du vaiſſeau, de manière que, par rapport au leſt ſeulement, on rend les extrémités du navire preſqu'auſſi peſantes que le milieu, quoiqu'elles ne déplacent pas autant d'eau à beaucoup près; & cette méthode ne contribue pas peu à faire arquer les vaiſſeaux, & à leur rendre le mouvement du tangage fort dur.

On peut aiſément remédier à ces accidens ſur les vaiſſeaux de guerre, en embarquant une certaine quantité de bariques en fagot, afin de pouvoir les monter pour les remplir d'eau de mer, lorſqu'on verra le vaiſſeau trop léger, & qu'il y aura de l'eſpace dans les calles par les conſommations de bois & autres effets, ayant attention de remplir auſſi toutes les autres futailles à meſure qu'elles ſe vident d'eau douce, de viandes ſalées, vin & eau-de-vie; ainſi l'on pourra mettre dans la place du bois à feu qui ſe conſomme, au moins vingt-cinq à trente tonneaux

(6) En 1747, le vaiſſeau du Roi l'Invincible, défendu par les Officiers de la Compagnie des Indes, le 14 Mai, tira 2270 coups de canon & 10000 coups de de fuſil, ce qui fait plus de 40 tonneaux de munitions de guerre, ſans compter plus de 150 hommes, qui furent tués & jettés à la mer pendant l'action qui dura quatre heures. Je cave au plus bas dans ces approximations, qui exactement iroient en total à plus de 52 tonneaux.

d'eau

d'eau de mer, ſans ſe gêner, ſur un vaiſſeau de 74 canons; ce qu'il ſera encore aiſé de paſſer de l'avant dans la foſſe aux cables, ou de l'arrière dans la calle aux vivres, puiſque ce ſont de petites futailles aiſées à manier.

Pour plus de commodité & de certitude, je propoſe un moyen de plus, pour remettre le vaiſſeau en tonture, & en aſſiette à ſa ligne d'eau favorable, quand il l'aura perdue à la mer. Je voudrois avoir dans le faux-pont de chaque côté de l'archi-pompe ou par-deſſus les piéces du dernier plan de la calle, (n'importe où, pourvu que ce ſoit au milieu du vaiſſeau), dix tonneaux de plomb en ſaumons de ſoixante livres, toujours parés au beſoin pour tranſporter de l'avant à l'arrière, ſelon qu'on le jugera néceſſaire, pour eſſayer ſa marche avec d'autres vaiſſeaux, obſervant bien dans ces opérations, la quantité que l'on en tranſportera, avec la diſtance du changement en pieds, & le profit ou perte que l'on fera dans la vîteſſe.

On doit, avant de partir du port, & lorſque le vaiſſeau eſt armé, prêt à prendre la mer, tranſporter les vingt tonneaux de plomb en avant du milieu où on les a placés de dix pieds & voir de combien dix & vingt tonneaux feront caller le vaiſſeau ſur nez, enſuite les porter à dix autres pieds plus loin, & faire la même obſervation, deſorte que continuant la même expérience de dix pieds en dix pieds juſqu'en avant, & prenant toujours note des changemens de la ligne d'eau, on ſera enſuite dans le cas de s'en ſervir à la mer avec connoiſſance; l'on ſaura toujours de combien on fera plonger l'avant de plus qu'il n'étoit, & l'on verra aiſément l'avantage que cela donnera dans la marche & le gouvernail, ou la perte que l'on y fera. L'on fera les mêmes opérations pour la partie de l'arrière & les mêmes obſervations à la mer: cela eſt fort aiſé à pratiquer, il ne faut que la bonne volonté; mais comme les vaiſſeaux de guerre ont leur centre de gravité très-haut, à cauſe de leur artillerie, ces opérations ſe pratiqueront à la mer,

en faiſant paſſer le plomb dans la foſſe aux cables & dans celle aux lions, ſur le faux-pont du théatre, dans la cambuſe & dans la ſoute de rechange du Canonier.

Ces obſervations ſont d'une très-grande conſéquence pour les circonſtances preſſantes de chaſſe; l'on ne peut trop y faire attention dans les temps tranquilles, afin d'en tirer parti dans les événemens critiques.

Dans les cas de chaſſe forcée, où le vaiſſeau donneroit trop de bande, en portant (ſelon la routine) trop de voiles, on pourra faire paſſer dans le faux pont, du côté du vent, les dix tonneaux de plomb qui ſeroient ſous le vent, afin de faire équilibre un peu plus avec l'effort des voiles, & tenir le vaiſſeau gouvernant & droit dans ſes lignes d'eau les plus avantageuſes à ſa marche, ſe tenant d'ailleurs toujours prêt à remettre vivement le même poids à ſa place.

Dans les vaiſſeaux marchands chargés en plein, on diſtribuera le long de l'entrepont, au milieu de la longueur, une dixaine de tonneaux de ce même plomb, pour s'en ſervir dans les mêmes circonſtances, obſervant de le parqueter, afin d'obvier aux accidens d'une trop forte bande, & l'empêcher de tomber tout-à fait ſous le vent.

Obſervation pour les vaiſſeaux garde-côtes ou corſaires.

Les vaiſſeaux de guerre, frégates ou corſaires qui vont en croiſière avec trois ou quatre mois de vivres, ont plus d'eſpace que les autres, puiſqu'ils ne ſont jamais boudés; ainſi ils ont plus d'aiſance à ſe tenir en aſſiette, & à la chercher; ils ne doivent donc négliger aucun des moyens que nous propoſons pour la trouver; ils doivent même ſe ſervir de tous ceux que leur ſagacité pourra leur ſuggérer, afin d'acquerir cette première qualité du vaiſſeau de guerre.

Conclusion du meilleur lestage & arrimage des vaisseaux pour les grands avantages à la mer.

Quand on fait le chargement d'un navire, il faut être persuadé que la vivacité des mouvemens du tangage & du roulis dépendent non-seulement de sa forme, mais encore plus de la distribution plus ou moins avantageuse des parties pesantes de sa cargaison.

On doit d'abord chercher à modérer le tangage, parce que c'est ce qui retarde le sillage, en même temps que le mouvement fatigue extraordinairement un vaisseau & sa mâture: c'est presque toujours dans une de ces secousses qu'on voit les mâts se rompre, particulièrement quand l'avant se relève après avoir plongé.

Le roulis est proportionnellement plus grand que le tangage; mais on ne voit que peu d'accidens arriver par ce mouvement qui est toujours lent: cependant il est à propos de le prévenir le plus qu'il est possible, parce que la lame vient souvent du travers, & porte le vaisseau à de très-grandes inclinaisons sur le côté On y parviendra facilement, sans empêcher le vaisseau de bien porter la voile, en arrimant le lest, quand il est en fer, sur les empâtures des varangues de fond, parce qu'il rappellera avec moins de force le navire, lorsqu'il aura incliné, en agissant sur un point qui sera un peu éloigné tribord & bas-bord plus bas que le centre de gravité du navire chargé: on observera de ne pas faire monter trop haut le lest des deux côtés du vaisseau, en remplissant l'entre-deux du premier & second plan, même du troisième, s'il est nécessaire avec du bois, afin de l'assujettir immuable; ensuite on arrime le reste en plein, sans laisser de vide pour le bois au milieu; & lorsque tout le lest sera disposé & arrimé autour & sous le centre de gravité du vaisseau, comme nous venons de le dire, en l'étendant un peu sur

l'avant & l'arrière (de 20 à 30 pieds) de ce point, en en mettant plus dans l'une ou l'autre de ces parties pour tenir le vaisseau exactement au tirant d'eau marqué par le Constructeur, on arrimera par-dessus très-solidement & à l'ordinaire la cargaison, observant de placer au fond les parties les plus pesantes & les plus capables de supporter le poids des autres que l'on doit arrimer par-dessus.

Je place le lest autour & fort près du centre de gravité du vaisseau, afin de rendre le mouvement du tangage moins rude que si le poids étoit éloigné sur l'avant & l'arrière de ce point.

Le vaisseau n'est jamais porté par une seule lame; lorsque la mer est un peu agitée, il y en a toujours deux ou trois qui passent dessous en même temps, à moins que ce ne soit quand la mer est extrêmement longue, que le houle vient de loin, & dans des parages fort éloignés de terre, alors il arrive que les plus grands vaisseaux sont quelquefois portés par une seule lame (7). Mais dans l'une & l'autre circonstance, je dis qu'il ne faut pas étendre le lest sur l'avant ni sur l'arrière du centre de gravité, aussitôt que le navire est dans la parallèle de son tirant d'eau marqué pour le lest, ce qu'il est absolument essentiel au Constructeur de bien déterminer, afin de faire caller le vaisseau en grand jusqu'au point fixé de sa première ligne d'eau de chargement, que nous supposons être celle que le lest doit donner.

Je vais essayer de prouver ce que j'ai avancé en supposant dans l'un & l'autre cas d'une mer longue ou courte, que l'eau vient choquer le vaisseau de l'avant, afin qu'il soit examiné dans les circonstances du plus grand & du

(7) On trouve à l'est & à l'ouest du Cap de Bonne-espérance depuis les 30° de latitude sud jusqu'au 40, où j'ai été, des mers fort longues & fort élevées, sur-tout quand le vent a soufflé de la partie de l'ouest pendant quelques jours; je crois que plus sud c'est la même chose.

plus vif tangage, comme nous l'avons éprouvé une infinité de fois; car dans le cas ou la lame ſe prend par l'arrière ou la hanche, ſes mouvemens, s'il a de la viteſſe, ne ſont jamais dangereux, parce qu'en fuyant devant le houle, il ſe ſouſtrait en partie à ſon impulſion; & s'il s'en trouve, malgré cela, incommodé, on force de voile, & l'on fuit à la lame (en terme marin); au lieu que dans l'autre hypothèſe, le choc de l'eau augmente ſur la proue en raiſon du quarré de la viteſſe de la lame qui vient choquer la proue, de ſorte que l'impulſion totale de l'eau ſur la partie de la carène choquée, ſe trouve en raiſon compoſée de la ſomme du quarré de la viteſſe de la lame & du quarré de la viteſſe du vaiſſeau qui va la choquer; tandis que dans la circonſtance où le vaiſſeau fuit la lame, la réſiſtance de l'eau ſur la proue eſt en raiſon ſimple du quarré de la viteſſe du vaiſſeau, moins le quarré de l'excès de la viteſſe de l'eau ſur celle du vaiſſeau.

Le vaiſſeau dont les extrémités ſont moins chargées (8), étant ſuppoſé courir avec une viteſſe quelconque au devant de la lame qui vient à lui par l'avant, la choque ſans contredit avec une force exprimée par la ſomme des deux quarrés de la viteſſe du vaiſſeau & de celle de la lame, la diviſe & paſſe au travers, en même temps qu'il eſt élevé par la pouſſée verticale de cette colonne d'eau qui lui oppoſe un poids plus conſidérable que ſon déplacement; la lame qui ſuit produit le même effet, en recevant l'avant du vaiſſeau qui retombe, parce que la première eſt déja au milieu, d'où elle paſſe à l'arrière qu'elle ſoutient, tandis que la ſeconde a pris ſa place au milieu, & que la troiſième ſupporte l'avant en les ſuivant l'une & l'autre: ce

(8) La cargaiſon qui s'arrime ſur le vegre du fond en avant ou de l'arrière eſt moins peſante que le leſt qu'on y met ordinairement, à volume égal; & dans les vaiſſeaux armés en guerre, il y a toujours une grande partie des extrémités de vide ou peu chargée.

mouvement ſe perpétue tant que la mer eſt agitée, d'où il ſuit que le vaiſſeau n'eſt jamais tranquille ; il retombe par ſon propre poids auſſitôt que la lame eſt paſſée, & il retombe moins vivement en raiſon de ce que ſon avant eſt moins peſant, & qu'il eſt balancé par ſon centre de gravité, qui n'eſt jamais fort éloigné du milieu de la plus grande longueur, & où ſe trouve le plus grand poids ; la ſecouſſe eſt donc moins violente, puiſqu'il choque l'eau avec moins de maſſe, ce qui l'empêche de plonger autant que s'il avoit plus de peſanteur ; ainſi la mâture ne ſouffre pas, & le ſillage eſt moins retardé, la partie la plus renflée de la proue ne ſe trouvant que peu expoſée au choc de l'eau.

Si le vaiſſeau ſe trouve porté par une ſeule lame ; il retombe encore moins bas, s'il eſt peu chargé en avant, lorſqu'il n'eſt ſoutenu que par l'arrière ou le milieu ; il ſe relève donc plus aiſément au moment que l'autre lame vient le choquer, & la ſecouſſe eſt moins violente : ſi l'avant étoit plus peſant, il plongeroit davantage en retombant entre les deux lames, & celle qui ſuccède à la première pourroit ſe trouver fort au-deſſus de la proue, (comme cela arrive tous les jours par les arrimages du leſt en plein, & par le trop grand poids des extrémités) ; ainſi la colonne d'eau d'en-haut paſſeroit par-deſſus en partie, parce que le poids du vaiſſeau, réſiſteroit à céder à l'impulſion verticale du pied de la lame, qui ne lui oppoſe pas ſubitement une réſiſtance ſuffiſante, puiſqu'il eſt emporté au-delà de ſon déplacement ordinaire par la vivacité de ſa chute occaſionnée par l'excès de ſa peſanteur. Le vaiſſeau ſe trouvant arrêté tout-d'un-coup dans ſa chute, bien au-deſſus de ſa ligne d'eau de flottaiſon, il ſe fait une ſecouſſe violente en avant qui rappelle vivement toute la mâture auſſi ſur l'avant, parce qu'elle s'étoit portée en arrière pendant le temps de la chute ; mais par ce choc il ſe trouve un retard momentané entre les deux mouvemens

de tomber & de ſe redreſſer ; l'avant eſt rappellé en-haut par un autre mouvement violent occaſionné par un déplacement d'eau plus conſidérable que ſon poids. Ce poids en rappellant enſuite les mâts ſur l'avant avec vivacité, les compromet ſi ſouvent, qu'à la fin ils ſe rompent par une répétition non interrompue de deux ou trois minutes en deux ou trois minutes, qui dure ſouvent plus de vingt-quatre heures ; de plus cette colonne d'eau qui paſſe par-deſſus l'avant, le charge encore davantage, & le fait caller en total juſqu'à ce que toute l'eau ſoit écoulée par les ſabords & les dulots de la ſeconde batterie ; car il arrive quelquefois que le coffre du navire eſt plein : alors le vaiſſeau, trouvant par ce nouveau poids plus de difficulté à s'élever à la lame, peut ſe trouver, par une récidive ſubite, dans le dernier péril.

OBSERVATIONS.

Toutes ces conſidérations bien obſervées dans le leſtage & l'arrimage des vaiſſeaux, ne doivent pas diſpenſer de garder une certaine quantité de leſt mouvant en plomb ſur leurs ponts ou faux-ponts, afin de faire les expériences & les changemens que les circonſtances exigeront : on obſervera ſeulement d'en garder plus ou moins ſelon la grandeur des Bâtimens.

Si dans la totalité du leſt, il y a une grande quantité en pierres ou cailloutage, on pourra arrimer le fer ſur le vaigrage en plein, ſans laiſſer d'intervalle entre les plans de gueuſes ; enſuite ayant fait un petit lit de bois de billetes, on arrimera le premier plan de la cargaiſon, & on l'arrimera avec les pierres & cailloux, n'y mettant de bois que ce qu'il en faudra pour aſſujettir l'arrimage ; cette manière d'arrimer produira le même effet que ſi on avoit tout fer pour leſt, & qu'on l'eût diſpoſé comme nous

l'avons dit, parce que les pierres monteront fort haut, & ne feront point perdre d'eſpace dans l'arrimage, ſi ce n'eſt qu'il n'y entrera pas tant de bois à feu.

Si l'on n'a que du leſt de cailloux, on en fera ſeulement une couche d'un pied de haut, enſuite arrimant deſſus, on engravera le premier & ſecond plan du chargement, même le troiſième, obſervant dans toutes les circonſtances de ne pas trop s'écarter ſur l'avant ni l'arrière du centre de gravité du vaiſſeau.

On peut faire une obſervation (dans le chargement total) qui devroit être, ſelon moi le principe de tout Arrimage; c'eſt de ſuppoſer le vaiſſeau coupé de l'arrière à l'avant dans un certain nombre de tranches verticales, & de faire enſorte que chacune de ces tranches, y compris ſon poids & celui de tout ce qu'elle contient, ne ſoit pas plus peſante que ſon déplacement d'eau; de cette manière, le vaiſſeau ſemble bien porté par-tout ſous ſa charge; mais j'ajoute à cette idée, qu'il vaut mieux, par tout ce que nous avons déja dit, que les tranches des extrémités déplacent plus d'eau qu'elles ne pèſent, parce qu'étant obligées d'enfoncer dans le fluide par leur adhérance aux tranches du milieu que l'on chargera davantage, elles ſeront ſoutenues par la pouſſée verticale de l'eau & empêcheront en partie la tendance que tous les vaiſſeaux ont à ſe délier dans le ſens de leur longueur, en même temps qu'elles diminueront le mouvement du tangage, puiſqu'elles tenderont continuellement à s'élever; ainſi le ſillage ne ſera que peu retardé par ce mouvement qui deviendra très-lent; je regarde la choſe comme ſuſceptible d'une application très-eſſentielle & fort praticable dans les vaiſſeaux de guerre qui ont toujours une grande partie de leur calle à vide.

Réflexions

Réflexions sur les changemens qui se trouveront dans les qualités du vaisseau, lorsqu'il sera plus ou moins chargé en avant ou en arrière.

Si on charge le vaisseau plus sur nez, sa ligne d'eau la plus avantageuse 1 deviendra 2, en augmentant par son renflement la résistance du fluide sur la proue, & le déplacement d'eau de l'avant, d'où il résulte une diminution de viteſſe à impulsion égale de la part du vent; si au contraire on charge le vaisseau plus sur cul, la ligne d'eau 1 deviendra 3, en augmentant le déplacement d'eau de l'arrière, & diminuant la résistance du fluide sur la proue, puisque la ligne d'eau devient plus douce; d'où il résulteroit une augmentation de viteſſe à impulsion égale de la part du vent; mais il faut faire attention que l'arrière de la carène, en plongeant davantage par ce second mouvement, présente au cours de l'eau, très-obliquement à la vérité, une plus grande partie de sa surface submergée, ce qui pourroit devenir équivalent à-peu-près à ce que l'on gagne de l'autre côté. Une autre considération plus secrette, & qui certainement est un obstacle à la rapidité du sillage, c'est que le point vélique, dans le premier cas, monte, puisqu'en plongeant davantage, la proue se présente plus directement au fluïde, tandis que le centre d'effort des voiles reste à la même élévation; d'où il suit dans la circonstance rare de la mâture parfaite, que le vaisseau n'a plus assez de voilure, puisque l'impulsion de l'eau sur la proue a augmenté, en élevant la direction de son effort absolu, en même temps que le centre de gravité du navire a aussi changé de place, en s'approchant un peu de l'avant de C en B. Il en résulte une plus grande puissance aux voiles de l'arrière pour faire venir le vaisseau au vent, pendant que le gouvernail, en sortant un peu Figure III.

de l'eau, perd de ſon effet, de ſorte que le vaiſſeau peut devenir très-ardent & obligé d'avoir preſque toujours ſa barre au vent, en préſentant continuellement une grande partie de la ſurface du gouvernail au cours de l'eau, ce qui devient encore une cauſe de diminution de viteſſe; la vérité de ces conſéquences m'a toujours été confirmée par l'expérience, dans le cas où des vaiſſeaux paſſablement conſtruits, ont été trop callés ſur l'avant.

Lorſque le vaiſſeau ſe trouve trop chargé ſur l'arrière, il en réſulte des effets tout contraires; le point vélique baiſſe parce que la proue, en ſortant de l'eau, ſe préſente plus obliquement au fluïde, & la direction de l'impulſion abſolue ſur la proue coupant la verticale au centre de gravité de la ſurface de flottaiſon (qui a changé ainſi que celui du vaiſſeau, un peu plus ou un peu moins, en s'approchant de l'arrière de C en A) montre le point vélique bien audeſſous du centre d'effort des voiles. Le vaiſſeau ſe trouvant alors trop de voiture, incline facilement ſur le côté, & diminue par conſéquent ſa diſpoſition la plus avantageuſe pour diviſer le fluïde, en même temps que les voiles d'avant acquierent plus de puiſſance, à cauſe de leur poſition plus éloignée du centre de gravité; ainſi le navire devient lâche, & on eſt obligé de ſe ſervir continuellement du gouvernail & des voiles de l'arrière pour le rappeller au vent; c'eſt encore ce qui m'a été confirmé par l'expérience.

Ces obſervations ne ſont ſenſibles dans les grands vaiſſeaux que lorſque la différence de leur tirant d'eau le plus favorable eſt audeſſus de ſix pouces, car la plupart du temps ſi elle eſt audeſſous, il ne ſe fait pas un grand changement dans les qualités du navire.

Il réſulte de tout ce que nous venons d'expliquer, qu'il n'y a qu'une ſeule ligne d'eau favorable pour la plus grande viteſſe du vaiſſeau, de quelque figure qu'il ſoit, & cette ligne d'eau doit être connue & déterminée par le calcul

du plan pour la plus avantageuſe de toutes celles qu'on peut lui donner ſous charge ; c'eſt aux Conſtructeurs à la déterminer même avant de mettre le vaiſſeau ſur chantier ; car c'eſt celle qui doit auſſi leur ſervir pour fixer le plus ou le moins d'élévation de mâture, en déterminant le centre d'effort des voiles à la hauteur du point vélique donné par la ligne d'eau la plus avantageuſe de la carène ſous charge, pour bien gouverner, marcher, & porter la voile dans les routes obliques.

J'obſerve que quand je dis vaiſſeaux ſous charge, je ſuppoſe le vaiſſeau de guerre armé & prêt à faire voile pour combattre ; & le vaiſſeau marchand dans le même cas ſous cargaiſon complète.

Les vaiſſeaux juſqu'à préſent n'ont jamais été mâtés auſſi parfaitement qu'ils auroient pu l'être, puiſque les Conſtructeurs ſe ſont pour ainſi dire fait une loi de s'écarter de plus en plus des vrais principes, en élevant dans ces derniers temps la mâture plus qu'elle ne l'avoit encore été, quoiqu'elle fût déja trop haute ; ainſi le centre d'effort des voiles a conſtamment été audeſſus du point vélique, ce qui fait qu'on a vu quelquefois des vaiſſeaux avoir plus d'avantage, lorſqu'ils ont été plus chargés ſur le nez que ne le demandoit leur meilleure ligne d'eau de viteſſe en charge ; mais nous ſommes en état par le tranſport d'une partie du leſt mouvant de l'avant à l'arrière de faire baiſſer ou monter le point vélique de quelque choſe ; ainſi on peut trouver une poſition plus avantageuſe pour la marche, dans l'état actuel de la mâture que celle que devroit naturellement avoir le vaiſſeau s'il étoit bien mâté ; car il pourra ſe faire qu'elle ſoit plus analogue à ſa mâture actuelle, que ſa vraie poſition, dans le cas où il ſeroit mâté parfaitement, ne le ſeroit avec les mâts trop élevés qu'on lui donne toujours ; d'où il réſulte que le vaiſſeau n'eſt pas à beaucoup près dans ſon état de perfection, quelque bien chargé qu'il ſoit.

Il ne reſte plus qu'à voir les Conſtructeurs ſe donner la peine dans la ſuite de chercher, ce qui n'eſt pas difficile, la ligne d'eau de flottaiſon la plus avantageuſe pour allier & déterminer toutes les qualités des vaiſſeaux qu'ils conſtruiront; enſuite qu'ils ayent le courage de mettre tout préjugé de routine à part, en mâtant ſelon le point vélique de cette ligne d'eau, diſpoſant en même temps l'effort latéral des voiles en équilibre exact autour du point où l'impulſion de l'eau ſur la proue coupe l'axe du vaiſſeau dans la route oblique; & nous aurons certainement des vaiſſeaux qui par ces diſpoſitions favorables de la mâture parfaite, & celles que l'on pourra donner à leurs arrimages, ſeront dans l'aſſiete de leur plus grande viteſſe, que l'on trouvera, à ce que je préſume, bien au delà de ce que nous pouvons avoir vu juſqu'à préſent, à coupe de carène égale & ſemblable.

J'ajoûte que, comme les qualités du navire ne dépendent pas ſeulement de la perfection de ſa mâture & de ſon chargement, il faut encore lui procurer la durée (9), en lui donnant une forme qui, en diviſant bien le fluide, le rende doux à la mer, en même-temps qu'on le rendra ſolide par la force de ſa charpente; c'eſt-à-dire, qu'il tanguera peu, & ſa mâture ne fatiguera pas, non plus que ſes liaiſons bien placées; ſi ſon mouvement eſt doux, ſon ſillage ne ſera point interrompu & ſa vîteſſe ſera uniforme alors, ce qui eſt le but du bon arrimage & de ce que je me ſuis propoſé dans cet Ouvrage.

---

(9) La durée des vaiſſeaux doit être un objet principal du Conſtructeur; les vaiſſeaux que l'on conſtruit aujourd'hui ne paſſent pas huit ans ſans être refondus, & il en coûte autant que pour en faire de neufs. On s'eſt fauſſement imaginé que la légereté prouvoit la plus grande viteſſe; ſans faire attention que c'eſt la coupe la plus ſavante & la plus propre à diviſer le fluide & à rendre le vaiſſeau doux dans ſes mouvemens, quelque ſolide qu'il ſoit.

Objection à la méthode que je prescris pour la meilleure façon d'arrimer les vaisseaux.

Les extrêmités du vaisseau étant plus légères que leur déplacement d'eau, tendront continuellement à s'élever; ainsi la lame pourra les mettre en mouvement avec plus de facilité, & les élever davantage par son impulsion, ce qui fera augmenter considérablement la vivacité & la secousse du tangage, parce qu'elles tomberont de plus haut.

Cette objection, qui m'a été faite par un Marin consommé, tombe cependant d'elle-même, ou je me trompe fort; car les deux extrêmités du vaisseau doivent être également légeres, & déplacer un plus grand volume d'eau que leur poids selon notre principe; ainsi elles tendront l'une & l'autre à s'élever par la poussée verticale qui agit continuellement; desorte que quand le choc de la lame viendra ajoûter son effort à cette disposition continuelle à s'élever; l'autre partie, qui ne sera pas choquée, résistera de plus en plus à plonger, & s'opposera par conséquent à l'élévation de la partie sur laquelle la lame agit; ainsi l'avant ne cédera pas avec plus de facilité que s'il étoit plus pesant; mais supposons qu'il s'éleve effectivement plus haut, il doit retomber dans ce cas avec plus de vîtesse, mais la masse est moindre; d'où il est aisé de conclure que le moment de cette partie plus élevée est moindre que celui qu'elle produiroit si elle retomboit de moins haut avec plus de masse. Toutes choses sont à-peu-près égales jusqu'à présent, mais je trouve ensuite plus d'avantage à rendre les extrêmités légères dans le cas où un coup de mer de l'avant passe par-dessus le vaisseau; car alors la tendance des extrêmités à s'élever servira, dans cet instant critique, à

débaraſſer le vaiſſeau de deſſous la colonne d'eau qui le ſurcharge ; ce qu'il ne pourra jamais faire avec autant de promptitude ſi ſes extrêmités ſont plus peſantes que leur déplacement d'eau. Un Auteur a avancé néanmoins que cela devoit être ; mais c'eſt d'après d'autres principes que je ne trouve pas convaincans.

FIN.

RECHERCHES
SUR LES INÉGALITÉS
DES SATELLITES DE JUPITER,
CAUSÉES PAR LEUR ATTRACTION MUTUELLE.

PIÉCE qui a remporté le prix proposé par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de Paris pour l'année 1766.

Par M. DE LA GRANGE, de l'Académie de Berlin, de la Société Royale des Sciences de Turin, & Associé étranger de l'Académie Royale des Sciences de Paris.

TABLE

DES TITRES contenus dans cette Dissertation.

CHAPITRE I. *Formules générales pour le mouvement des Satellites de Jupiter.* . . . . ART. I.
CHAPITRE II. *Détermination des forces perturbatrices des Satellites* . . . . . IX.
CHAPITRE III. *Calcul des perturbations des Satellites.* . . . . . XXIV.
§. I. *Premières formules du mouvement des Satellites* . . . . . XXLV.
§. II. *Valeurs numériques des coéfficiens des formules précédentes* . . . . . XLIII.
§. 3. *Formules des rayons vecteurs & des longitudes vraies des Satellites de Jupiter, par rapport au plan de l'orbite de cette Planète* . . . . . XLIX.
§. 4. *Où l'on donne les inégalités des Satellites qui dépendent de leurs configurations, & qui ont lieu au tems des éclipses* . . . . . LII.
§. 5. *Comparaison des formules précédentes avec les observations, & conséquences qui en réſultent par rapport aux masses des Satellites.* . . . . . LVII.
CHAPITRE. IV. *Suite du calcul des perturbations des Satellites.* . . . . . LXXV.
§. 1. *Premières valeurs du mouvement des apſides & des nœuds des Satellites.* . . . . . LXXVIII.

§. 2. *Où l'on montre la néceſſité d'avoir égard dans les calculs de l'équation du centre & de la latitude, à quelques termes de l'ordre n, des équations* (G) & (K) . . . . . LXXXVII.

§. 3. *Où l'on donne une nouvelle méthode pour intégrer les équations précédentes.* . . . . . XCII.

§. 4. *Sur les inégalités des Satellites qui dépendent de la période de 12 ans.* . . . . . CXVI.

§. 5. *Des durées des éclipſes des Satellites.* . . CXIX.

§. 6. *Des inclinaiſons & des nœuds des Satellites.* CXXV.

Fin de la Table.

RECHERCHES

SUR LES INÉGALITÉS

DES

SATELLITES DE JUPITER,

CAUSÉES PAR LEUR ATTRACTION MUTUELLE.

Multùm adhuc reſtat operis *Sen.* |*Epiſt. 64.*

CHAPITRE I.

Formules générales pour le mouvement des Satellites de Jupiter.

ARTICLE PREMIER.

SOIENT nommés :

Le rayon vecteur de l'orbite d'un ſatellite quelconque projettée ſur le plan de l'orbite de Jupiter ..... r

La tangente de la latitude du ſatellite par rapport à ce même plan..... p

La force que Jupiter exerce sur le satellite à la distance 1 ... F

On aura la distance du satellite au plan de l'orbite de Jupiter ..... rp

Donc la distance du satellite au centre de Jupiter sera ..... $r\sqrt{1+p^2}$

Par conséquent la force, par laquelle le satellite est poussé vers Jupiter sera ..... $\frac{F}{r^2(1+p^2)}$

Cette force peut être regardée comme composée de deux autres.

L'une parallèle au rayon vecteur & égale à ... $\frac{F}{r^2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}$

L'autre perpendiculaire au plan de l'orbite de Jupiter & égale à ..... $\frac{Fp}{r^2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}$

Or on peut en général réduire les forces perturbatrices du satellite à trois forces uniques, dont

La première que j'appelle ..... R soit parallèle au rayon r.

La seconde que j'appelle ..... Q soit perpendiculaire au rayon vecteur, & parallèle au plan de l'orbite de Jupiter.

La troisième que j'appelle ..... P soit perpendiculaire à ce même plan.

Donc le satellite sera sollicité dans les directions dont nous parlons, par les forces $\frac{F}{r^2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}+R$, Q, $\frac{Fp}{r^2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}+P$; dont les deux premières déterminent le mouvement que le satellite doit avoir dans le plan de l'orbite de Jupiter, ou pour mieux dire, parallélement à ce plan.

II.

Cela posé, soit le tems écoulé depuis le commencemen

du mouvement ..... t

L'angle décrit par le rayon r durant ce tems ..... φ

L'élément du tems dt constant, c'est-à-dire, $ddt = 0$.

On aura pour la vitesse circulatoire du satellite, parallélement au plan de l'orbite de Jupiter $\frac{rd\varphi}{dt}$, d'où résulte la force centrifuge $\frac{r^2 d\varphi^2}{rdt^2} = \frac{rd\varphi^2}{dt^2}$, laquelle étant retranchée de la force $\frac{F}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + R$, on aura la véritable force qui tend à diminuer le rayon r.

Donc, par le principe des forces accélératrices, on aura

$$-\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{F}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + R - \frac{rd\varphi^2}{dt^2} \quad \text{..... (A)}$$

Maintenant on fait que, si la force perpendiculaire Q étoit nulle, le rayon r décriroit des aires proportionnelles aux tems, de sorte que l'on auroit, à cause de dt constant, $\frac{d.(r^2 d\varphi)}{2} = 0$; mais la force Q fait parcourir perpendiculairement à r l'espace Qdt^2 pendant le tems dt; donc le secteur $\frac{r^2 d\varphi}{2}$ croîtra pendant ce temps de la quantité $\frac{Qrdt^2}{2}$; par conséquent on aura l'équation $d.(r^2 d\varphi) = Qrdt^2$, dont l'intégrale, en ajoutant cdt, est $r^2 d\varphi = cdt + dt\int Qrdt$; d'où l'on tire

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c + \int Qrdt}{r^2} \quad \text{..... (B)}$$

Enfin on aura, en vertu de la force perpendiculaire au plan de l'orbite de Jupiter, $-\frac{d^2(pr)}{dt^2} = \frac{Fp}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + P$, ou bien $\frac{d^2p}{dt^2} + \frac{2dpdr}{rdt^2} + \frac{pd^2r}{rdt^2} + \frac{Fp}{r^3(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{P}{r} = 0$, d'où, en mettant pour $\frac{d^2r}{rdt^2}$, sa valeur $\frac{d\varphi^2}{dt^2} - \frac{F}{r^3(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R}{r}$ tirée

de l'équation (A), & effaçant ce qui se détruit, on aura l'équation suivante :

$$\frac{d^2r}{dt^2} + p\frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{2dpdr}{rdt^2} + \frac{P-Rp}{r} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

III.

Les équations (A), (B), (C) donneront r, φ & p en t, ce qui suffira pour faire connoître le lieu du satellite à chaque instant. Que si on vouloit connoître la figure même de l'orbite qu'il décrit, il faudroit éliminer des équations (A), (C) l'élément dt. Or, de l'équation (B), on tire, après quelques réductions fort simples, $dt = \frac{r^2 d\varphi}{\sqrt{c^2 + 2\int Qr^3 d\varphi}}$; donc si on substitue cette valeur dans (A), (C), & qu'on fasse pour plus de simplicité, $\frac{1}{r} = u$; on aura, en prenant $d\varphi$ constant,

$$\frac{ddu}{d\varphi^2} + u - \frac{F(1+p^2)^{\frac{3}{2}} + Rr^2 - Q\frac{dr}{d\varphi}}{c^2 + 2\int Qr^3 d\varphi} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

$$\frac{d^2p}{d\varphi^2} + p + \frac{r^3\left(P - pR + Q\frac{dp}{d\varphi}\right)}{c^2 + 2\int Qr^3 d\varphi} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

Supposons pour un moment que les forces perturbatrices P, Q, R soient nulles, on aura par l'équation (c), $\frac{d^2p}{d\varphi^2} + p = 0$; dont l'intégrale est, comme on sait, $p = G\sin.\varphi + H\cos.\varphi$; ou bien $p = \lambda\sin.(\varphi - \varepsilon)$, λ & ε étant deux constantes arbitraires. Cette dernière expression de p fait voir que l'orbite est toute dans un plan fixe, dont la position dépend des quantités λ, ε, qui expriment, la première, la tangente de l'inclinaison ; & la seconde, la longitude du nœud. Retenons maintenant cette même expression de p, & supposons, à cause des forces perturbatrices, λ & ε variables, on aura $dp = d\lambda\sin.(\varphi - \varepsilon) + \lambda\cos.(\varphi - \varepsilon)(d\varphi - d\varepsilon)$; or afin que le corps puisse être regardé comme se mouvant réellement

ment dans le plan déterminé par λ & ε, il faut que la valeur de dp soit la même que si ces quantités demeuroient constantes, c'est-à-dire, que $dp = \lambda \cos.(\varphi - \varepsilon) d\varphi$; donc $d\lambda \sin.(\varphi - \varepsilon) = \lambda \cos.(\varphi - \varepsilon) d\varepsilon$; par conséquent, à cause de $d\varphi$ constant, $\frac{d^2p}{d\varphi^2} = -\lambda \sin.(\varphi - \varepsilon) + \frac{\lambda d\varepsilon}{\sin.(\varphi - \varepsilon) d\varphi}$, & $\frac{d^2p}{d\varphi^2} + p = \frac{\lambda d\varepsilon}{\sin.(\varphi - \varepsilon) d\varphi}$. On réduira ainsi l'équation (c) ci-dessus à deux équations du premier degré, qui donneront λ & ε en φ ; d'où l'on connoîtra la variation de l'inclinaison de l'orbite, & le mouvement de la ligne des nœuds. C'est ainsi que la plupart des Géomètres en ont usé jusqu'ici dans la recherche des orbites des planètes ; mais il nous paroît plus court de chercher directement la latitude p par une seule équation ; d'autant plus que les quantités λ & ε s'en déduiront plus aisément ; car puisque $p = \lambda \sin.(\varphi - \varepsilon)$, & $\frac{dp}{d\varphi} = \lambda \cos.(\varphi - \varepsilon)$, on aura $\lambda = \sqrt{p^2 + \frac{dp^2}{d\varphi^2}}$, & $tang.(\varphi - \varepsilon) = \frac{pd\varphi}{dp}$.

On pourroit faire une pareille transformation sur l'équation (a) ; ce qui réduiroit l'orbite à une ellipse dont l'excentricité, & la position de la ligne des apsides seroient variables, ainsi que M. Newton l'a pratiqué par rapport à la Lune. En effet, si on suppose d'abord Q, R, & $p = 0$, l'équation (a) devient $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - \frac{F}{c^2} = 0$, dont l'intégrale, étant mise sous cette forme $u - \frac{F}{c^2} = \rho \cos.(\varphi - \alpha)$, donne une ellipse dans laquelle $\frac{c^2}{F}$ est le demi-parametre, $\frac{\rho c^2}{F}$ l'excentricité, & α la longitude de l'apside inférieure. Qu'on regarde maintenant ρ & α comme variables, & qu'on suppose, par une raison analogue à celle que nous avons

expliquée ci-deſſus, $du = -\rho \, \mathit{ſin.}(\varphi - \alpha) d\varphi$, on trouvera ;

$d\rho \, \mathit{coſ.}(\varphi - \alpha) + \rho \, \mathit{ſin.}(\varphi - \alpha) d\alpha = 0$, & $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - \frac{F}{c^2} = \frac{\rho d\alpha}{\mathit{coſ.}(\varphi - \alpha) d\varphi}$.

Ainſi l'équation (a) ſe réduira à deux équations du premier degré d'où l'on tirera aiſément ρ & α.

IV.

Les obſervations nous apprennent que les inégalités des mouvemens des ſatellites de Jupiter ſont très-petites, auſſi bien que les inclinaiſons de leurs orbites, par rapport à l'orbite de cette Planète ; d'où il ſuit que ſi on nomme

La valeur moyenne de r . . . . . a

La valeur moyenne de $\frac{d\varphi}{dt}$, c'eſt-à-dire la viteſſe angulaire moyenne . . . . . μ

& qu'on dénote par n un coefficient très-petit, & par x, y, z, des quantités variables, on aura les expreſſions ſuivantes

$$r = a(1 + nx)$$
$$\varphi = \mu t + ny$$
$$p = nz$$

où l'on remarquera que les valeurs de x & de $\frac{dy}{dt}$ ne doivent contenir aucun terme conſtant ; autrement a & μ ne ſeroient plus les valeurs moyennes de r & de $\frac{d\varphi}{dt}$ ce qui eſt contre l'hypothèſe.

V.

Subſtituons maintenant ces expreſſions de r, φ, p dans les équations de l'art. II, & négligeons les termes qui ſe trouveroient multipliés par des puiſſances de n plus hautes que n^2, parce qu'une plus grande exactitude ſeroit ſuperflue dans le ſujet que nous traitons, nous changerons

d'abord l'équation (A) en celle-ci :

$$-na\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{a^2}\left(1 - 2nx + 3n^2x^2\right)\left(1 - \tfrac{3}{2}n^2z^2\right) + R$$
$$- a(1+nx)\times\left(\mu^2 + 2n\mu\frac{dy}{dt} + n^2\frac{dy^2}{dt^2}\right); \text{ ou bien}$$

$$na\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{F}{a^2} - a\mu^2 - n\left(\frac{2F}{a^2} + a\mu^2\right)x + n^2\frac{F}{a^2}\left(3x^2 - \tfrac{3}{2}z^2\right) - 2na\mu\frac{dy}{dt}$$
$$- 2n^2a\mu x\frac{dy}{dt} - n^2a\frac{dy^2}{dt^2} + R = 0.$$

Si n étoit $=0$, on auroit $\frac{F}{a^2} - a\mu^2 + R = 0$; donc, n étant très-petite, la quantité $\frac{F}{a^2} - a\mu^2 + R$ devra l'être auſſi ; deſorte qu'on pourra ſuppoſer $R + \frac{F}{a^2} - a\mu^2 = n\frac{F}{a^2}X$.

Cette ſubſtitution faite, on diviſera toute l'équation par na, & l'on aura, en mettant pour plus de ſimplicité, f au lieu de $\frac{F}{a^3}$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} - (2f+\mu^2)x - 2\mu\frac{dy}{dt} + fX \\ + nf\left(3x^2 - \frac{3}{2}z^2\right) - 2n\mu x\frac{dy}{dt} - n\frac{dy^2}{dt^2} \end{array}\right\} = 0.$$

VI.

L'équation (B) deviendra, par les mêmes ſubſtitutions,

$$\mu + n\frac{dy}{dt} = \left(\frac{c}{a^2} + \frac{\int Q(1+nx)dt}{a}\right)\left(1 - 2nx + 3n^2x^2\right).$$

Si $n=0$, on auroit $\int Q dt = a\mu - \frac{c}{a}$; ſuppoſons donc

$$\int Q(1+nx)dt = a\mu - \frac{c}{a} + n\frac{F}{a^2}Y,$$

on aura, après les réductions :

$$\frac{dy}{dt} = -2\mu x + fY + 3n\mu^2 - 2nfxY.$$

VII.

Enfin l'équation (C) ſe changera en celle-ci :

$n\frac{d^2\zeta}{dt^2}+nz\left(\mu^2+2n\mu\frac{dy}{dt}\right)+2n^2\frac{d\zeta dx}{dt^2}+\frac{P-nR\zeta}{a(1+nx)}=0$; & l'on prouvera ici, comme on fait ci-deſſus, qu'il faut que la quantité P ſoit très-petite de l'ordre n ; c'eſt pourquoi nous ſuppoſerons ..... $\frac{P-nR\zeta}{1+nx}=n\frac{F}{a^2}Z$, d'où nous aurons l'équation

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\mu^2z+fZ+2n\mu z\frac{dy}{dt}+2n\frac{d\zeta dx}{dt^2}=0.$$

VIII.

Voila les formules par leſquelles on pourra déterminer les inégalités des ſatellites de Jupiter, dès qu'on aura trouvé les valeurs des quantités X, Y, Z qui réſultent de leur action mutuelle.

Pour rendre ces formules encore plus commodes pour le calcul, nous ſubſtituerons dans celles des art. V & VII, la valeur de $\frac{dy}{dt}$ tirée de l'art. VI.

De cette manière, on aura, en négligeant toujours les termes affectés de n^3, n^4, &c.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2}+(3\mu^2-2f)x+fX-2\mu fY\\&-n(6\mu^2-3f)x^2-\tfrac{3}{2}nfz^2+6n\mu fxY-nf^2Y^2\end{aligned}\right\}=0\ldots(D)$$

$$\frac{dy}{dt}+2\mu x-fY-3n\mu x^2+2nfxY=0\ldots\ldots(E)$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\mu^2z+fZ-4n\mu^2zx+2n\frac{d\zeta dx}{dt^2}+2n\mu fzY=0\ldots(F)$$

Nous avons dit que les valeurs de x & $\frac{dy}{dt}$ ne doivent renfermer aucun terme constant ; on remplira ces deux conditions par le moyen des constantes f & c.

CHAPITRE II.

Détermination des forces perturbatrices des Satellites de Jupiter.

IX.

Soit la masse de Jupiter ..... $\mathfrak{T}$
La masse du premier satellite ..... $\mathfrak{C}^{I}$
du second satellite ..... $\mathfrak{C}^{II}$
du troisième satellite ..... $\mathfrak{C}^{III}$
du quatrième satellite ..... $\mathfrak{C}^{IV}$

Supposons de plus que toutes les quantités que nous avons nommées r, p, φ, F, R, Q, P, &c, dans le Chapitre précédent, soient designées ici, relativement au premier satellite, par r^{I}, p^{I}, φ^{I}, F^{I}, R^{I}, Q^{I}, P^{I}, &c ; relativement au second satellite, par r^{II}, p^{II}, φ^{II}, F^{II}, R^{II}, Q^{II}, &c ; relativement au troisième, par r^{III}, p^{III}, φ^{III}, F^{III}, &c ; & relativement au quatrième, par r^{IV}, p^{IV}, φ^{IV}, &c.

En général, nous conserverons toujours dans la suite les noms donnés dans les articles précédens, avec cette seule différence que nous marquerons les lettres d'un trait pour le premier satellite, de deux traits pour le second satellite, &c.

Enfin nous dénoterons, pour plus de simplicité, la

distance entre deux satellites quelconques, c'est-à-dire, la ligne droite qui joint leurs centres, par $\Delta(r, r)$; r, r, étant les rayons vecteurs des deux satellites: ainsi la distance entre le premier & le second satellite sera désignée par $\Delta(r^{I}, r^{II})$, la distance entre le premier & le troisième par $\Delta(r^{I}, r^{III})$, & ainsi des autres.

X.

Cela posé, il est visible, 1.° que le satellite $\mathfrak{C}^{I}$ est attiré vers Jupiter avec une force $= \frac{\mathfrak{T}}{r^{I2}(1+p^{I2})}$, & qu'en même temps Jupiter est attiré lui-même vers le satellite avec une force $= \frac{\mathfrak{C}^{I}}{r^{I2}(1+p^{I2})}$; d'où il suit, que la force totale qui tend à rapprocher le satellite de Jupiter est $\frac{\mathfrak{T}+\mathfrak{C}^{I}}{r^{I2}(1+p^{I2})}$. Cette expression doit être comparée avec l'expression de la force centrale $\frac{F}{r^{2}(1+p^{2})}$ (art. I), c'est-à-dire, en la rapportant au premier satellite, avec $\frac{F^{I}}{r^{I2}(1+p^{I2})}$, ce qui donne d'abord ..... $F^{I} = \mathfrak{T}+\mathfrak{C}^{I}$.

2.° Que le satellite $\mathfrak{C}^{I}$ est attiré vers le satellite $\mathfrak{C}^{II}$ avec une force $= \frac{\mathfrak{C}^{II}}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{2}}$, laquelle peut se décomposer en deux autres: l'une dans la direction du rayon mené du satellite $\mathfrak{C}^{I}$ à Jupiter, qui sera $= \frac{\mathfrak{C}^{II} r^{I} \sqrt{1+p^{I2}}}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}}$: l'autre parallèle au rayon mené du satellite $\mathfrak{C}^{II}$ à Jupiter, & qui sera $\frac{\mathfrak{C}^{II} r^{II} \sqrt{1+p^{II2}}}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}}$.

De plus le même satellite $\mathfrak{C}^{I}$ doit être regardé comme attiré par une force égale, & en sens contraire à celle avec laquelle Jupiter est attiré par le satellite $\mathfrak{C}^{II}$, c'est-à-dire,

par une force $= \frac{\mathfrak{C}^{II}}{r^{II2}(1+p^{II2})}$, & dirigée parallélement au rayon mené de ce dernier satellite à Jupiter. Donc l'action du satellite $\mathfrak{C}^{II}$ produit dans le satellite $\mathfrak{C}^{I}$ deux forces: l'une $= \frac{\mathfrak{C}^{II} r^{I} \sqrt{1+p^{I2}}}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}}$ dirigée vers Jupiter, l'autre $= \mathfrak{C}^{II} \left(\frac{1}{r^{II2}(1+p^{II2})} - \frac{r^{II}\sqrt{1+p^{II2}}}{\Delta r^{I}, r^{II})^{3}} \right)$ dans une direction parallèle à celle qui va du satellite $\mathfrak{C}^{II}$ à Jupiter.

3.° Or la force $\frac{\mathfrak{C}^{II} r^{I} \sqrt{1+p^{I2}}}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}}$ se décompose en deux autres: l'une perpendiculaire au plan de l'orbite de Jupiter $= \frac{\mathfrak{C}^{II} r^{I} p^{I}}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}}$, l'autre parallèle au même plan dans la direction du rayon r^{I}, qui sera $= \frac{\mathfrak{C}^{II} r^{I}}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}}$. Pareillement la force $\mathfrak{C}^{II} \left(\frac{1}{r^{II2}(1+p^{II2})} - \frac{r^{II}\sqrt{1+p^{II2}}}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}} \right)$ se change en deux autres forces: l'une perpendiculaire au plan de l'orbite de Jupiter, $= \mathfrak{C}^{II} \left(\frac{p^{II}}{r^{II2}(1+p^{II2})^{\frac{3}{2}}} - \frac{r^{II} p^{II}}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}} \right)$, & l'autre parallèle à ce plan dans la direction du rayon $r^{II} = \mathfrak{C}^{II} \left(\frac{1}{r^{II2}(1+p^{II2})^{\frac{3}{2}}} - \frac{r^{II}}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}} \right)$. Enfin cette dernière force se décompose encore en deux autres: l'une dans la direction du rayon r^{I}, avec lequel le rayon r^{II} fait l'angle $\varphi^{II} - \varphi^{I}$; l'autre perpendiculaire à cette direction; la première sera exprimée par $\mathfrak{C}^{II} \left(\frac{1}{r^{II2}(1+p^{II2})^{\frac{3}{2}}} - \frac{r^{II}}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}} \right) cos.(\varphi^{II} - \varphi^{I})$, la seconde par $\mathfrak{C}^{II} \left(\frac{1}{r^{II2}(1+p^{II2})^{\frac{3}{2}}} - \frac{r^{II}}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}} \right) sin.(\varphi^{II} - \varphi^{I})$ & tendera à diminuer l'angle φ^{I}, au lieu que nous avons supposé

(art. II) que la force perpendiculaire Q tendoit à augmenter l'angle φ; c'eſt pourquoi il faudra la prendre négativement.

4.° comparant donc toutes ces forces avec les forces R, Q, P (art. I), ou bien R^{I}, Q^{I}, P^{I} (art. IX) on aura en conſéquence de l'action du ſatellite $\mathfrak{C}^{II}$ les expreſſions ſuivantes:

$$R^{I}=\mathfrak{C}^{II}\left(\frac{r^{I}-r^{II}\,cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I})}{\Delta(r^{I},r^{II})^{3}}+\frac{cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I})}{r^{II\,2}(1+p^{II\,2})^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$Q^{I}=\mathfrak{C}^{II}\left(\frac{r^{II}\,ſin.(\varphi^{II}-\varphi^{I})}{\Delta(r^{I},r^{II})^{3}}-\frac{ſin.(\varphi^{II}-\varphi^{I})}{r^{II\,2}(1+p^{II\,2})^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$P^{I}=\mathfrak{C}^{II}\left(\frac{r^{I}p^{I}-r^{II}p^{II}}{\Delta(r^{I},r^{II})^{3}}+\frac{p^{II}}{r^{II\,2}(1+p^{II\,2})^{\frac{1}{2}}}\right)$$

On trouvera de la même manière les expreſſions des forces R^{I}, Q^{I}, P^{I}, en tant qu'elles réſultent de l'action des ſatellites $\mathfrak{C}^{III}$ & $\mathfrak{C}^{IV}$; & il eſt clair qu'on aura les mêmes formules que ci-deſſus, en marquant ſeulement de trois traits ou de quatre traits, les lettres qui ſont marquées de deux traits.

XI.

Si on veut avoir égard auſſi à l'action du ſoleil ſur le ſatellite $\mathfrak{C}^{I}$ on nommera;

La maſſe du Soleil . . . . . $\odot$
La diſtance du ſatellite $\mathfrak{C}^{I}$ au Soleil . . . . . δ^{I}
Le rayon vecteur de l'orbite du Soleil autour de Jupiter... ρ^{I}
La longitude du Soleil vu du centre de $\mathfrak{Z}$ . . . . . ψ,

& il n'y aura qu'à mettre dans les expreſſions de R^{I}, Q^{I}, P^{I} de l'article X, $\odot$ au lieu de $\mathfrak{C}^{II}$, δ^{I} au lieu de $\Delta(r^{I},r^{II})$, ρ^{I} au lieu de r^{II}, ψ au lieu de φ^{II}, & ſuppoſer $p^{II}=0$. De cette manière on aura, en vertu de l'action du Soleil

$R^{I}=$

$$R^{I} = \odot\left(\frac{r^{I} - \rho^{I}\,cos.(\downarrow - \varphi^{I})}{\delta^{I\,3}} + \frac{cos.(\downarrow - \varphi^{I})}{\rho^{I\,2}}\right)$$

$$Q^{I} = \odot\left(\frac{\rho^{I}\,sin.(\downarrow - \varphi^{I})}{\delta^{I\,3}} - \frac{sin.(\downarrow - \varphi^{I})}{\rho^{I\,2}}\right)$$

$$P^{I} = \odot\,\frac{r^{I} p^{I}}{\delta^{I\,3}}$$

XII.

Donc en joignant enſemble les forces qui proviennent de l'action des trois ſatellites $\mathbb{C}^{II}$, $\mathbb{C}^{III}$, $\mathbb{C}^{IV}$, & du Soleil ſur le ſatellite $\mathbb{C}^{I}$, on aura les valeurs complettes de R^{I}, Q^{I}, P^{I} exprimées de la manière ſuivante:

$$R^{I} = \mathbb{C}^{II}\left(\frac{r^{I} - r^{II}\,cos.(\varphi^{II} - \varphi^{I})}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}} + \frac{cos.(\varphi^{II} - \varphi^{I})}{r^{II\,2}(1 + p^{II\,2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$
$$+ \mathbb{C}^{III}\left(\frac{r^{I} - r^{III}\,cos.(\varphi^{III} - \varphi^{I})}{\Delta(r^{I}, r^{III})^{3}} + \frac{cos.(\varphi^{III} - \varphi^{I})}{r^{III\,2}(1 + p^{III\,2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$
$$+ \mathbb{C}^{IV}\left(\frac{r^{I} - r^{IV}\,cos.(\varphi^{IV} - \varphi^{I})}{\Delta(r^{I}, r^{IV})^{3}} + \frac{cos.(\varphi^{IV} - \varphi^{I})}{r^{IV\,2}(1 + p^{IV\,2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$
$$+ \odot\left(\frac{r^{I} - \rho^{I}\,cos.(\downarrow - \varphi^{I})}{\delta^{I\,3}} + \frac{cos.(\downarrow - \varphi^{I})}{\rho^{I\,2}}\right)$$

$$Q^{I} = \mathbb{C}^{II}\left(\frac{r^{II}\,sin.(\varphi^{II} - \varphi^{I})}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}} - \frac{sin.(\varphi^{II} - \varphi^{I})}{r^{II\,2}(1 + p^{II\,2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$
$$+ \mathbb{C}^{III}\left(\frac{r^{III}\,sin.(\varphi^{III} - \varphi^{I})}{\Delta(r^{I}, r^{III})^{3}} - \frac{sin.(\varphi^{III} - \varphi^{I})}{r^{III\,2}(1 + p^{III\,2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$
$$+ \mathbb{C}^{IV}\left(\frac{r^{IV}\,sin.(\varphi^{IV} - \varphi^{I})}{\Delta(r^{I}, r^{IV})^{3}} - \frac{sin.(\varphi^{IV} - \varphi^{I})}{r^{IV\,2}(1 + p^{IV\,2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$
$$+ \odot\left(\frac{\rho^{I}\,sin.(\downarrow - \varphi^{I})}{\delta^{I\,3}} - \frac{sin.(\downarrow - \varphi^{I})}{\rho^{I\,2}}\right)$$

$$P^{I} = \mathbb{C}^{II}\left(\frac{r^{I} p^{I} - r^{II} p^{II}}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}} + \frac{p^{II}}{r^{II\,2}(1 + p^{II\,2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+\mathfrak{C}^{III}\left(\frac{r^{I}p^{I}-r^{III}p^{III}}{\Delta(r^{I},r^{III})^{3}}+\frac{p^{III}}{r^{III2}(1+p^{III2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+\mathfrak{C}^{IV}\left(\frac{r^{I}p^{I}-r^{IV}p^{IV}}{\Delta(r^{I},r^{IV})^{3}}+\frac{p^{IV}}{r^{IV2}(1+p^{IV2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+\odot\frac{r^{I}p^{I}}{\delta^{I3}}$$

XIII.

Telles ſont les expreſſions des forces perturbatrices du ſatellite $\mathfrak{C}^{I}$; d'où il eſt facile de déduire celles des trois autres ſatellites $\mathfrak{C}^{II}$, $\mathfrak{C}^{III}$, $\mathfrak{C}^{IV}$. En effet un peu de réflexion ſuffit pour faire voir que les quantités R^{I}, Q^{I}, P^{I}, deviendront R^{II}, Q^{II}, P^{II}, en marquant ſeulement de deux traits les lettres qui ſont marquées d'un trait, & réciproquement: ainſi l'on aura pour les forces perturbatrices du ſecond ſatellite les expreſſions ſuivantes :

$$R^{II}=\mathfrak{C}^{I}\left(\frac{r^{II}-r^{I}\,cof.(\varphi^{I}-\varphi^{II})}{\Delta(r^{II},r^{I})^{3}}+\frac{cof.(\varphi^{I}-\varphi^{II})}{r^{I2}(1+p^{I2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+\mathfrak{C}^{III}\left(\frac{r^{II}-r^{III}\,cof.(\varphi^{III}-\varphi^{II})}{\Delta(r^{II},r^{III})^{3}}+\frac{cof.(\varphi^{III}-\varphi^{II})}{r^{III2}(1+p^{III2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+\mathfrak{C}^{IV}\left(\frac{r^{II}-r^{IV}\,cof.(\varphi^{IV}-\varphi^{II})}{\Delta(r^{II},r^{IV})^{3}}+\frac{cof.(\varphi^{IV}-\varphi^{II})}{r^{IV2}(1+p^{IV2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+\odot\left(\frac{r^{II}-\rho^{I}\,cof.(\psi-\varphi^{II})}{\delta^{II3}}+\frac{cof.(\psi-\varphi^{II})}{\rho^{I2}}\right)$$

$$Q^{II}=\mathfrak{C}^{I}\left(\frac{r^{I}\,sin.(\varphi^{I}-\varphi^{II})}{\Delta(r^{II},r^{I})^{3}}-\frac{sin.(\varphi^{I}-\varphi^{II})}{r^{I2}(1+p^{I2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+\mathfrak{C}^{III}\left(\frac{r^{III}\,sin.(\varphi^{III}-\varphi^{II})}{\Delta(r^{II},r^{III})^{3}}-\frac{sin.(\varphi^{III}-\varphi^{II})}{r^{III2}(1+p^{III2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+\mathfrak{C}^{IV}\left(\frac{r^{IV}\,sin.(\varphi^{IV}-\varphi^{II})}{\Delta(r^{II},r^{IV})^{3}}-\frac{sin.(\varphi^{IV}-\varphi^{II})}{r^{IV2}(1+p^{IV2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+\odot\left(\frac{\rho^{I}\,sin.(\psi-\chi^{II})}{\delta^{II3}}-\frac{sin.(\psi-\varphi^{II})}{\rho^{I2}}\right)$$

$$P^{II} = \mathfrak{C}^{I}\left(\frac{r^{II}p^{II}-r^{I}p^{I}}{\Delta(r^{II},r^{I})^{3}}+\frac{p^{I}}{r^{I2}(1+p^{I2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$
$$+\mathfrak{C}^{III}\left(\frac{r^{II}p^{II}-r^{III}p^{III}}{\Delta(r^{II},r^{III})^{3}}+\frac{p^{III}}{r^{III2}(1+p^{III2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$
$$+\mathfrak{C}^{IV}\left(\frac{r^{II}p^{II}-r^{IV}p^{IV}}{\Delta(r^{II},r^{IV})^{3}}+\frac{p^{IV}}{r^{IV2}(1+p^{IV2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$
$$+\odot\frac{r^{II}p^{II}}{d^{II3}}$$

On aura pareillement les expreſſions de R^{III}, Q^{III}, P^{III}, & de R^{IV}, Q^{IV}, P^{IV}, en marquant ſucceſſivement de trois traits & de quatre traits les lettres qui ne ſont marquées que d'un ſeul trait dans les expreſſions de R^{I}, Q^{I}, P^{I}, & réciproquement.

XIV.

Il reſte à chercher les valeurs des quantités $\Delta(r^{I},r^{II})$, $\Delta(r^{I},r^{III})$, &c, qui expriment les diſtances entre le premier ſatellite & le ſecond, entre le premier & le troiſième, &c. (art. IX). Or il eſt facile de trouver qu'on aura $\Delta(r^{I},r^{II})^{2} = (r^{II}p^{II}-r^{I}p^{I})^{2}+\big(r^{I}\,\mathit{ſin.}\,(\varphi^{II}-\varphi^{I})\big)^{2}$ $\big(+r^{II}-r^{I}\,\mathit{coſ.}(\varphi^{II}-\varphi^{I})\big)^{2} = r^{I2}(1+p^{I2})-2r^{I}r^{II}\big(\mathit{coſ.}(\varphi^{II}-\varphi^{I})+p^{I}p^{II}\big)+r^{II2}(1+p^{II2})$, donc tirant la racine quarrée $\Delta(r^{I},r^{II}) = \sqrt{r^{I2}(1+p^{I2})-2r^{I}r^{II}\,(\mathit{coſ.}(\varphi^{II}-\varphi^{I})+p^{I}p^{II})+r^{II2}(1+p^{II2})}$

On trouvera pareillement

$$\Delta(r^{I},r^{III}) = \sqrt{r^{I2}(1+p^{I2})-2r^{I}r^{III}\,(\mathit{coſ.}(\varphi^{III}-\varphi^{I})+p^{I}p^{III})+r^{III2}(1+p^{III2})}$$

& ainſi des autres. On voit par-là que $\Delta(r^{II},r^{I}) = \Delta(r^{I},r^{II})$, car l'expreſſion de cette dernière quantité demeure la même, en changeant r^{I}, p^{I}, φ^{I} en r^{II}, p^{II}, φ^{II}, & réciproquement; ce qui eſt d'ailleurs évident.

XV.

Pour avoir maintenant la valeur de δ^{I}, il n'y aura qu'à changer dans celle de $\Delta(r^{I}, r^{II})$, r^{II} en ρ^{I}, φ^{II} en ψ, & effacer la quantité p^{II} (art. XI); on aura donc ainsi

$$\delta^{I} = \sqrt{r^{I2}(1+p^{I2}) - 2r^{I}\rho^{I}\cos.(\psi-\varphi^{I}) + \rho^{I2}};$$

on trouvera pareillement

$$\delta^{II} = \sqrt{r^{II2}(1+p^{II2}) - 2r^{II}\rho^{I}\cos.(\psi-\varphi^{II}) + \rho^{I2}},$$ & ainsi des autres.

XVI.

Nous avons supposé (article X) que l'attraction de Jupiter sur les satellites étoit exactement en raison inverse du quarré des distances; c'est ce qui n'est rigoureusement vrai, qu'en regardant Jupiter comme un globe de densité uniforme.

Or on sait par les observations & par la théorie, que cette Planète est considérablement applatie; de plus il peut se faire qu'elle ne soit pas par-tout de la même densité; deux circonstances qui peuvent aussi influer sur le mouvement des satellites, & auxquelles il est bon par conséquent d'avoir égard ici. Pour cela nous supposerons 1.° que la figure de Jupiter soit celle d'un sphéroïde elliptique peu différent d'une sphère; 2.° que ce sphéroïde soit formé d'une infinité de couches toutes sphéroïdiques, & de densités différentes. 3.° Que l'équateur de Jupiter soit dans le plan de l'orbite de cette Planète.

Cette dernière supposition n'est pas tout-à-fait exacte; car on sait que l'équateur de Jupiter est incliné d'environ trois degrés sur le plan de son orbite; mais l'erreur qui en résulte est si petite qu'il seroit superflu d'en tenir compte.

Cela posé, soit A le demi-axe d'une couche quelconque, E son ellipticité, & D sa densité; on trouvera par les

théorèmes de la figure de la Terre de M. Clairaut (§. XXVI & XLVI seconde Partie) que l'attraction de Jupiter sur un satellite quelconque produit deux forces : l'une dirigée au centre de Jupiter $= \frac{2\pi}{r^2(1+p^2)}\left(\int DA^2dA + \frac{2}{3}\int Dd.(A^3E)\right) + \frac{2\pi(1-2p^2)}{5r^4(1+p^2)^{\frac{5}{2}}}\int Dd.(A^5E)$; l'autre perpendiculaire à cette direction dans le plan d'un méridien $= \frac{4\pi p}{5r^4(1+p^2)^{\frac{5}{2}}}\int Dd.(A^5E)$; (π dénote ici la périphérie d'un cercle dont le rayon $= 1$). La partie $\frac{2\pi}{r^2(1+p^2)}\left(\int DA^2dA + \frac{2}{3}\int Dd.(A^3E)\right)$ de la première de ces deux forces, étant réciproquement proportionnelle au quarré de la distance, doit être comparée avec la force $\frac{\Psi}{r^2(1+p^2)}$ (art. X) ; d'où l'on aura $\Psi = 2\pi\left(\int DA^2dA + \frac{1}{2}\int Dd.(A^3E)\right)$. L'autre partie de la même force : $\frac{2\pi(1-2p^2)}{5r^4(1+p^2)^{\frac{5}{2}}}\int Dd.(A^5E)$, aussi bien que la force perpendiculaire $\frac{4\pi p}{5r^4(1+p^2)^{\frac{5}{2}}}\int Dd.(A^5E)$, devront être regardées comme des forces perturbatrices, & par conséquent décomposées suivant les directions de R, Q, P ; cette decomposition étant faite, on aura les deux forces suivantes : $\frac{2\pi}{5r^4} \times \frac{1-4p^2}{(1+p^2)^{\frac{7}{2}}}\int Dd.(A^5E)$, dans la direction de la force R, & $\frac{2\pi}{5r^4} \times \frac{3p-2p^3}{(1+p^2)^{\frac{7}{2}}}\int Dd.(A^5E)$ dans la direction de la force P ; donc si on suppose $\nu = \frac{\int Dd.(A^5E)}{A^2\left(\int DA^2dA + \frac{2}{3}\int Dd.(A^3E)\right)}$; les forces perturbatrices R & P qui résultent de l'applatissement de Jupiter, & de l'hétérogénéité de ses couches seront en général . . . . . $R = \frac{\nu A^2\Psi(1-4p^2)}{5r^4(1+p^2)^{\frac{7}{2}}}$

&c. . . . . $P=\frac{\nu A^2\Pi(3r-2p^1)}{5r^4(1+p^{12})^{\frac{7}{2}}}$

d'où l'on tire, par rapport au premier ſatellite

$R^{\mathrm{I}}=\frac{\nu A^2\Pi(1-4p^{\mathrm{I}2})}{5r^{\mathrm{I}4}(1+p^{\mathrm{I}2})^{\frac{7}{2}}}$, & $P^{\mathrm{I}}=\frac{\nu A^2\Pi(3p^{\mathrm{I}}-2p^{\mathrm{I}3})}{5r^{\mathrm{I}4}(1+p^{\mathrm{I}2})^{\frac{7}{2}}}$;

par rapport au ſecond ſatellite,

$R^{\mathrm{II}}=\frac{\nu A^2\Pi(1-4p^{\mathrm{II}2})}{5r^{\mathrm{II}4}(1+p^{\mathrm{II}2})^{\frac{7}{2}}}$, & $P^{\mathrm{II}}=\frac{\nu A^2\Pi(3p^{\mathrm{II}}-2p^{\mathrm{II}3})}{5r^{\mathrm{II}4}(1+p^{\mathrm{II}2})^{\frac{7}{2}}}$, & ainſi des autres.

Il n'y aura donc qu'à ajouter ces valeurs à celles des articles XII & XIII. Au reſte comme l'applatiſſement de Jupiter n'eſt que d'environ $\frac{1}{14}$, ſuivant les dernières obſervations, la quantité E ſera fort petite, auſſi bien que la quantité ν; de plus le rapport de A^2 à r^2 ſera toujours exprimé par une fraction fort petite; de ſorte que les forces perturbatrices, dont nous venons de parler, ſeront néceſſairement très-petites.

Si on ſuppoſe D conſtante, on aura $\nu=\frac{3E}{1+2E}$. En général, quelle que ſoit D, on aura, par les conditions de l'équilibre, $\int Dd.(A^5E)=5A^4(E-\frac{1}{2}\zeta)\int DA^2dA$, ($\zeta$ étant le rapport de la force centrifuge à la peſanteur, ſous l'équateur); donc $\nu=5E-\frac{1}{2}\zeta$ à-très-peu-près.

XVII.

Il faut maintenant développer les expreſſions des forces perturbatrices P, Q, R, en employant les ſuppoſitions de l'article V. Pour cela nous remarquerons d'abord que nous pouvons négliger dans ce calcul tous les termes de l'ordre n^2; parce que les quantités P, Q, R ſont déja elles-mêmes de l'ordre n, comme nous le verrons plus bas. Donc mettant premièrement dans la valeur de $\Delta(r^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{II}})$, art. XIV, au lieu de r^{I}, $a^{\mathrm{I}}(1+n\lambda^{\mathrm{I}})$, au lieu de p^{I}, nz^{I}; &

de même, au lieu de r^{II}, $a^{II}(1+nx^{II})$ & au lieu de p^{II}, nz^{II}, suivant ce que nous avons dit à l'art. IX, on aura:

$$\Delta(r^I, r^{II}) = \sqrt{a^{I2}(1+2nx^I) - 2a^I a^{II}(1+nx^I+nx^{II})\cos.(\varphi^{II}-\varphi^I) + a^{II2}(1+2nx^{II})}$$

$$= \sqrt{a^{I2} - 2a^I a^{II}\cos.(\varphi^{II}-\varphi^I) + a^{II2} + 2n(a^{I2}x^I + a^{II2}x^{II}) - 2na^I a^{II}(x^I+x^{II})\cos.(\varphi^{II}-\varphi^I)}$$

d'où l'on tire, par les séries,

$$\frac{1}{\Delta(r^I, r^{II})^3} = \left(a^{I2} - 2a^I a^{II}\cos.(\varphi^{II}-\varphi^I) + a^{II2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$- 3n\left(a^{I2}x^I + a^{II2}x^{II} - a^I a^{II}(x^I+x^{II})\cos.(\varphi^{II}-\varphi^I)\right) \times$$

$$\left(a^{I2} - 2a^I a^{II}\cos.(\varphi^{II}-\varphi^I) + a^{II2}\right)^{-\frac{5}{2}} + \&c.$$

On trouvera de même:

$$\frac{1}{\Delta(r^I, r^{III})^3} = \left(a^{I2} - 2a^I a^{III}\cos.(\varphi^{III}-\varphi^I) + a^{III2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$- 3n\left(a^{I2}x^I + a^{III2}x^{III} - a^I a^{III}(x^I+x^{III})\cos.(\varphi^{III}-\varphi^I)\right) \times \left(a^{I2}\right.$$

$$\left. - 2a^I a^{III}\cos.(\varphi^{III}-\varphi^I) + a^{III2}\right)^{-\frac{5}{2}} + \&c.$$

Et pareillement

$$\frac{1}{\Delta(r^I, r^{IV})^3} = \left(a^{I2} - 2a^I a^{IV}\cos.(\varphi^{IV}-\varphi^I) + a^{IV2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$- 3n\left(a^{I2}x^I + a^{IV2}x^{IV} - a^I a^{IV}(x^I+x^{IV})\cos.(\varphi^{IV}-\varphi^I)\right) \times \left(a^{I2}\right.$$

$$\left. - 2a^I a^{IV}\cos.(\varphi^{IV}-\varphi^I) + a^{IV2}\right)^{-\frac{5}{2}} + \&c.$$

Et ainsi des autres.

XVIII.

Mais il se présente ici une difficulté, par rapport aux quantités $\left(a^{I2} - 2a^I a^{II}\cos.(\varphi^{II}-\varphi^I) + a^{II2}\right)^{-\frac{3}{2}}$, $\left(a^{I2} - 2a^I a^{II}\cos.(\varphi^{II}-\varphi^I) + a^{II2}\right)^{-\frac{5}{2}}$ &c; c'est de pouvoir les réduire à une forme rationelle; condition absolument nécessaire pour l'intégration des équations des satellites.

Pour résoudre cette difficulté, on écrira d'abord les radicaux proposés ainsi: $a^{II-3}\left(1 - \frac{2a^I}{a^{II}}\cos.(\varphi^{II}-\varphi^I) + \frac{a^{I2}}{a^{II2}}\right)^{-\frac{3}{2}}$, $a^{II-5}\left(1 - \frac{2a^I}{a^{II}}\cos.(\varphi^{II}-\varphi^I) + \frac{a^{I2}}{a^{II2}}\right)^{-\frac{5}{2}}$ &c; & la question se

réduira à changer en une fonction rationelle, une quantité de cette forme $(1-2q\,cof.\theta+q^2)^{-\lambda}$, dans laquelle q eſt un nombre moindre que l'unité.

Pour y parvenir, je remarque que la quantité $1-2q\,cof.\theta+q^2$ eſt égale au produit de ces deux quantités: $1-q(cof.\theta+ſin.\theta\sqrt{-1})$, & $1-q(cof.\theta-ſin.\theta\sqrt{-1})$; je les élève donc l'une & l'autre à la puiſſance $-\lambda$, en écrivant au lieu du quarré de $cof.\theta\pm ſin.\theta\sqrt{-1}$, $cof.2\theta\pm ſin.2\theta\sqrt{-1}$, & ainſi de ſuite; j'ai $(1-q(cof.\theta\pm ſin.\theta\sqrt{-1}))^{-\lambda}=1+\lambda q(cof.\theta\pm ſin.\theta\sqrt{-1})+\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}q^2(cof.2\theta+ſin.2\theta\sqrt{-1})+\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{1\cdot 3}q^3(cof.3\theta\pm ſin.3\theta\sqrt{-1})+$ &c.

Soit pour abréger,

$1+\lambda q\,cof.\theta+\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}q^2cof.2\theta+\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{2\cdot 3}q^3cof.3\theta$ &c. $=M$,

$\lambda q\,ſin.\theta+\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}q^2ſin.2\theta+\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+1)}{2\cdot 3}q^3ſin.3\theta$ &c. $=N$

on aura:

$(1-q(cof.\theta+ſin.\theta\sqrt{-1}))^{-\lambda}=M+N\sqrt{-1}$, &

$(1-q(cof.\theta-ſin.\theta\sqrt{-1}))^{-\lambda}=M-N\sqrt{-1}$; donc

$(1-q\,cof.\theta+q^2)^{-\lambda}=(M+N\sqrt{-1})\times(M-N\sqrt{-1})=M^2+N^2$.

Or ſi on fait les quarrés des deux ſéries M & N, qu'on ajoute enſemble les termes qui ont le même coefficient, & qu'on remarque que $cof.m\theta\times cof.n\theta+ſin.m\theta\times ſin\,n\theta$ eſt $=cof.(m-n)\theta$, m & n étant des nombres quelconques, on trouvera $(1-2q\,cof.\theta+q^2)^{-\lambda}=A+B\,cof.\theta+C\,cof.2\theta+D\,cof.3\theta+$ &c. Et les coefficiens A, B, C, &c. ſeront exprimés de la manière ſuivante.

$A=1+\lambda^2q^2+\frac{\lambda^2(\lambda+1)^2}{2^2}q^4+\frac{\lambda^2(\lambda+1)^2(\lambda+2)^2}{2^2\cdot 3^2}q^6+$ &c.

$B=$

$$B = 2\lambda q + 2\lambda \times \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} q^3 + 2\frac{\lambda(\lambda+1)}{2} \times \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{2\cdot 3} q^5 + 2\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{2\cdot 3} \times \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{2\cdot 3\cdot 4} q^7 + \&c.$$

$$C = 2\frac{\lambda(\lambda+1)}{2} q^2 + 2\lambda \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{2\cdot 3} q^4 + \&c.$$

& ainſi de ſuite.

Au reſte il ne ſera néceſſaire que de connoître les deux premiers coefficiens A, B, pour avoir tous les autres C, D, &c; car on trouvera par les formules de l'article XXVI de la Piéce ſur le mouvement de Saturne (Prix 1748)

$$C = \frac{(1+q^2)B - 2\lambda q A}{(2-\lambda)q}$$

$$D = \frac{2(1+q^2)C - (1+\lambda)qB}{(3-\lambda)q}$$

$$E = \frac{3(1+q^2)D - (2+\lambda)qC}{(4-\lambda)q}$$ & ainſi de ſuite.

XIX.

Tout conſiſte donc à déterminer les valeurs de A, & B; Or, dans la théorie des ſatellites de Jupiter, la plus grande valeur de q eſt d'environ $\frac{2}{3}$, comme on le verra plus bas; donc q^2 ſera toujours moindre que $\frac{1}{2}$; donc ſi on fait $\lambda = \frac{3}{2}$, les ſuites A & B ſeront aſſez convergentes pour qu'on puiſſe ſe contenter d'un petit nombre de termes. Ces ſuites ſeront repréſentées en général par celles-ci

$$A = 1 + \frac{9}{4} q^2 + \frac{9}{4} \times \frac{25}{16} q^4 + \frac{9}{4} \times \frac{25}{16} \times \frac{49}{36} q^6 + \&c.$$

$$\frac{B}{2} = \frac{3}{2} q + \frac{9}{4} \times \frac{5}{4} q^3 + \frac{9}{4} \times \frac{25}{16} \times \frac{7}{6} q^5 + \&c.$$

dont les coefficiens numériques ſont très aiſés à calculer.

Voici les logarithmes de ces coefficiens pour les différentes puiſſances de q qui entrent dans les deux ſéries

dont il s'agit ; les logarithmes qui répondent aux puissances paires de q sont ceux des coefficiens des termes de la série A ; & les logarithmes qui répondent aux puissances impaires de q sont ceux des coefficiens des termes de la série $\frac{B}{2}$.

q	0. 176091	q^{16}	1. 047096	q^{31}	1. 315612
q^2	0. 352182	q^{17}	1. 070577	q^{32}	1. 328976
q^3	0. 449092	q^{18}	1. 094058	q^{33}	1. 341565
q^4	0. 546002	q^{19}	1. 115247	q^{34}	1. 354154
q^5	0. 612949	q^{20}	1. 136436	q^{35}	1. 366053
q^6	0. 679896	q^{21}	1. 155741	q^{36}	1. 377952
q^7	0. 731049	q^{22}	1. 175046	q^{37}	1. 389233
q^8	0. 782202	q^{23}	1. 192775	q^{38}	1. 400514
q^9	0. 823595	q^{24}	1. 210504	q^{39}	1. 411238
q^{10}	0. 864988	q^{25}	1. 226895	q^{40}	1. 421962
q^{11}	0. 899750	q^{26}	1. 243286	q^{41}	1. 432181
q^{12}	0. 934512	q^{27}	1. 258526	q^{42}	1. 442400
q^{13}	0. 964475	q^{28}	1. 273766	q^{43}	1. 452160
q^{14}	0. 994438	q^{29}	1. 288007	q^{44}	1. 461920
q^{15}	1. 020767	q^{30}	1. 302248	&c.	&c.

Il ne s'agira donc plus que d'ajouter à chacun de ces logarithmes celui de la puissance correspondante de q, &

de chercher enſuite le nombre qui répond à chaque ſomme ; on aura ainſi les valeurs d'autant de termes des deux ſéries A & $\frac{B}{2}$, qu'on voudra ; d'où l'on pourra tirer pour A & B des valeurs auſſi approchées qu'on le croira néceſſaire. Pour juger de la quantité de l'approximation, on remarquera que les differences des logarithmes de la table précédente forment une progreſſion décroiſſante ; d'où il ſuit que ſi après avoir pris la ſomme d'un nombre quelconque de termes de la ſérie A ou $\frac{B}{2}$, on regarde le reſte de la ſérie comme une progreſſion géométrique, l'erreur ſera toujours moindre que la ſomme de cette progreſſion. Au reſte dans le cas même où q ſera la plus grande (ce cas eſt celui où $q = \frac{a^{\text{II}}}{a^{\text{III}}} = \frac{900}{1438}$, comme on le verra dans la ſuite) ; il ſuffira de prendre les dix premiers termes des ſéries A & $\frac{B}{2}$, pour avoir les valeurs de ces coefficiens en millièmes, c'eſt-à-dire aux dix-millièmes près, & en prenant encore trois ou quatre termes, on pouſſera l'exactitude juſqu'aux dix-millièmes & au-delà.

XX.

Ayant ainſi les valeurs des coefficiens A, B, C, &c. de la ſuite qui repréſente $(1 - 2q\,cof.\theta + q^2)^{-\frac{3}{2}}$ on trouvera aiſément ceux de la ſuite qui exprime $(1 - 2q\,cof.\theta + q^2)^{-\frac{5}{2}}$; car dénotant ces derniers par (A), (B), (C), &c. il faudra que la ſérie $(A) + (B)\,cof.\theta + (C)\,cof.2\theta +$ &c. étant multipliée par $1 - 2q\,cof.\theta + q^2$, devienne égale à la ſérie $A + B\,cof.\theta + C\,cof.2\theta +$ &c. La multiplication faite, on trouvera, en comparant les deux premiers termes :

$A = (1+q^2)(A) - q(B)$, &

$B = (1+q^2)(B) - 2q(A) - q(C)$.

Or (C) eſt donné en (A) & (B) de la même manière que C eſt donné en A & B ; il ſuffira pour cela de mettre dans l'expreſſion de C (art. XVIII, (A) au lieu de A, (B) au lieu de B, (C) au lieu de C, & $\lambda+1$ au lieu de λ; ce qui donnera $(C)=\frac{(1+q^2)(B)-2(\lambda+1)q(A)}{(1-\lambda)q}$; donc ſi on ſubſtitue cette valeur de (C), on aura deux équations en $A, B, (A), (B)$, d'où l'on tirera $(A)=\frac{(1+q^2)A+\frac{\lambda-1}{\lambda}qB}{(1-q^2)^2}$; $(B)=\frac{\frac{\lambda-1}{\lambda}(1+q^2)B+4qA}{(1-q^2)^2}$. Connoiſſant (A) & (B), on connoîtra tous les ſuivans (art. XVIII).

XXI.

De ce qu'on vient de démontrer, il ſuit qu'on peut ſuppoſer :

$$\left(a^{I2}-2a^{I}a^{II}\cos.(\varphi^{II}-\varphi^{I})+a^{II2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\Gamma(a^{I},a^{II})+\Gamma 1(a^{I},a^{II})\cos.(\varphi^{II}-\varphi^{I})+\Gamma 2(a^{I},a^{II})\cos.2(\varphi^{II}-\varphi^{I})+\Gamma 3(a^{I},a^{II})\cos.3(\varphi^{II}-\varphi^{I})+\&c.\ \&$$

$$\left(a^{I2}-2a^{I}a^{II}\cos.(\varphi^{II}-\varphi)+a^{II2}\right)^{-\frac{5}{2}}=\Lambda(a^{I},a^{II})+\Lambda 1(a^{I},a^{II})\cos.(\varphi^{II}-\varphi^{I})+\Lambda 2(a^{I},a^{II})\cos.2(\varphi^{II}-\varphi^{I})+\Lambda 3(a^{I},a^{II})\cos.3(\varphi^{II}-\varphi^{I})+\&c.$$

J'entends par $\Gamma(a^{I},a^{II})$, $\Gamma 1(a^{I},a^{II})$, $\Gamma 2(a^{I},a^{II})$, &c ; $\Lambda(a^{I},a^{II})$, $\Lambda 1(a^{I},a^{II})$, $\Lambda 2(a^{I},a^{II})$, &c. des fonctions données de a^{I}, a^{II} ; dont on trouvera la valeur par les méthodes des articles précédens.

Donc ſi on fait ces ſubſtitutions dans la quantité $\frac{1}{\Delta(r^{I},r^{II})^{3}}$ (art. XVII), & qu'on développe les produits des ſinus & des coſinus, on trouvera

$$\frac{1}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}} =$$

$$\Gamma(a^{I}, a^{II}) + \Gamma 1(a^{I}, a^{II}) \cos.(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \Gamma 2(a^{I}, a^{II}) \cos.2(\varphi^{II} - \varphi^{I})$$
$$+ \Gamma 3(a^{I}, a^{II}) \cos.3(\varphi^{II} - \varphi^{I}) \text{ \&c.}$$

$$- 3nx^{I}\left(a^{I2}\Lambda(a^{I}, a^{II}) - a^{I}a^{II}\frac{\Lambda 1(a^{I}, a^{II})}{2}\right)$$

$$- 3nx^{I}\left(a^{I2}\Lambda 1(a^{I}, a^{II}) - a^{I}a^{II}\frac{2\Lambda(a^{I}, a^{II}) + \Lambda 2(a^{I}, a^{II})}{2}\right)\cos.(\varphi^{II} - \varphi^{I})$$

$$- 3nx^{I}\left(a^{I2}\Lambda 2(a^{I}, a^{II}) - a^{I}a^{II}\frac{\Lambda 1(a^{I}, a^{II}) + \Lambda 3(a^{I}, a^{II})}{2}\right)\cos.2(\varphi^{II} - \varphi^{I}) \text{ \&c.}$$

$$- 3nx^{II}\left(a^{II2}\Lambda(a^{I}, a^{II}) - a^{I}a^{II}\frac{\Lambda 1(a^{I}, a^{II})}{2}\right)$$

$$- 3nx^{II}\left(a^{II2}\Lambda 1(a^{I}, a^{II}) - a^{I}a^{II}\frac{2\Lambda(a^{I}, a^{II}) + \Lambda 2(a^{I}, a^{II})}{2}\right)\cos.(\varphi^{II} - \varphi^{I})$$

$$- 3nx^{II}\left(a^{II2}\Lambda 2(a^{I}, a^{II}) - a^{I}a^{II}\frac{\Lambda 1(a^{I}, a^{II}) + \Lambda 3(a^{I}, a^{II})}{2}\right)\cos.2(\varphi^{II} - \varphi^{I}) \text{ \&c.}$$

XXII.

Soit fait, pour plus de simplicité :

$$\Pi(a^{I}, a^{II}) = \frac{a^{I}a^{II}\Lambda 1(a^{I}, a^{II}) - 2a^{I2}\Lambda(a^{I}, a^{II})}{2}$$

$$\Pi 1(a^{I}, a^{II}) = \frac{a^{I}a^{II}\Lambda 2(a^{I}, a^{II}) - 2a^{I2}\Lambda 1(a^{I}, a^{II}) + 2a^{I}a^{II}\Lambda(a^{I}, a^{II})}{2}$$

$$\Pi 2(a^{I}, a^{II}) = \frac{a^{I}a^{II}\Lambda 3(a^{I}, a^{II}) - 2a^{I2}\Lambda 2(a^{I}, a^{II}) + a^{I}a^{II}\Lambda 1(a^{I}, a^{II})}{2}$$

$$\Pi 3(a^{I}, a^{II}) = \frac{a^{I}a^{II}\Lambda 4(a^{I}, a^{II}) - 2a^{I2}\Lambda 3(a^{I}, a^{II}) + a^{I}a^{II}\Lambda 2(a^{I}, a^{II})}{2}$$

& ainsi de suite.

Soit aussi

$$\Psi(a^{I}, a^{II}) = \frac{a^{I}a^{II}\Lambda 1(a^{I}, a^{II}) - 2a^{II2}\Lambda(a^{I}, a^{II})}{2}$$

$$\Psi 1(a^{I}, a^{II}) = \frac{a^{I}a^{II}\Lambda 2(a^{I}, a^{II}) - 2a^{II2}\Lambda 1(a^{I}, a^{II}) + 2a^{I}a^{II}\Lambda(a^{I}, a^{II})}{2}$$

$$\Psi 2(a^{I}, a^{II}) = \frac{a^{I}a^{II}\Lambda 3(a^{I}, a^{II}) - 2a^{II2}\Lambda 2(a^{I}, a^{II}) + a^{I}a^{II}\Lambda 1(a^{I}, a^{II})}{2}$$

$$\Psi 3(a^{I}, a^{II}) = \frac{a^{I}a^{II}\Lambda 4(a^{I}, a^{II}) - 2a^{II2}\Lambda 3(a^{I}, a^{II}) + a^{I}a^{II}\Lambda 2(a^{I}, a^{II})}{2} \text{ \&c.}$$

On aura la quantité $\frac{1}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}}$ exprimée de la manière ſuivante :

$$\frac{1}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}} = \Gamma(a^{I}, a^{II}) + \Gamma 1(a^{I}, a^{II})\, cof.(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \Gamma 2(a^{I}, a^{II})\, cof.2(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \&c.$$
$$+ 3nx^{I}\big(\Pi(a^{I}, a^{II}) + \Pi 1(a^{I}, a^{II})\, cof.(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \Pi 2(a^{I}, a^{II})\, cof.2(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \&c.\big)$$
$$+ 3nx^{II}\big(\Psi(a^{I}, a^{II}) + \Psi 1(a^{I}, a^{II})\, cof.(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \Psi 2(a^{I}, a^{II})\, cof.2(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \&c.\big)$$

On trouvera de même, en changeant ſimplement r^{II} en r^{III}, a^{II} en a^{III}, φ^{II} en φ^{III}, & x^{II} en x^{III},

$$\frac{1}{\Delta(r^{I}, r^{III})^{3}} = \Gamma(a^{I}, a^{III}) + \Gamma 1(a^{I}, a^{III})\, cof.(\varphi^{III} - \varphi^{I}) + \Gamma 2(a^{I}, a^{III})\, cof.2(\varphi^{III} - \varphi^{I}) + \&c.$$
$$+ 3nx^{I}\big(\Pi(a^{I}, a^{III}) + \Pi 1(a^{I}, a^{III})\, cof.(\varphi^{III} - \varphi^{I}) + \Pi 2(a^{I}, a^{III})\, cof.2(\varphi^{III} - \varphi^{I}) + \&c.\big)$$
$$+ 3nx^{III}\big(\Psi(a^{I}, a^{III}) + \Psi 1(a^{I}, a^{III})\, cof.(\varphi^{III} - \varphi^{I}) + \Psi 2(a^{I}, a^{III})\, cof.2(\varphi^{III} - \varphi^{I}) + \&c.\big)$$

Et pareillement,

$$\frac{1}{\Delta(r^{I}, r^{IV})^{3}} = \Gamma(a^{I}, a^{IV}) + \Gamma 1(a^{I}, a^{IV})\, cof.(\varphi^{IV} - \varphi^{I}) + \Gamma 2(a^{I}, a^{IV})\, cof.2(\varphi^{IV} - \varphi^{I}) + \&c.$$
$$+ 3nx^{I}\big(\Pi(a^{I}, a^{IV}) + \Pi 1(a^{I}, a^{IV})\, cof.(\varphi^{IV} - \varphi^{I}) + \Pi 2(a^{I}, a^{IV})\, cof.2(\varphi^{IV} - \varphi^{I}) + \&c.\big)$$
$$+ 3nx^{IV}\big(\Psi(a^{I}, a^{IV}) + \Psi 1(a^{I}, a^{IV})\, cof.(\varphi^{IV} - \varphi^{I}) + \Psi 2(a^{I}, a^{IV})\, cof.2(\varphi^{IV} - \varphi^{I}) + \&c.\big)$$

XXIII.

Cela poſé, on aura :

$$\frac{r^{I}\cdot}{\Delta(r^{I},r^{II})^{3}} = \frac{a^{I}(1+nx^{I})}{\Delta(r^{I}r^{II})^{\cdot}} = a^{I}\big(\Gamma(a^{I},a^{II}) + \Gamma 1(a^{I},a^{II})$$
$$cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + \Gamma 2(a^{I},a^{II})cof.2(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + \&c.\big)$$
$$+nx^{I}a^{I}\big(3\Pi(a^{I},a^{II})+\Gamma(a^{I},a^{II})+\big(3\Pi 1(a^{I},a^{II})+\Gamma 1(a^{I},a^{II})\big)\times$$
$$cof.(\varphi^{II}-\varphi)\big)+\big(3\Pi 2(a^{I},a^{II})+\Gamma 2(a^{I},a^{II})\big)\times cof.2(\varphi^{II}-\varphi^{I})\big)$$
$$+\&c.\big)$$
$$+3nx^{II}a^{I}\big(\Psi(a^{I},a^{II}) + \Psi 1(a^{I},a^{II})\,cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I})$$
$$+\Psi 2(a^{I},a^{II})\,cof.2(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + \&c.\big)$$

On trouvera de la même manière:

$$\frac{r^{II}}{\Delta(r^{I},r^{II})^{3}} = a^{II}\big(\Gamma(a^{I},a^{II}) + \Gamma 1(a^{I},a^{II})\,cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I})$$
$$+\Gamma 2(a^{I},a^{II})\,cof.2(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + \&c.\big)$$
$$+3nx^{I}a^{II}\big(\Pi(a^{I},a^{II}) + \Pi 1(a^{I},a^{II})\,cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I})$$
$$+\Pi 2(a^{I},a^{II})\,cof.2(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + \&c.\big)$$
$$+nx^{II}a^{II}\big(3\Psi(a^{I},a^{II})+\Gamma(a^{I},a^{II})+\big(3\Psi 1(a^{I},a^{II})$$
$$+\Gamma 1(a^{I},a^{II})\big)\times cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I})+\big(3\Psi 2(a^{I},a^{II})$$
$$+\Gamma 2(a^{I},a^{II})\big)\times cof.2(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + \&c.\big)$$

On aura enſuite $\frac{1}{r^{II2}(1+p^{II2})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a^{II2}}(1-2nx^{II}+\&c.)$

Donc $-\frac{r^{II}}{\Delta(r^{I},r^{II})^{3}} + \frac{1}{r^{II2}(1+p^{II2})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a^{II2}} - a^{II}\Gamma(a^{I},a^{II})$
$$-a^{II}\Gamma 1(a^{I},a^{II})\,cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I}) - a^{II}\Gamma 2(a^{I},a^{II})\,cof.2(\varphi^{II}-\varphi^{I})$$
$$-\&c.$$
$$-3nx^{I}a^{II}\big(\Pi(a^{I},a^{II}) + \Pi 1(a^{I},a^{II})\,cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I})$$
$$+\Pi 2(a^{I},a^{II})\,cof.2(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + \&c.\big)$$
$$-nx^{II}\Big(\frac{2}{a^{II2}}+3a^{II}\Psi(a^{I},a^{II})+a^{II}\Gamma(a^{I},a^{II})+\big(3a^{II}\Psi 1(a^{I},a^{II})$$
$$+a^{II}\Gamma 1(a^{I},a^{II})\big)\times cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I})+\big(3a^{II}\Psi 2(a^{I},a^{II})$$
$$+a^{II}\Gamma 2(a^{I},a^{II})\big)\times cof.2(\varphi^{II}-\varphi^{I})+\&c.\Big)$$

Cette quantité étant multipliée par $cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I})$, on aura

$$-\frac{r^{II}\,cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I})}{\Delta(r^{I},r^{II})^{3}}+\frac{cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I})}{r^{II2}(1+p^{II2})^{\frac{3}{2}}}=-\frac{a^{II}\Gamma 1(a^{I},a^{II})}{2}$$

$$-\left(\frac{a^{II}\Gamma 2(a^{I},a^{II})+2a^{II}\Gamma(a^{I},a^{II})}{2}-\frac{1}{a^{II2}}\right)cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I})$$

$$-\frac{a^{II}\Gamma 3(a^{I},a^{II})+a^{II}\Gamma 1(a^{I},a^{II})}{2}\,cof.2(\varphi^{II}-\varphi^{I})-\&c.$$

$$-nx^{I}\Big(3a^{II}\frac{\Pi 1(a^{I},a^{II})}{2}+3a^{II}\frac{\Pi 2(a^{I},a^{II})+2\Pi(a^{I},a^{II})}{2}\,cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I})$$

$$+3a^{II}\frac{\Pi 3(a^{I},a^{II})+\Pi 1(a^{I},a^{II})}{2}\,cof.2(\varphi^{II}-\varphi^{I})+\&c.\Big)$$

$$-nx^{II}\Big(\frac{3a^{II}\Psi 1(a^{I},a^{II})+a^{II}\Gamma 1(a^{I},a^{II})}{2}+\Big(3a^{II}\frac{\Psi 2(a^{I},a^{II})+2\Psi(a^{I},a^{II})}{2}$$

$$+a^{II}\frac{\Gamma 2(a^{I},a^{II})+2\Gamma(a^{I},a^{II})}{2}+\frac{2}{a^{II2}}\Big)\,cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I})$$

$$+\Big(3a^{II}\frac{\Psi 3(a^{I},a^{II})+\Psi 1(a^{I},a^{II})}{2}+a^{II}\frac{\Gamma 3(a^{I},a^{II})+\Gamma 1(a^{I},a^{II})}{2}\Big)$$

$$cof.2(\varphi^{II}-\varphi^{I})+\&c.\Big)$$

Enfin multipliant la même quantité par $-sin.(\varphi^{II}-\varphi^{I})$ on aura:

$$\frac{r^{II}\,sin.(\varphi^{II}-\varphi^{I})}{\Delta(r^{I},r^{II})^{3}}-\frac{sin.(\varphi^{II}-\varphi^{I})}{r^{II2}(1+p^{II2})^{\frac{3}{2}}}=-\Big(a^{II}\frac{\Gamma 2(a^{I},a^{II})-\Gamma(a^{I},a^{II})}{2}+\frac{1}{a^{II2}}\Big)$$

$$sin.(\varphi^{II}-\varphi^{I})-a^{II}\frac{\Gamma 3(a^{I},a^{II})-\Gamma 1(a^{I},a^{II})}{2}\,sin.2(\varphi^{II}-\varphi^{I})-\&c.$$

$$-nx^{I}\Big(3a^{II}\frac{\Pi 2(a^{I},a^{II})-2\Pi(a^{I},a^{II})}{2}\,sin.(\varphi^{II}-\varphi^{I})$$

$$+3a^{II}\frac{\Pi 3(a^{I},a^{II})-\Pi 1(a^{I},a^{II})}{2}\,sin.2(\varphi^{II}-\varphi^{I})+\&c.\Big)$$

$$-nx^{II}\Big(\Big(3a^{II}\frac{\Psi 2(a^{I},a^{II})-2\Psi(a^{I},a^{II})}{2}+a^{II}\frac{\Gamma 2(a^{I},a^{II})-2\Gamma(a^{I},a^{II})}{2}-\frac{2}{a^{II2}}\Big)$$

$$sin.(\varphi^{II}-\varphi^{I})+\Big(3a^{II}\frac{\Psi 3(a^{I},a^{II})-\Psi 1(a^{I},a^{II})}{2}+a^{II}\frac{\Gamma 3(a^{I},a^{II})-\Gamma 1(a^{I},a^{II})}{2}\Big)$$

$$sin.2(\varphi^{II}-\varphi^{I})+\&c.\Big)$$

XXIV.

XXIV.

Soit maintenant

$$\breve{\Gamma}(a^{I},a^{II}) = \frac{a^{I2}a^{II}\Gamma 1(a^{I},a^{II}) - 2a^{I3}\Gamma(a^{I},a^{II})}{2},$$

$$\breve{\Gamma}1(a^{I},a^{II}) = \frac{a^{I2}a^{II}\Gamma 2(a^{I},a^{II}) - 2a^{I3}\Gamma 1(a^{I},a^{II}) + 2a^{I2}a^{II}\Gamma(a^{I},a^{II})}{2} - \frac{a^{I2}}{a^{II2}},$$

$$\breve{\Gamma}2(a^{I},a^{II}) = \frac{a^{I2}a^{II}\Gamma 3(a^{I},a^{II}) - 2a^{I3}\Gamma 2(a^{I},a^{II}) + a^{I2}a^{II}\Gamma 1(a^{I},a^{II})}{2},$$

$$\breve{\Gamma}3(a^{I},a^{II}) = \frac{a^{I2}a^{II}\Gamma 4(a^{I},a^{II}) - 2a^{I3}\Gamma 3(a^{I},a^{II}) + a^{I2}a^{II}\Gamma 2(a^{I},a^{II})}{2}, \&c.$$

$$\breve{\Pi}(a^{I},a^{II}) = 3\frac{a^{I2}a^{II}\Pi 1(a^{I},a^{II}) - 2a^{I3}\Pi(a^{I},a^{II})}{2} - a^{I3}\Gamma(a^{I},a^{II}),$$

$$\breve{\Pi}1(a^{I},a^{II}) = 3\frac{a^{I2}a^{II}\Pi 2(a^{I},a^{II}) - 2a^{I3}\Pi 1(a^{I},a^{II}) + 2a^{I2}a^{II}\Pi(a^{I},a^{II})}{2} - a^{I3}\Gamma 1(a^{I},a^{II}),$$

$$\breve{\Pi}2(a^{I},a^{II}) = 3\frac{a^{I2}a^{II}\Pi 3(a^{I},a^{II}) - 2a^{I3}\Pi 2(a^{I},a^{II}) + a^{I2}a^{II}\Pi 1(a^{I},a^{II})}{2} - a^{I3}\Gamma 2(a^{I},a^{II}),$$

$$\breve{\Pi}3(a^{I},a^{II}) = 3\frac{a^{I2}a^{II}\Pi 4(a^{I},a^{II}) - 2a^{I3}\Pi 3(a^{I},a^{II}) + a^{I2}a^{II}\Pi 2(a^{I},a^{II})}{2} - a^{I3}\Gamma 3(a^{I},a^{II}), \&c.$$

$$\breve{\Psi}(a^{I},a^{II}) = 3\frac{a^{I2}a^{II}\Psi 1(a^{I},a^{II}) - 2a^{I3}\Psi(a^{I},a^{II})}{2} + \frac{a^{I2}a^{II}\Gamma 1(a^{I},a^{II})}{2},$$

$$\breve{\Psi}1(a^{I},a^{II}) = 3\frac{a^{I2}a^{II}\Psi 2(a^{I},a^{II}) - 2a^{I3}\Psi 1(a^{I},a^{II}) + 2a^{I2}a^{II}\Psi(a^{I},a^{II})}{2} + \frac{a^{I2}a^{II}\Gamma 2(a^{I},a^{II}) + 2a^{I2}a^{II}\Gamma(a^{I},a^{II})}{2} + \frac{2a^{I2}}{a^{II2}},$$

$$\breve{\Psi}2(a^{I},a^{II}) = 3\frac{a^{I2}a^{II}\Psi 3(a^{I},a^{II}) - 2a^{I3}\Psi 2(a^{I},a^{II}) + a^{I2}a^{II}\Psi 1(a^{I},a^{II})}{2} + \frac{a^{I2}a^{II}\Gamma 3(a^{I},a^{II}) + a^{I3}a^{II}\Gamma 1(a^{I},a^{II})}{2},$$

$$\breve{\Psi}3(a^{I},a^{II}) = 3\frac{a^{I2}a^{II}\Psi 4(a^{I},a^{II}) - 2a^{I3}\Psi 3(a^{I},a^{II}) + a^{I2}a^{II}\Psi 2(a^{I},a^{II})}{2} + \frac{a^{I2}a^{II}\Gamma 4(a^{I},a^{II}) + a^{I2}a^{II}\Gamma 2(a^{I},a^{II})}{2}, \&c.$$

On aura $\mathfrak{C}^{II}\left(\frac{r^{I} - r^{II}\cos.(\varphi^{II} - \varphi^{I})}{\Delta(r^{I},r^{II})^{3}} + \frac{\cos.(\varphi^{II} - \varphi^{I})}{r^{II2}(1+p^{II2})^{\frac{3}{2}}}\right)$

$$= -\frac{\mathfrak{C}^{II}}{a^{I2}}\left(\breve{\Gamma}(a^I, a^{II}) + \breve{\Gamma}1(a^I, a^{II})\,cof.(\varphi^{II} - \varphi^I)\right.$$
$$\left. + \breve{\Gamma}2(a^I, a^{II})\,cof.2(\varphi^{II} - \varphi^I)\ \&c.\right)$$
$$- n\frac{\mathfrak{C}^{II}}{a^{I2}}x^I\left(\breve{\Pi}(a^I, a^{II}) + \breve{\Pi}1(a^I, a^{II})\,cof.(\varphi^{II} - \varphi^I)\right.$$
$$\left. + \breve{\Pi}2(a^I, a^{II})\,cof.2(\varphi^{II} - \varphi^I)\ \&c.\right)$$
$$- n\frac{\mathfrak{C}^{II}}{a^{I2}}x^{II}\left(\breve{\Psi}(a^I, a^{II}) + \breve{\Psi}1(a^I, a^{II})\,cof.(\varphi^{II} - \varphi^I)\right.$$
$$\left. + \breve{\Psi}2(a^I, a^{II})\,cof.2(\varphi^{II} - \varphi^I)\ \&c.\right)$$

C'eſt la partie de la force R^I qui reſulte de l'action du ſatellite $\mathfrak{C}^{II}$, (art. X).

XXV.

Soit de plus

$$\hat{\Gamma}1(a^I, a^{II}) = \frac{a^{I2}a^{II}\Gamma2(a^I, a^{II}) - 2a^{I2}a^{II}\Gamma(a^I, a^{II})}{2} + \frac{a^{I2}}{a^{II2}},$$
$$\hat{\Gamma}2(a^I, a^{II}) = \frac{a^{I2}a^{II}\Gamma3(a^I, a^{II}) - a^{I2}a^{II}\Gamma1(a^I, a^{II})}{2},$$
$$\hat{\Gamma}3(a^I, a^{II}) = \frac{a^{I2}a^{II}\Gamma4(a^I, a^{II}) - a^{I2}a^{II}\Gamma2(a^I, a^{II})}{2}, \&c.$$
$$\hat{\Pi}1(a^I, a^{II}) = 3\frac{a^{I2}a^{II}\Pi2(a^I, a^{II}) - 2a^{I2}a^{II}\Pi(a^I, a^{II})}{2},$$
$$\hat{\Pi}2(a^I, a^{II}) = 3\frac{a^{I2}a^{II}\Pi3(a^I, a^{II}) - a^{I2}a^{II}\Pi1(a^I, a^{II})}{2},$$
$$\hat{\Pi}3(a^I, a^{II}) = 3\frac{a^{I2}a^{II}\Pi4(a^I, a^{II}) - a^{I2}a^{II}\Pi2(a^I, a^{II})}{2}, \&c.$$
$$\hat{\Psi}1(a^I, a^{II}) = 3\frac{a^{I2}a^{II}\Psi2(a^I, a^{II}) - 2a^{I2}a^{II}\Psi(a^I, a^{II})}{2} + \hat{\Gamma}(a^I, a^{II}) - 3\frac{a^{I2}}{a^{II2}},$$
$$\hat{\Psi}2(a^I, a^{II}) = 3\frac{a^{I2}a^{II}\Psi3(a^I, a^{II}) - a^{I2}a^{II}\Psi1(a^I, a^{II})}{2} + \hat{\Gamma}2(a^I, a^{II}),$$
$$\hat{\Psi}3(a^I, a^{II}) = 3\frac{a^{I2}a^{II}\Psi4(a^I, a^{II}) - a^{I2}a^{II}\Psi2(a^I, a^{II})}{2} + \hat{\Gamma}3(a^I, a^{II}), \&c.$$

On aura $\mathfrak{C}^{II}\left(\frac{r^{II}\,sin.(\varphi^{II} - \varphi^I)}{\Delta(r^I, r^{II})^3} - \frac{sin.(\varphi^{II} - \varphi^I)}{r^{II2}(1 + p^{II2})^{\frac{3}{2}}}\right)$

$$= -\frac{\mathfrak{C}^{II}}{a^{I2}}\left(\hat{\Gamma}1(a^I,a^{II})\sin.(\varphi^{II}-\varphi^I)+\hat{\Gamma}2(a^I,a^{II})\sin.2(\varphi^{II}-\varphi^I)\right.$$
$$\left.+\,\&c.\right)$$
$$-n\frac{\mathfrak{C}^{II}}{a^{I2}}x^I\left(\hat{\Pi}1(a^I,a^{II})\sin.(\varphi^{II}-\varphi^I)\right.$$
$$\left.+\hat{\Pi}2(a^I,a^{II})\sin.2(\varphi^{II}-\varphi^I)+\&c.\right)$$
$$-n\frac{\mathfrak{C}^{II}}{a^{I2}}x^{II}\left(\hat{\Psi}1(a^I,a^{II})\sin.(\varphi^{II}-\varphi^I)\right.$$
$$\left.+\hat{\Psi}2(a^I,a^{II})\sin.2(\varphi^{II}-\varphi^I)+\&c.\right)$$

C'eſt la valeur de la force Q^I, en tant qu'elle vient de l'action du ſatellite $\mathfrak{C}^{II}$.

XXVI.

Enfin on trouvera $\mathfrak{C}^{II}\left(\frac{r^I p^I - r^{II} p^{II}}{\Delta(r^I,r^{II})^3}+\frac{p^{II}}{r^{II2}(1+p^{II2})^{\frac{1}{2}}}\right)$

$$= n\frac{\mathfrak{C}^{II}}{a^{I2}}z^I\left(a^{I3}\Gamma(a^I,a^{II})+a^{I3}\Gamma 1(a^I,a^{II})\cos.(\varphi^{II}-\varphi^I)\right.$$
$$\left.+\,a^{I3}\Gamma 2(a^I,a^{II})\cos.2(\varphi^{II}-\varphi^I)\,\&c.\right)$$
$$-n\frac{\mathfrak{C}^{II}}{a^{I2}}z^{II}\left(a^{I2}a^{II}\Gamma(a^I,a^{II})-\frac{a^{I2}}{a^{II2}}+a^{I2}a^{II}\Gamma 1(a^I,a^{II})\right.$$
$$\left.\cos.(\varphi^{II}-\varphi^I)+a^{I2}a^{II}\Gamma 2(a^I,a^{II})\cos.2(\varphi^{II}-\varphi^I)+\&c.\right)$$

C'eſt la partie de force P^I, qui vient de l'action du même ſatellite $\mathfrak{C}^{II}$.

On changera maintenant dans les expreſſions précédentes les quantités $\mathfrak{C}^{II}$, a^{II}, φ^{II}, x^{II}, z^{II} en $\mathfrak{C}^{III}$, a^{III}, φ^{III}, x^{III}, z^{III}; & en $\mathfrak{C}^{IV}$, a^{IV}, φ^{IV}, x^{IV}, z^{IV} ſucceſſivement, & l'on aura les valeurs de R^I, Q^I, P^I, dues à l'action des ſatellites $\mathfrak{C}^{III}$, $\mathfrak{C}^{IV}$.

Il ne reſtera donc plus qu'à chercher les valeurs de ces mêmes forces, en tant qu'elles viennent de l'action du Soleil.

Pour cela nous remarquerons d'abord que le rayon ρ^I de l'orbite de Jupiter eſt conſidérablement plus grand

que le rayon r de l'orbite d'un ſatellite quelconque ; d'où il ſuit que la valeur de δ, qui eſt exprimée généralement par $\sqrt{\rho^{I2} - 2\rho^{I} r \cos.(\psi - \varphi) + r^2(1+\rho^2)}$ (art. XV) ſe réduira en une ſuite très-convergente, dont il ſuffira de prendre les premiers termes ; on aura donc :

$$\frac{1}{\delta^3} = \frac{1}{\rho^{I3}} + \frac{3r\cos.(\psi-\varphi)}{\rho^{I4}} + \&c.$$

$$\text{donc} - \frac{\rho^{I}\cos.(\psi-\varphi)}{\delta^3} + \frac{\cos.(\psi-\varphi)}{\rho^{I2}} = -\frac{3r}{2\rho^{I3}}\left(1+\cos.2(\psi-\varphi)\right);$$

$$\frac{\rho^{I}\sin.(\psi-\varphi)}{\delta^3} - \frac{\sin.(\psi-\varphi)}{\rho^{I2}} = \frac{3r}{2\rho^{I3}}\sin.2(\psi-\varphi) ; \& \frac{r}{\delta^3} = \frac{r}{\rho^{I3}}.$$

XXVII.

Soit à préſent :

La valeur moyenne de ρ^{I} . . . . . α

La valeur moyenne de $\frac{d\psi}{dt}$, c'eſt-à-dire, la viteſſe angulaire moyenne de Jupiter autour du Soleil . . . . . m

On ſuppoſera, à l'imitation de ce que nous avons fait (art. IV), ... $\rho^{I} = \alpha(1+n\xi)$ & . . . . . $\psi = mt + nJ$

Dans ces formules, $n\xi$ repréſente l'équation de la diſtance de Jupiter au Soleil, & nJ l'équation du centre de Jupiter ; leſquelles ſont connues par la théorie de cette Planète. En effet, en n'ayant égard qu'aux équations elliptiques, & ſuppoſant que ne ſoit l'excentricité, & U l'anomalie moyenne, on a à-très-peu-près $\xi = e\cos.U$, & $J = -2e\sin.U$.

On aura donc $\frac{r}{\rho^{I3}} = \frac{a}{a^3}(1+n\xi)(1-3n\xi) = \frac{a}{a^3}\times(1+nx-3n\xi)$; donc enfin :

$$\odot\left(\frac{r-\rho^{I}\cos.(\psi-\varphi^{I})}{\delta^{I3}} + \frac{\cos.(\psi-\varphi^{I})}{\rho^{I2}}\right) = -\frac{a^{I}\odot}{2a^3}\left(1+3\cos.2(\psi-\varphi^{I})\right)$$

$$-n\frac{a^{I}\odot}{2a^3}(x^{I}-3\xi)\left(1+3\cos.2(\psi-\varphi^{I})\right);$$

$$\odot\left(\frac{\rho^{I}\sin.(\psi-\varphi^{I})}{\delta^{I\,3}}-\frac{\sin.(\psi-\varphi^{I})}{\rho^{I\,2}}\right)=\frac{3a^{I}\odot}{2a^{3}}\sin.2(\psi-\varphi^{I})$$

$$+n\frac{3a^{I}\odot}{2a^{3}}(x^{I}-3\xi)\sin.2(\psi-\varphi^{I});$$

$$\odot\frac{r^{I}p^{I}}{\delta^{I\,3}}=n\frac{a^{I}\odot}{a^{I\,3}}z^{I}.$$

Ce ſont les valeurs des forces R^{I}, Q^{I}, P^{I}, qui viennent de l'action du Soleil (art. XI).

XXVIII.

En joignant enſemble toutes ces différentes valeurs, on aura les valeurs complettes des forces R^{I}, Q^{I}, P^{I} exprimées de la manière ſuivante.

$$R^{I}=-\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I\,2}}\left(\breve{\Gamma}(a^{I},a^{II})+\breve{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{II})cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I})+\&c.\right)$$

$$-\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I\,2}}\left(\breve{\Gamma}(a^{I},a^{III})+\breve{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{III})cof.(\varphi^{III}-\varphi^{I})+\&c.\right)$$

$$-\frac{\mathfrak{C}^{IV}}{\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I\,2}}\left(\breve{\Gamma}(a^{I},a^{IV})+\breve{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{IV})cof.(\varphi^{IV}-\varphi^{I})+\&c.\right)$$

$$-\frac{a^{I\,3}\odot}{a^{3}\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I\,2}}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}cof.2(\psi-\varphi^{I})\right)$$

$$-n\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I\,2}}x^{I}\left(\breve{\Pi}(a^{I},a^{II})+\breve{\Pi}^{I}(a^{I},a^{II})cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I})+\&c.\right)$$

$$-n\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I\,2}}x^{I}\left(\breve{\Pi}(a^{I},a^{III})+\breve{\Pi}^{I}(a^{I},a^{III})cof.(\varphi^{III}-\varphi^{I})+\&c.\right)$$

$$-n\frac{\mathfrak{C}^{IV}}{\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I\,2}}x^{I}\left(\breve{\Pi}(a^{I},a^{IV})+\breve{\Pi}^{I}(a^{I},a^{IV})cof.(\varphi^{IV}-\varphi^{I})+\&c.\right)$$

$$-n\frac{a^{I\,3}\odot}{a^{3}\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I\,2}}x^{I}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}cof.2(\psi-\varphi^{I})\right)$$

$$-n\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I\,2}}x^{II}\left(\breve{\Psi}(a^{I},a^{II})+\breve{\Psi}^{I}(a^{I},a^{II})cof.(\varphi^{II}-\varphi^{I})+\&c.\right)$$

$$-n\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I\,2}}x^{III}\left(\breve{\Psi}(a^{I},a^{III})+\breve{\Psi}^{I}(a^{I},a^{III})cof.(\varphi^{III}-\varphi^{I})+\&c.\right)$$

$$-n\frac{\mathfrak{C}^{IV}}{\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I\,2}}x^{IV}\left(\breve{\Psi}(a^{I},a^{IV})+\breve{\Psi}^{I}(a^{I},a^{IV})cof.(\varphi^{IV}-\varphi^{I})+\&c.\right)$$

$$+ n \frac{a^{13} \odot}{a^3 \Psi} \times \frac{\Psi}{a^{12}} \xi \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{9}{2} cos.2(\psi - \varphi^{I}) \right).$$

$$Q^{I} = - \frac{\mathfrak{C}^{II}}{\Psi} \times \frac{\Psi}{a^{12}} \left(\hat{\Gamma} 1(a^{I}, a^{II}) \, sin.(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$- \frac{\mathfrak{C}^{III}}{\Psi} \times \frac{\Psi}{a^{12}} \left(\hat{\Gamma} 1(a^{I}, a^{III}) \, sin.(\varphi^{III} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$- \frac{\mathfrak{C}^{IV}}{\Psi} \times \frac{\Psi}{a^{12}} \left(\hat{\Gamma} 1(a^{I}, a^{IV}) \, sin.(\varphi^{IV} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$- \frac{a^{13} \odot}{a^3 \Psi} \times \frac{\Psi}{a^{12}} \times \tfrac{3}{2} sin.2(\psi - \varphi^{I})$$

$$- n \frac{\mathfrak{C}^{II}}{\Psi} \times \frac{\Psi}{a^{12}} x^{I} \left(\hat{\Pi} 1(a^{I}, a^{II}) \, sin.(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$- n \frac{\mathfrak{C}^{III}}{\Psi} \times \frac{\Psi}{a^{12}} x^{I} \left(\hat{\Pi} 1(a^{I}, a^{III}) \, sin.(\varphi^{III} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$- n \frac{\mathfrak{C}^{IV}}{\Psi} \times \frac{\Psi}{a^{12}} x^{I} \left(\hat{\Pi} 1(a^{I}, a^{IV}) \, sin.(\varphi^{IV} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$+ n \frac{a^{13} \odot}{a^3 \Psi} \times \frac{\Psi}{a^{12}} x^{I} \times \tfrac{3}{2} sin.2(\psi - \varphi^{I})$$

$$- n \frac{\mathfrak{C}^{II}}{\Psi} \times \frac{\Psi}{a^{12}} x^{II} \left(\hat{\Psi} 1(a^{I}, a^{II}) \, sin.(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$- n \frac{\mathfrak{C}^{III}}{\Psi} \times \frac{\Psi}{a^{12}} x^{III} \left(\hat{\Psi} 1(a^{I}, a^{III}) \, sin.(\varphi^{III} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$- n \frac{\mathfrak{C}^{IV}}{\Psi} \times \frac{\Psi}{a^{12}} x^{IV} \left(\hat{\Psi} 1(a^{I}, a^{IV}) \, sin.(\varphi^{IV} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$- n \frac{a^{13} \odot}{a^3 \Psi} \times \frac{\Psi}{a^{12}} \xi \times \tfrac{9}{2} sin.2(\psi - \varphi^{I}).$$

$$P^{I} = n \frac{\mathfrak{C}^{II}}{\Psi} \times \frac{\Psi}{a^{12}} z^{I} \left(a^{13} \Gamma(a^{I}, a^{II}) + a^{13} \Gamma 1(a^{I}, a^{II}) cos.(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$+ n \frac{\mathfrak{C}^{III}}{\Psi} \times \frac{\Psi}{a^{12}} z^{I} \left(a^{13} \Gamma(a^{I}, a^{II}) + a^{13} \Gamma 1(a^{I}, a^{III}) cos.(\varphi^{III} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$+ n \frac{\mathfrak{C}^{IV}}{\Psi} \times \frac{\Psi}{a^{12}} z^{I} \left(a^{13} \Gamma(a^{I}, a^{IV}) + a^{13} \Gamma 1(a^{I}, a^{IV}) cos.(\varphi^{IV} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$+ n \frac{a^{13} \odot}{a^3 \Psi} \times \frac{\Psi}{a^{12}} z^{I}$$

$$- n \frac{\mathfrak{C}^{II}}{\Psi} \times \frac{\Psi}{a^{12}} z^{II} \left(a^{12} a^{II} \Gamma(a^{I}, a^{II}) - \frac{a^{12}}{a^{II2}} \right.$$

$$\left. + a^{12} a^{II} \Gamma 1(a^{I}, a^{II}) \, cos.(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$-n\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I2}}z^{III}\left(a^{I2}a^{III}\Gamma(a^{I},a^{III})-\frac{a^{I2}}{a^{III2}}\right.$$
$$\left.+a^{I2}a^{III}\Gamma 1(a^{I},a^{III})\,cof.(\varphi^{III}-\varphi^{I})+\&c.\right)$$
$$-n\frac{\mathfrak{C}^{IV}}{\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I2}}z^{IV}\left(a^{I2}a^{IV}\Gamma(a^{I},a^{IV})-\frac{a^{I2}}{a^{IV2}}\right.$$
$$\left.+a^{I2}a^{IV}\Gamma 1(a^{I},a^{IV})\,cof.(\varphi^{IV}-\varphi^{I})\,\&c.\right)$$

Il ne reſte plus qu'à ſubſtituer pour φ^{I}, φ^{II}, φ^{III}, φ^{IV}, & $\downarrow$ leurs valeurs, $\mu^{I}t+ny^{I}$, $\mu^{II}t+ny^{II}$, $\mu^{III}t+ny^{III}$, $\mu^{IV}t+ny^{IV}$, & $mt+nJ$; ce qui eſt très-facile, car il n'y aura qu'à changer φ^{I}, φ^{II}, φ^{III}, φ^{IV}, $\downarrow$ en $\mu^{I}t$, $\mu^{II}t$, $\mu^{III}t$, $\mu^{IV}t$, mt, & ajouter enſuite aux expreſſions de R^{I} & Q^{I} les quantités ſuivantes.

$$n\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I2}}(y^{II}-y^{I})\left(\breve{\Gamma}1(a^{I},a^{II})\,sin\,(\mu^{II}-\mu^{I})t+2\breve{\Gamma}2(a^{I},a^{II})\ldots\&c.\right)$$
$$+n\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I2}}(y^{III}-y^{I})\left(\breve{\Gamma}1(a^{I},a^{III})\,sin.(\mu^{III}-\mu^{I})t+2\breve{\Gamma}2(a^{I},a^{III})\ldots\&c.\right)$$
$$+n\frac{\mathfrak{C}^{IV}}{\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I2}}(y^{IV}-y^{I})\left(\breve{\Gamma}1(a^{I},a^{IV})\,sin.(\mu^{IV}-\mu^{I})t+2\breve{\Gamma}2(a^{I},a^{IV})\ldots\&c.\right)$$
$$+n\frac{a^{I3}\odot}{a^{3}\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I2}}(J-y^{I})\times 3\,sin.2(m-\mu^{I})t,\ \&$$
$$-n\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I2}}(y^{II}-y^{I})\left(\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{II})\,cof\,(\mu^{II}-\mu^{I})t+2\hat{\Gamma}2(a^{I},a^{II})\ldots\&c.\right)$$
$$-n\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I2}}(y^{III}-y^{I})\left(\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{III})\,cof.(\mu^{III}-\mu^{I})t+2\hat{\Gamma}2(a^{I},a^{III})\ldots\&c.\right)$$
$$-n\frac{\mathfrak{C}^{IV}}{\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I2}}(y^{IV}-y^{I})\left(\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{IV})\,cof.(\mu^{IV}-\mu^{I})t+2\hat{\Gamma}2(a^{I},a^{II})\ldots\&c.\right)$$
$$+n\frac{a^{I3}\odot}{a^{3}\mathfrak{T}}\times\frac{\mathfrak{T}}{a^{I2}}(J-y^{I})\times 3\,cof.2(m-\mu^{I})t.$$

Pour trouver les valeurs de R^{II}, Q^{II}, P^{II}, il ne faudra qu'ajouter un trait aux lettres qui n'en ont qu'un, & en ôter un à celles qui en ont deux; & ainſi des autres quantités R^{III}, Q^{III}, P^{III}, R^{IV}, Q^{IV}, P^{IV}, (art. XIII).

A l'égard des forces perturbatrices qui viennent de la

non-sphéricité de Jupiter, on trouvera, en négligeant dans les formules de l'art. XVI, ce qu'on y doit négliger, qu'il faut ajouter aux valeurs de R^{I} & P^{I} les quantités suivantes: $\frac{\frac{9}{2}A^{2}}{5a^{II\,2}} \times \frac{\mathfrak{M}}{a^{II\,2}}(1-4nx^{II})$, & $n\,\frac{\frac{27}{2}A^{2}}{5a^{II\,2}} \times \frac{\mathfrak{M}}{a^{2}}z^{I}$; & de même aux valeurs de R^{II}, P^{II} les quantités $\frac{\frac{9}{2}A^{2}}{5a^{II\,2}} \times \frac{\mathfrak{M}}{a^{II\,2}}(1-4nx^{II})$, & $n\,\frac{\frac{27}{2}A^{2}}{5a^{II\,2}} \times \frac{\mathfrak{M}}{a^{II\,2}}z^{II}$, & ainsi de suite.

CHAPITRE III.

Calcul des perturbations des Satellites de Jupiter.

XXIX.

Nous nous contenterons ici de chercher les formules qui déterminent le mouvement du premier Satellite, parce que les autres s'en déduiront aisément par les remarques des articles IX & XIII.

Pour appliquer au mouvement du premier satellite, les équations générales de l'article VIII, il est visible qu'il ne faut que marquer les lettres d'un trait, & substituer ensuite pour X^{I}, Y^{I}, z^{I} leurs valeurs tirées de celles de R^{I}, Q^{I}, P^{I}, (art. préc.). Mais avant que de faire cette substitution, nous remarquerons que les équations $R+\frac{F}{a^{2}}-a\mu^{2}=n\frac{F}{a^{2}}X$, & $\int Q(1+nx)\,dt = a\mu - \frac{c}{a} + n\frac{F}{a^{2}}Y$ (art. V & VI) ne peuvent subsister dans l'hypothèse de n très-petit, à moins que les quantités constantes $\frac{F}{a^{2}}-a\mu^{2}$, $a\mu-\frac{a}{e}$, & les quantités variables R & Q ne soient chacunes très-petites de l'ordre n.

Or

Or en examinant les valeurs de R & Q (art. préc.) il eſt facile de voir qu'elles ne ſauroient être ſuppoſées très-petites qu'en regardant comme telles les quantités conſtantes $\frac{\mathbb{C}}{\mathbb{T}}$, $\frac{a^3\odot}{\alpha^3\mathbb{T}}$ & $\nu\frac{A^2}{a^2}$;

Soit donc en général.... $\frac{\mathbb{C}}{\mathbb{T}} = n\chi$

$$\frac{a^3\odot}{\alpha^3\mathbb{T}} = nK$$

$$\nu\frac{A^2}{a^2} = nx$$

Soit de plus..... $1-\frac{\mu^2}{f} = ng$

$$-\frac{\mu-\frac{c}{a^2}}{f} = nH$$

Nous aurons (à cauſe de $f=\frac{F}{a^3}$, art. V)

$X = g + \frac{a^2}{F}\times\frac{R}{n}$, & $Y = H + \frac{a^2}{F}\times\frac{\int Q(1+nx)dt}{n}$; c'eſt-à-dire, à cauſe de $F = \mathbb{T} + \mathbb{C}$ (art. X),

$X = g + \frac{a^2}{\mathbb{T}}\times\frac{R}{n(1+n\chi)}$, $Y = H + \frac{a^2}{\mathbb{T}}\times\frac{\int Q(1+nx)dt}{n(1+n\chi)}$.

A l'égard de la quantité Z, elle ſera déterminée par l'équation $\frac{P-nR\zeta}{1+nx} = n\frac{F}{a^2}Z$ (art. VII) laquelle ſe réduit à $Z = \frac{a^2}{\mathbb{T}}\times\frac{P-nR\zeta}{n(1+n\chi)(1+nx)}$; où l'on remarquera que P eſt déja toute multipliée par n (art. XXVIII).

XXX.

Appliquons maintenant ces formules au premier Satellite. Nous aurons d'abord en ſubſtituant la valeur de R^1 (art. XXVIIII).

$$X^{I} = g^{I}$$

$$- \frac{\chi^{II}}{1+n\chi^{I}} \left(\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) + \breve{\Gamma}1(a^{I}, a^{II}) \cos.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \breve{\Gamma}2(a^{I}, a^{II}) \cos.2(\mu^{II} - \mu^{I})\, t + \&c. \right)$$

$$- \frac{\chi^{III}}{1+n\chi^{I}} \left(\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{III}) + \breve{\Gamma}1(a^{I}, a^{III}) \cos.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \breve{\Gamma}2(a^{I}, a^{III}) \cos.2(\mu^{III} - \mu^{I})\, t + \&c. \right)$$

$$- \frac{\chi^{IV}}{1+n\chi^{I}} \left(\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{IV}) + \breve{\Gamma}1(a^{I}, a^{IV}) \cos.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \breve{\Gamma}2(a^{I}, a^{IV}) \cos.2(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t + \&c. \right)$$

$$- \frac{K^{I}}{1+n\chi^{I}} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} \cos.(m - \mu^{I})\, t \right)$$

$$- \frac{n\chi^{II}}{1+n\chi^{I}} x^{I} \left(\breve{\Pi}(a^{I}, a^{II}) + \breve{\Pi}1(a^{I}, a^{II}) \cos.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \breve{\Pi}2(a^{I}, a^{II}) \cos.2(\mu^{II} - \mu^{I})\, t + \&c. \right)$$

$$- \frac{n\chi^{III}}{1+n\chi^{I}} x^{I} \left(\breve{\Pi}(a^{I}, a^{III}) + \breve{\Pi}1(a^{I}, a^{III}) \cos.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \breve{\Pi}2(a^{I}, a^{III}) \cos.2(\mu^{III} - \mu^{I})\, t + \&c. \right)$$

$$- \frac{n\chi^{IV}}{1+n\chi^{I}} x^{I} \left(\breve{\Pi}(a^{I}, a^{IV}) + \breve{\Pi}1(a^{I}, a^{IV}) \cos.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \breve{\Pi}2(a^{I}, a^{IV}) \cos.2(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t + \&c. \right)$$

$$- \frac{nK^{I}}{1+n\chi^{I}} x^{I} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} \cos.(m - \mu^{I})\, t \right)$$

$$- \frac{n\chi^{II}}{1+n\chi^{I}} x^{II} \left(\breve{\Psi}(a^{I}, a^{II}) + \breve{\Psi}1(a^{I}, a^{II}) \cos.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \breve{\Psi}2(a^{I}, a^{II}) \cos.2(\mu^{II} - \mu^{I})\, t \,\&c. \right)$$

$$- \frac{n\chi^{III}}{1+n\chi^{I}} x^{III} \left(\breve{\Psi}(a^{I}, a^{III}) + \breve{\Psi}1(a^{I}, a^{III}) \cos.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \breve{\Psi}2(a^{I}, a^{III}) \cos.2(\mu^{III} - \mu^{I})\, t \,\&c. \right)$$

$$- \frac{n\chi^{IV}}{1+n\chi^{I}} x^{IV} \left(\breve{\Psi}(a^{I}, a^{IV}) + \breve{\Psi}1(a^{I}, a^{IV}) \cos.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \breve{\Psi}2(a^{I}, a^{IV}) \cos.2(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t \,\&c. \right)$$

$$+ \frac{nK^{I}}{1+n\chi^{I}} \xi \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{2} \cos.2(m - \mu^{I})\, t \right).$$

$$+\frac{n\chi^{II}}{1+n\chi^{I}}\,(y^{II}-y^{I})\,(\breve{\Gamma}1(a^{I},a^{II})\,sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t$$
$$+2\breve{\Gamma}2(a^{I},a^{II})\,sin.2(\mu^{II}-\mu^{I})\,t\ \&c.)$$
$$+\frac{n\chi^{III}}{1+n\chi^{I}}\,(y^{III}-y^{I})\,(\breve{\Gamma}1(a^{I},a^{III})\,sin.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t$$
$$+2\breve{\Gamma}2(a^{I},a^{III})\,sin.2(\mu^{III}-\mu^{I})\,t\ \&c.$$
$$+\frac{n\chi^{IV}}{1+n\chi^{I}}\,(y^{IV}-y^{I})\,(\breve{\Gamma}1(a^{I},a^{IV})\,sin.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t$$
$$+2\breve{\Gamma}2(a^{I},a^{IV})\,sin.2(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t\ \&c.)$$
$$+\frac{nK^{I}}{1+n\chi^{I}}\,(J-y)\times 3\,sin.2(m-\mu^{I})\,t$$
$$+\frac{\chi^{I}}{1+n\chi^{I}}\,(\tfrac{1}{3}-\tfrac{4}{3}nx^{I}).$$

XXXI.

Multipliant la valeur de Q^{I} par $1+nx^{I}$, & faiſant pour abréger :

$$\tilde{\Pi}1(a^{I},a^{II})=\hat{\Pi}1(a^{I},a^{II})+\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{II}),$$
$$\tilde{\Pi}2(a^{I},a^{II})=\hat{\Pi}2(a^{I},a^{II})+\hat{\Gamma}2(a^{I},a^{II}),$$
$$\tilde{\Pi}3(a^{I},a^{II})=\hat{\Pi}3(a^{I},a^{II})+\hat{\Gamma}3(a^{I},a^{II}),\ \&c.$$

On aura, après l'intégration & la ſubſtitution,

$$Y^{I}=H^{I}$$
$$+\frac{\chi^{II}}{1+n\chi^{I}}\left(\frac{\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{II})}{\mu^{II}-\mu^{I}}\,cos.(\mu^{II}-\mu^{I})t+\frac{\hat{\Gamma}2(a^{I},a^{II})}{2(\mu^{II}-\mu^{I})}\,cos.2(\mu^{II}-\mu^{I})t+\&c.\right)$$
$$+\frac{\chi^{III}}{1+n\chi^{I}}\left(\frac{\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{III})}{\mu^{III}-\mu^{I}}\,cos.(\mu^{III}-\mu^{I})t+\frac{\hat{\Gamma}2(a^{I},a^{III})}{2(\mu^{III}-\mu^{I})}\,cos.2(\mu^{III}-\mu^{I})t+\&c.\right)$$
$$+\frac{\chi^{IV}}{1+n\chi^{I}}\left(\frac{\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{IV})}{\mu^{IV}-\mu^{I}}\,cos.(\mu^{IV}-\mu^{I})t+\frac{\hat{\Gamma}2(a^{I},a^{IV})}{2(\mu^{IV}-\mu^{I})}\,cos.2(\mu^{IV}-\mu^{I})t+\&c.\right)$$
$$-\frac{K^{I}}{1+n\chi^{I}}\times\frac{3}{4(m-\mu^{I})}\,cos.2(m-\mu^{I})\,t.$$
$$-\frac{n\chi^{II}}{1+n\chi^{I}}\int x^{I}\left(\tilde{\Pi}1(a^{I},a^{II})\,sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t\right.$$
$$\left.+\tilde{\Pi}2(a^{I},a^{II})\,sin.2(\mu^{II}-\mu^{I})\,t+\&c.\right)dt$$

$$- \frac{n\chi^{III}}{1+n\chi^{I}} \int x^{I} \left(\tilde{\Pi}^{1}(a^{I}, a^{III}) \sin.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \tilde{\Pi}^{2}(a^{I}, a^{III}) \sin.2(\mu^{III} - \mu^{I})\, t + \&c. \right) dt$$
$$- \frac{n\chi^{IV}}{1+n\chi^{I}} \int x^{I} \left(\tilde{\Pi}^{1}(a^{I}, a^{IV}) \sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \tilde{\Pi}^{2}(a^{I}, a^{IV}) \sin.2(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t + \&c. \right) dt$$
$$+ \frac{nK^{I}}{1+n\chi^{I}} \int x^{I} \times 3 \sin.2(m - \mu^{I})\, t\, dt.$$
$$- \frac{n\chi^{II}}{1+n\chi^{I}} \int x^{II} \left(\hat{\Psi}^{1}(a^{I}, a^{II}) \sin.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \hat{\Psi}^{2}(a^{I} - a^{II}) \sin.2(\mu^{II} - \mu^{I})\, t + \&c. \right) dt$$
$$- \frac{n\chi^{III}}{1+n\chi^{I}} \int x^{III} \left(\hat{\Psi}^{1}(a^{I}, a^{III}) \sin.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \hat{\Psi}^{2}(a^{I} - a^{III}) \sin.2(\mu^{III} - \mu^{I})\, t + \&c. \right) dt$$
$$- \frac{n\chi^{IV}}{1+n\chi^{I}} \int x^{IV} \left(\hat{\Psi}^{1}(a^{I}, a^{IV}) \sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \hat{\Psi}^{2}(a^{I} - a^{IV}) \sin.2(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t + \&c. \right) dt$$
$$- \frac{nK^{I}}{1+n\chi^{I}} \int \xi \times \tfrac{2}{2} \sin.2(m - \mu^{I})\, t\, dt$$
$$- \frac{n\chi^{II}}{1+n\chi^{I}} \int (y^{II} - y^{I}) \left(\hat{\Gamma}^{1}(a^{I}, a^{II}) \cos.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + 2\hat{\Gamma}^{2}(a^{I}, a^{II}) \cos.2(\mu^{II} - \mu^{I})\, t + \&c. \right) dt$$
$$- \frac{n\chi^{III}}{1+n\chi^{I}} \int (y^{III} - y^{I}) \left(\hat{\Gamma}^{1}(a^{I}, a^{III}) \cos.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + 2\hat{\Gamma}^{2}(a^{I}, a^{III}) \cos.2(\mu^{III} - \mu^{I})\, t + \&c. \right) dt$$
$$- \frac{n\chi^{IV}}{1+n\chi^{I}} \int (y^{IV} - y^{I}) \hat{\Gamma}^{1}(a^{I}, a^{IV}) \cos.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t$$
$$\left. + 2\hat{\Gamma}^{2}(a^{I}, a^{IV}) \cos.2(\mu^{IV} - \mu^{I}) + \&c. \right) dt$$
$$+ \frac{nK^{I}}{1+n\chi^{I}} \int (J - y^{I}) \times 3 \cos.2\,(m - \mu^{I})\, t\, dt.$$

XXXII.

Enfin si l'on fait :

$$\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) = a^{I} \Gamma(a^{I}, a^{II}) + \breve{\Gamma}(a^{I}, a^{II}),$$
$$\tilde{\Gamma}^{1}(a^{I}, a^{II}) = a^{I} \Gamma^{1}(a^{I}, a^{II}) + \breve{\Gamma}^{1}(a^{I}, a^{II}),$$

$\tilde{\Gamma}2(a^{I}, a^{II}) = a^{I\frac{3}{2}}\Gamma 2(a^{I}, a^{II}) + \breve{\Gamma}2(a^{I}, a^{II})$,

$\overset{\circ}{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) = a^{I\frac{1}{2}}a^{II}\,\Gamma(a^{I}, a^{II}) - \frac{a^{I\frac{1}{2}}}{a^{II\frac{1}{2}}}$,

$\overset{\circ}{\Gamma}1(a^{I}, a^{II}) = a^{I\frac{1}{2}}a^{II}\,\Gamma 1(a^{I}, a^{II})$,

$\overset{\circ}{\Gamma}2(a^{I}, a^{II}) = a^{I\frac{1}{2}}a^{II}\,\Gamma 2(a^{I}, a^{II})$, & ainſi de ſuite, on trouvera

$$Z^{I} =$$

$$\frac{n\chi^{II}}{1+n\chi^{I}} z^{I}\big(\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) + \tilde{\Gamma}1(a^{I}, a^{II})\,cof.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t + \tilde{\Gamma}2(a^{I}, a^{II})\,cof.2(\mu^{II}-\mu^{I})\,t \text{ \&c.}\big)$$

$$+\frac{n\chi^{III}}{1+n\chi^{I}} z^{I}\big(\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{III}) + \tilde{\Gamma}1(a^{I}, a^{III})\,cof.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t + \tilde{\Gamma}2(a^{I}, a^{III})\,cof.2(\mu^{III}-\mu^{I})\,t \text{ \&c.}\big)$$

$$+\frac{n\chi^{IV}}{1+n\chi^{I}} z^{I}\big(\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{IV}) + \tilde{\Gamma}1(a^{I}, a^{IV})\,cof.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t + \tilde{\Gamma}2(a^{I}, a^{IV})\,cof.2(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t \text{ \&c.}\big)$$

$$+\frac{nK^{I}}{1+n\chi^{I}} z^{I}\big(\tfrac{3}{2}+\tfrac{3}{2}\,cof.2\,(m-\mu^{I})\,t\big)$$

$$+\frac{n\chi^{I}}{1+n\chi^{I}} \times \tfrac{3}{2} z^{I}.$$

$$-\frac{n\chi^{II}}{1+n\chi^{I}} z^{II}\big(\overset{\circ}{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) + \overset{\circ}{\Gamma}1(a^{I}, a^{II})\,cof.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t + \overset{\circ}{\Gamma}2(a^{I}, a^{II})\,cof.2(\mu^{II}-\mu^{I})\,t \text{ \&c.}\big)$$

$$-\frac{n\chi^{III}}{1+n\chi^{I}} z^{III}\big(\overset{\circ}{\Gamma}(a^{I}, a^{III}) + \overset{\circ}{\Gamma}1(a^{I}, a^{III})\,cof.(\mu^{III}-\mu^{I}) + \overset{\circ}{\Gamma}2(a^{I}, a^{III})\,cof.2(\mu^{III}-\mu^{I})\,t \text{ \&c.}\big)$$

$$-\frac{n\chi^{IV}}{1+n\chi^{I}} z^{IV}\big(\overset{\circ}{\Gamma}(a^{I}, a^{IV}) + \overset{\circ}{\Gamma}1(a^{I}, a^{IV})\,cof.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t + \overset{\circ}{\Gamma}2(a^{I}, a^{IV})\,cof.2(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t \text{ \&c.}\big)$$

XXXIII.

Et le mouvement du ſatellite $\mathfrak{C}^{I}$ ſera déterminé par les équations ſuivantes (art. VIII).

$$1.^{\circ}\ \frac{d^2x^{I}}{dt^2} + (3\mu^{I2} - 2f^{I})x^{I} + f^{I}X^{I} - 2\mu^{I}f^{I}Y^{I}$$
$$- n(6\mu^{I2} - 3f^{I})x^{I2} - \tfrac{3}{2}nf^{I}z^{I2} + 6n\mu^{I}f^{I}x^{I}Y^{I} - n^{I}f^{I2}Y^{I2} = 0$$
$$2.^{\circ}\ \frac{d^2y^{I}}{dt^2} + 2\mu^{I}x^{I} - f^{I}Y^{I} - 3n\mu^{I}x^{I2} + 2nf^{I}x^{I}Y^{I} = 0$$
$$3.^{\circ}\ \frac{d^2z^{I}}{dt^2} + \mu^{I2}z^{I} + f^{I}Z^{I} - 4n\mu^{I2}z^{I}x^{I} + 2n\frac{dz^{I}dx^{I}}{dt^2}$$
$$+ 2n\mu^{I}f^{I}z^{I}Y^{I} = 0.$$

On se souviendra que les quantités x^{I} & $\frac{dy^{I}}{dt}$ ne doivent renfermer aucun terme constant, suivant la remarque de l'article IV.

XXXIV.

Il ne s'agit donc plus que d'intégrer les équations que nous venons de donner; pour cela, on commencera par rejetter tous les termes affectés de n, & on cherchera par l'intégration les valeurs de x^{I}, y^{I}, z^{I}; on substituera ensuite ces valeurs dans les termes qu'on avoit négligés, & on en tirera de nouvelles valeurs de x^{I}, y^{I}, z^{I} plus approchées que les premières. On opéreroit ainsi de suite, si nous avions eu égard aux termes affectés de n^2, n^3, &c. Par ce moyen, l'intégration de la première & de la troisième équation de l'article précédent se réduira à celle d'une équation de cette forme:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + M^2u + T = 0.$$

T étant une fonction composée de sinus & de cosinus d'angles multiples de t; or l'intégrale de cette équation est, comme l'on sait,

$$u = G\sin.Mt + H\cos.Mt + \frac{\cos.Mt\int T\sin.Mt\,dt - \sin.Mt\int T\cos.Mt\,dt}{M};$$

de sorte qu'en supposant:

$$T = A + B\cos.pt + b\sin.pt + C\cos.qt + c\sin.qt + \&c.$$

on aura

$$u = -\frac{A}{M^2} + \left(H + \frac{A}{M^2} - \frac{B}{p^2 - M^2} - \frac{C}{q^2 - M^2} - \&c.\right) cof.Mt$$
$$+ \left(G - \frac{pb}{M(p^2 - M^2)} - \frac{qc}{M(q^2 - M^2)} - \&c.\right) fin.Mt + \frac{B}{p^2 - M^2} cof.pt$$
$$+ \frac{b}{p^2 - M^2} fin.pt + \frac{C}{q^2 - M^2} cof.qt + \frac{c}{q^2 - M^2} fin.qt + \&c.$$

H & G ſont les valeurs de u & de $\frac{du}{Mdt}$ lorſque $t = 0$.

On voit de là que pour avoir la valeur de u, il n'y a qu'à diviſer chacun des ſinus & des coſinus qui entrent dans T, par $p^2 - M^2$, p étant le coefficient de t, & y ajouter encore deux autres termes, qui renferment $fin.Mt$, & $cof.Mt$ avec des coefficiens arbitraires.

Il ne peut y avoir de difficulté que dans le cas où p ſeroit égale à M; car alors le diviſeur $p^2 - M^2$ ſera nul, & les termes $-\frac{B}{p^2 - M^2} cof.Mt + \frac{B}{p^2 - M^2} cof.pt$, auſſi bien que les termes $-\frac{pb}{M.p^2 - M^2)} fin.Mt + \frac{b}{p^2 - M^2} fin.pt$ deviendroient $-\infty + \infty$; ce qui ne fait rien connoître.

Pour réſoudre cette difficulté, on ſuppoſera que p ne ſoit pas tout-à-fait égale à M, mais qu'elle en diffère d'une quantité infiniment petite; & on trouvera que les deux premiers termes ſe réduiſent à $-\frac{Bt}{2p} fin.Mt$, & les deux autres à $\frac{bt}{2p} cof.Mt$; d'où l'on voit que la valeur de u contiendra des termes mutipliés par l'angle t.

Au reſte ſi dans la quantité T il ſe trouve des termes de cette forme $cof.pt$, ou $fin.pt$, p étant $= M + nb$, il eſt viſible que ces termes augmenteront beaucoup par l'intégration, puiſqu'ils ſe trouveront diviſés par la quantité très-petite $p^2 - M^2 = nb(2M + nb)$.

Donc ſi ces ſortes de termes ont des coefficiens finis dans l'équation différentielle, ils deviendront comme

infinis dans l'intégrale ; & s'ils n'ont que des coefficiens très-petits de l'ordre n dans la différentielle, il deviendront finis dans l'intégrale, & appartiendront à la première valeur de u.

§. I.

Premières formules du mouvement des Satellites de Jupiter autour de cette Planète.

XXXV.

Si on substitue dans les trois équations de l'art. XXXIII les valeurs X^{I}, Y^{I} & Z^{I}, qu'on rejette d'abord tous les termes affectés de n, & que l'on fasse pour abréger :

$$L^{I} = g^{I} - 2\mu^{I} H^{I} - \chi^{II}\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) - \chi^{III}\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{III}) - \chi^{IV}\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{IV}) - \tfrac{1}{2}K^{I} + \tfrac{1}{3}K^{I}, \text{ \& } M^{I2} = 3\mu^{I2} - 2f^{I},$$

$N^{I2} = \mu^{2}$, on trouvera les trois équations suivantes :

$$1.^{o}\ \frac{d^{2}x}{dt^{2}} + M^{I2}x^{I} + f^{I}L^{I}$$

$$- \chi^{II} f^{I}\left(\breve{\Gamma}1(a^{I}, a^{II}) + \frac{2\mu^{I}}{\mu^{II} - \mu^{I}}\hat{\Gamma}1(a^{I}, a^{II})\right) cof.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t$$

$$- \chi^{II} f^{I}\left(\breve{\Gamma}2(a^{I}, a^{II}) + \frac{2\mu^{I}}{2(\mu^{II} - \mu^{I})}\hat{\Gamma}2(a^{I}, a^{II})\right) cof.\, 2(\mu^{II} - \mu^{I})\, t \text{ \&c.}$$

$$- \chi^{III} f^{I}\left(\breve{\Gamma}1(a^{I}, a^{III}) + \frac{2\mu^{I}}{\mu^{III} - \mu^{I}}\hat{\Gamma}1(a^{I}, a^{III})\right) cof.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t$$

$$- \chi^{III} f^{I}\left(\breve{\Gamma}2(a^{I}, a^{II}) + \frac{2\mu^{I}}{2(\mu^{III} - \mu^{I})}\hat{\Gamma}2(a^{I}, a^{III})\right) cof.\, 2(\mu^{III} - \mu^{I})\, t \text{ \&c.}$$

$$- \chi^{IV} f^{I}\left(\breve{\Gamma}1(a^{I}, a^{IV}) + \frac{2\mu^{I}}{\mu^{IV} - \mu^{I}}\hat{\Gamma}1(a^{I}, a^{IV})\right) cof.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t$$

$$- \chi^{IV} f^{I}\left(\breve{\Gamma}2(a^{I}, a^{IV}) + \frac{2\mu^{I}}{2(\mu^{IV} - \mu^{I})}\breve{\Gamma}2(a^{I}, a^{IV})\right) cof.\, 2(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t \text{ \&c.}$$

$$- K^{I} f^{I}\left(\tfrac{1}{2} - \frac{3\mu^{I}}{2(m - \mu^{I})}\right) cof.\, 2(m - \mu^{I})\, t = 0,$$

$2.^{o}$

$$2.^{o}\ \frac{dy^{I}}{dt}+2\mu^{I}x^{I}-f^{I}h^{I}_{4}$$

$$-\chi^{II}f^{I}\left(\frac{\widehat{\Gamma}^{1}(a^{I},a^{II})}{\mu^{II}-\mu^{I}}\,cof.(\mu^{II}-\mu^{I})t+\frac{\widehat{\Gamma}^{2}(a^{I},a^{II})}{2(\mu^{II}-\mu^{I})}\,cof.2(\mu^{II}-\mu^{I})\,t\ \&c.\right)$$

$$-\chi^{III}f^{I}\left(\frac{\widehat{\Gamma}^{1}(a^{I}a^{III})}{\mu^{III}-\mu^{I}}\,cof.(\mu^{III}-\mu^{I})t+\frac{\widehat{\Gamma}^{2}(a^{I},a^{III})}{2(\mu^{III}-\mu^{I})}\,cof.2(\mu^{III}-\mu^{I})\,t\ \&c.\right)$$

$$-\chi^{IV}f^{I}\left(\frac{\widehat{\Gamma}^{1}(a^{I},a^{IV})}{\mu^{IV}-\mu^{I}}\,cof.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t+\frac{\widehat{\Gamma}^{2}(a^{I},a^{IV})}{2(\mu^{IV}-\mu^{I})}\,cof.2(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t\ \&c.\right)$$

$$+K^{I}\times\frac{3f^{I}}{4(m-\mu^{I})}\,cof.2(m-\mu^{I})\,t.$$

$$3.^{o}\ \frac{d^{2}\zeta^{I}}{dt^{2}}+N^{I}z^{I}=0.$$

XXXVI.

La première équation étant intégrée par la méthode de l'article XXXIV, on trouvera que la valeur de x^{I} renferme premièrement le terme constant $-\frac{f^{I}L^{I}}{M^{I2}}$, lequel devant être nul (art. XXXIII) on aura l'équation $L^{I}=0$.

Ensuite la valeur de x^{I} renfermera deux termes, tels que *sin.* Mt & *cos.* $M^{I}t$, avec des coefficiens arbitraires, lesquels pourront se réduire à un seul terme représenté par $\varepsilon^{I}cos.(M^{I}t+\omega^{I})$; ε^{I}, ω^{I} étant pareillement des constantes arbitraires.

De cette manière, si on fait

$$\mathcal{Z}1(a^{I},a^{II})=\left(\breve{\Gamma}1(a^{I},a^{II})+\frac{2\mu^{I}}{\mu^{II}-\mu^{I}}\,\widehat{\Gamma}1(a^{I},a^{II})\right)\frac{f^{I}}{(\mu^{II}-\mu^{I})^{2}-M^{I2}}$$

$$\mathcal{Z}2(a^{I},a^{II})=\left(\breve{\Gamma}2(a^{I},a^{II})+\frac{2\mu^{I}}{2(\mu^{II}-\mu^{I})}\,\widehat{\Gamma}2(a^{I},a^{II})\right)\frac{f^{I}}{4(\mu^{II}-\mu^{I})^{2}-M^{I2}}$$

$$\mathcal{Z}3(a^{I},a^{II})=\left(\breve{\Gamma}3(a^{I},a^{II})+\frac{2\mu^{I}}{3(\mu^{II}-\mu^{I})}\,\widehat{\Gamma}3(a^{I},a^{II})\right)\frac{f^{I}}{9(\mu^{II}-\mu^{I})^{2}-M^{I2}}\ \&c.$$

& de même

$$\mathcal{Z}1(a^{I},a^{III})=\left(\breve{\Gamma}(a^{I},a^{III})+\frac{2\mu^{I}}{\mu^{III}-\mu^{I}}\,\widehat{\Gamma}1(a^{I},a^{III})\right)\frac{f^{I}}{(\mu^{III}-\mu^{I})^{2}-M^{I2}}$$

$$\mathcal{Z}2(a^{I},a^{III})=\left(\breve{\Gamma}2(a^{I},a^{III})+\frac{2\mu^{I}}{2(\mu^{III}-\mu^{I})}\,\widehat{\Gamma}2(a^{I},a^{III})\right)\frac{f^{I}}{2(\mu^{III}-\mu^{I})^{2}-M^{I2}};$$

& ainſi des autres, & qu'on ſuppoſe de plus:

$$\beta^{I}=\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{\mu^{I}}{m-\mu^{I}}\right)\frac{f^{I}}{4(m-\mu^{I})^{2}-M^{I2}},$$ on aura

$$x^{I}=\varepsilon^{I}\cos.(M^{I}t+\omega^{I})$$
$$-\chi^{II}\left(\Xi 1(a^{I},a^{II})\cos.(\mu^{II}-\mu^{I})t+\Xi 2(a^{I},a^{II})\cos.2(\mu^{II}-\mu^{I})t+\&c.\right)$$
$$-\chi^{III}\left(\Xi(a^{I},a^{III})\cos.(\mu^{III}-\mu^{I})t+\Xi 2(a^{I},a^{III})\cos.2(\mu^{III}-\mu^{I})t+\&c.\right)$$
$$-\chi^{IV}\left(\Xi 1(a^{I},a^{IV})\cos.(\mu^{IV}-\mu^{I})t+\Xi 2(a^{I},a^{IV})\cos.2(\mu^{IV}-\mu^{I})t+\&c.\right)$$
$$-K^{I}\beta^{I}\cos.2(m-\mu^{I})t.$$

XXXVII.

Ayant trouvé la valeur x^{I}, on aura l'expreſſion du rayon vecteur r^{I} de l'orbite du premier ſatellite rapportée au plan de l'orbite de Jupiter, par la formule $r^{I}=a^{I}(1+nx^{I})$, art. IV.

Or, en examinant cette expreſſion de r^{I}, on reconnoîtra aiſément que le terme $na^{I}\varepsilon^{I}\cos.(M^{I}t+\omega^{I})$ repréſente l'équation elliptique qui vient de l'excentricité de l'orbite, deſorte que $n\varepsilon^{I}$ exprimera la valeur de l'excentricité, & $M^{I}t+\omega^{I}$ ſera l'anomalie moyenne; d'où l'on voit que le mouvement de cette anomalie ſera au mouvement moyen du ſatellite comme M^{I} à μ^{I}; par conſéquent le mouvement moyen de la ligne des apſides ſera au mouvement moyen du ſatellite comme $\mu^{I}-M^{I}:\mu^{I}$. Nous verrons plus bas (art. XLV), qu'en négligeant les quantités de l'ordre n, on a $M^{I}=\mu^{I}$, de ſorte que la ligne des apſides ſera fixe, au moins par cette première approximation.

A l'égard de ω^{I}, on le déterminera par le moyen d'une époque quelconque donnée de l'anomalie moyenne; ainſi les quantités ε^{I} & ω^{I} dépendent entièrement des obſervations.

Les autres termes de la valeur de r^{I} expriment les inégalités qui viennent de l'action des trois ſatellites $\mathfrak{C}^{II}$, $\mathfrak{C}^{III}$, $\mathfrak{C}^{IV}$ & du Soleil, ſur le ſatellite $\mathfrak{C}^{I}$.

XXXVIII.

On ſubſtituera maintenant la valeur de x^{I} dans la ſeconde équation de l'article XXXV, & on tirera par l'intégration la valeur de y^{I}, mais on aura attention de faire évanouir auparavant (art. XXXIII) le terme conſtant $f^{I}H^{I}$; ce qui donnera $H^{I}=0$.

Soit pour abréger

$$\Phi 1(a^{I},a^{II})=\frac{2\mu^{I}}{\mu^{II}-\mu^{I}}\Xi 1(a^{I},a^{II})+\frac{f^{I}}{(\mu^{II}-\mu^{I})^{2}}\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{II})$$

$$\Phi 2(a^{I},a^{II})=\frac{2\mu^{I}}{2(\mu^{II}-\mu^{I})}\Xi 2(a^{I},a^{II})+\frac{f^{I}}{4(\mu^{II}-\mu^{I})^{2}}\hat{\Gamma}2(a^{I},a^{II})$$

$$\Phi 3(a^{I},a^{II})=\frac{2\mu^{I}}{3(\mu^{II}-\mu^{I})}\Xi 3(a^{I},a^{II})+\frac{f^{I}}{9(\mu^{II}-\mu^{I})^{2}}\hat{\Gamma}3(a^{I},a^{II})\ \&c.$$

& pareillement

$$\Phi 1(a^{I},a^{III})=\frac{2\mu^{I}}{\mu^{III}-\mu^{I}}\Xi 1(a^{I},a^{III})+\frac{f^{I}}{(\mu^{III}-\mu^{I})^{2}}\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{III})$$

$$\Phi 2(a^{I},a^{III})=\frac{2\mu^{I}}{2(\mu^{III}-\mu^{I})}\Xi 2(a^{I},a^{III})+\frac{f^{I}}{4(\mu^{III}-\mu^{I})^{2}}\hat{\Gamma}2(a^{I},a^{III})\ \&c.$$

& ainſi de ſuite.

Soit de plus

$\gamma^{I}=\frac{\mu^{I}}{m-\mu^{I}}\beta^{I}-\frac{3f^{I}}{8(m-\mu^{I})^{2}}$, on trouvera

$$y^{I}=-\frac{2\mu^{I}\varepsilon^{I}}{M^{I}}\sin.(M^{I}t+\omega^{I})$$

$$+\chi^{II}\left(\Phi 1(a^{I},a^{II})\sin.(\mu^{II}-\mu^{I})t+\Phi 2(a^{I},a^{II})\sin.2(\mu^{II}-\mu^{I})t+\&c.\right)$$
$$+\chi^{III}\left(\Phi 1(a^{I},a^{III})\sin.(\mu^{III}-\mu^{I})t+\Phi 2(a^{I},a^{III})\sin.2(\mu^{III}-\mu^{I})t+\&c.\right)$$
$$+\chi^{IV}\left(\Phi 1(a^{I},a^{IV})\sin.(\mu^{IV}-\mu^{I})t+\Phi 2(a^{I},a^{IV})\sin.2(\mu^{IV}-\mu^{I})t+\&c.\right)$$
$$+K^{I}\gamma^{I}\sin.2(m-\mu^{I})t.$$

XXXIX.

Puiſque $\varphi^{I}=\mu^{I}t+ny^{I}$, (art. IV) on aura, en connoiſſant y^{I}, l'expreſſion du mouvement vrai du premier ſatellite par ſon mouvement moyen.

Le terme $-\frac{2n\mu^{I}\epsilon^{I}}{M^{I}}\sin.(M^{I}t+\omega^{I})$ repréſentera l'équation du centre qui vient de la figure elliptique de l'orbite, & les termes ſuivans exprimeront les inégalités cauſées par l'action des trois autres ſatellites & du Soleil.

XL.

Enfin l'équation $\frac{d^{2}z^{I}}{dt^{2}}+N^{I2}z^{I}=0$ donnera $z^{I}=\lambda^{I}\sin.(N^{I}t+\eta^{I})$, λ^{I} & η^{I} étant des quantités arbitraires; car il eſt viſible que cette expreſſion $G\sin.N^{I}t+H\cos.N^{I}t$, laquelle repréſente généralement la valeur de z^{I} (art. XXXIV) peut ſe reduire à celle-ci : $\lambda^{I}\sin.(N^{I}t+\eta^{I})$.

XLI.

On aura donc, à cauſe de $p^{I}=nz^{I}$ (art. IV), $p^{I}=n\lambda^{I}\sin.(N^{I}t+\eta^{I})=$ tangente de la latitude du ſatellite par rapport au plan de l'orbite de Jupiter; d'où l'on voit que l'orbite réelle du ſatellite ſera toute dans un plan paſſant par le centre de Jupiter, & dont on reconnoîtra la poſition, en remarquant, 1.° que $n\lambda^{I}$ étant la plus grande valeur de p^{I}, exprimera la tangente de l'inclinaiſon; 2.° que $N^{I}t+\eta^{I}$ ſera la diſtance du ſatellite au nœud aſcendant, comptée ſur l'orbite de Jupiter, laquelle étant retranchée de la longitude moyenne $\mu^{I}t$, on aura $(\mu^{I}-N^{I})t-\eta^{I}$ pour la longitude moyenne du nœud.

Au reſte, puiſque l'on a ici $N^{I}=\mu^{I}$ (art. XXXV), le mouvement du nœud ſera nul, & ſa longitude moyenne ſera $-\eta^{I}$, ou plutôt $360°-\eta^{I}$, quantité qui dépend des obſervations; mais il faut ſe ſouvenir que ce réſultat n'eſt exact qu'aux quantités de l'ordre n près.

XLII.

On trouvera de même pour le ſecond ſatellite, les formules ſuivantes.

$$x^{II} = \varepsilon^{II} \cos.(M^{II}t + \omega^{II})$$
$$-\chi^{I}(\Xi 1(a^{I}, a^{II}) \cos.(\mu^{II} - \mu^{I})t + \Xi 2(a^{I}, a^{II}) \cos.2(\mu^{II} - \mu^{I})t \text{ \&c.})$$
$$-\chi^{III}(\Xi 1(a^{II}, a^{III}) \cos.(\mu^{III} - \mu^{II})t + \Xi 2(a^{II}, a^{III}) \cos.2(\mu^{III} - \mu^{II})t + \text{\&c.})$$
$$-\chi^{IV}(\Xi 1(a^{II}, a^{IV}) \cos.(\mu^{IV} - \mu^{II})t + \Xi 1(a^{II}, a^{IV}) \cos.2(\mu^{IV} - \mu^{II})t + \text{\&c.})$$
$$-K^{II}\beta^{II} \cos.2(m - \mu^{II})t.$$

$$y^{II} = -\frac{2\mu^{II}\varepsilon^{II}}{M^{II}} \sin.(M^{II}t + \omega^{II})$$
$$+\chi^{I}(\Phi 1(a^{II}, a^{I}) \sin.(\mu^{I} - \mu^{II})t + \Phi 2(a^{II}, a^{I}) \sin.2(\mu^{I} - \mu^{II})t + \text{\&c.})$$
$$+\chi^{III}(\Phi 1(a^{II}, a^{III}) \sin.(\mu^{III} - \mu^{II})t + \Phi 2(a^{II}, a^{III}) \sin.2(\mu^{III} - \mu^{II})t + \text{\&c.})$$
$$+\chi^{IV}(\Phi 1(a^{II}, a^{IV}) \sin.(\mu^{IV} - \mu^{II})t + \Phi 2(a^{II}, a^{IV}) \sin.2(\mu^{IV} - \mu^{II})t + \text{\&c.})$$
$$+K^{II}\gamma^{II} \sin.2(m - \mu^{II})t.$$

$$z^{II} = \lambda^{II} \sin.(\mu^{II}t + \eta^{II}).$$

Et l'on aura enfuite $r^{II} = a^{II}(1 + nx^{II})$, $\varphi^{II} = \mu^{II}t + ny^{II}$, $p^{II} = nz^{II}$.

Quant aux quantités marquées par Ξ & Φ, on aura

$$\Xi 1(a^{II}, a^{I}) = \left(\breve{\Gamma} 1(a^{II}, a^{I}) + \frac{2\mu^{II}}{\mu^{I} - \mu^{II}} \hat{\Gamma} 1(a^{II}, a^{I})\right) \frac{f^{II}}{(\mu^{I} - \mu^{II})^2 - M^{II2}}$$

$$\Xi 2(a^{II}, a^{I}) = \left(\breve{\Gamma} 2(a^{II}, a^{I}) + \frac{2\mu^{II}}{2(\mu^{I} - \mu^{II})} \hat{\Gamma} 2(a^{II}, a^{I})\right) \frac{f^{II}}{4(\mu^{I} - \mu^{II})^2 - M^{II2}} \text{ \&c.}$$

$$\Phi 1(a^{II}, a^{I}) = \frac{2\mu^{II}}{\mu^{I} - \mu^{II}} \Xi 1(a^{II}, a^{I}) + \frac{f^{II}}{(\mu^{I} - \mu^{II})^2} \hat{\Gamma} 1(a^{II}, a^{I})$$

$$\Phi 2(a^{II}, a^{I}) = \frac{2\mu^{II}}{2(\mu^{I} - \mu^{II})} \Xi 2(a^{II}, a^{I}) + \frac{f^{II}}{4(\mu^{I} - \mu^{II})^2} \hat{\Gamma} 2(a^{II}, a^{I}) \text{ \&c.}$$

Outre cela on aura

$$\mathcal{L}^{II} = g^{II} - 2\mu^{II} H^{II} - \chi^{I} \breve{\Gamma}(a^{II}, a^{I}) - \chi^{III} \breve{\Gamma}(a^{II}, a^{III})$$
$$- \chi^{IV} \breve{\Gamma}(a^{II}, a^{IV}) - \tfrac{1}{2} K^{II} + \tfrac{1}{5} x^{II}.$$

$$M^{II2} = 3\mu^{II2} - 2f^{II}.$$

$$\beta^{II} = \tfrac{3}{2}\left(1 - \frac{\mu^{II}}{m - \mu^{II}}\right) \frac{f^{II}}{4(m - \mu^{II})^2 - M^{II2}}$$

$$\gamma^{II} = \frac{\mu^{II}}{m - \mu^{II}} \beta^{II} - \frac{3f^{II}}{8(m - \mu^{II})^2}$$

Enfin on trouvera les deux conditions $\mathcal{L}^{II} = 0$ &

$H^{II} = 0$, qui ſerviront à déterminer les deux conſtantes f^{II} & ϵ^{II}, (art. XIX.)

On aura des formules analogues pour le troiſième & le quatrième ſatellite, que nous nous diſpenſerons de rapporter ici, parce qu'elles ſe déduiſent à l'œil de celles que nous venons de donner.

§. 2.

Valeurs numériques des coefficiens des formules précédentes.

XLIII.

Soit en général, ſuivant l'article XVIII,

$(1 - 2q\cos.\theta + q^2)^{-\frac{1}{2}} = A + B\cos.\theta + C\cos.2\theta + D\cos.3\theta +$ &c.

q étant une fraction moindre que l'unité; on aura, en faiſant $q = \frac{a^I}{a^{II}}$, & $\theta = \varphi^{II} - \varphi^I$,

$(a^{I2} - 2a^I a^{II}\cos.(\varphi^{II} - \varphi^I) + a^{II2})^{-\frac{1}{2}} = a^{II-1}(A + B\cos.(\varphi^{II} - \varphi^I) + C\cos.2(\varphi^{II} - \varphi^I) +$ &c.); donc (art. XXI),

$\Gamma(a^I, a^{II}) = \frac{A}{a^{II}}$, $\Gamma 1(a^I, a^{II}) = \frac{B}{a^{II}}$, $\Gamma 2(a^I, a^{II}) = \frac{C}{a^{II}}$ &c.

On trouvera de même en faiſant ſucceſſivement

$q = \frac{a^I}{a^{III}}$, $q = \frac{a^I}{a^{IV}}$, $q = \frac{a^{II}}{a^{III}}$, $q = \frac{a^{II}}{a^{IV}}$, $q = \frac{a^{III}}{a^{IV}}$, on trouvera, dis-je,

$\Gamma(a^I, a^{III}) = \frac{A}{a^{III}}$, $\Gamma 1(a^I, a^{III}) = \frac{B}{a^{III}}$, &c.

$\Gamma(a^I, a^{IV}) = \frac{A}{a^{IV}}$, $\Gamma 1(a^I, a^{IV}) = \frac{B}{a^{IV}}$, &c.

$\Gamma(a^{II}, a^{III}) = \frac{A}{a^{III}}$, $\Gamma 1(a^{II}, a^{III}) = \frac{B}{a^{III}}$, &c. & ainſi de ſuite.

A l'égard des quantités $\Gamma(a^{II}, a^I)$, $\Gamma(a^{III}, a^I)$, &c.

il eſt évident qu'elles doivent être égales à leurs réciproques $\Gamma(a^{I}, a^{II})$, $\Gamma(a^{I}, a^{III})$, &c. car les fonctions $a^{I2} - 2a^{I}a^{II}\cos.(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + a^{II2}$, $a^{I2} - 2a^{I}a^{III}\cos.(\varphi^{III} - \varphi^{I}) + a^{III2}$, &c. demeurent les mêmes, en changeant a^{I} en a^{II}, & a^{II} en a^{I}, ou bien a^{I} en a^{III}, & a^{III} en a^{I}, &c.

XLIV.

De-là on trouvera (art. XXIV), q étant $= \frac{a^{I}}{a^{II}}$,

$$\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) = \frac{q^2 B - 2q^3 A}{2},$$

$$\breve{\Gamma}1(a^{I}, a^{II}) = \frac{q^2 C - 2q^3 B + 2q^2 A}{2} - q^2$$

$$\breve{\Gamma}2(a^{I}, a^{II}) = \frac{q^2 D - 2q^3 C + q^2 B}{2},$$

$$\breve{\Gamma}3(a^{I}, a^{II}) = \frac{q^2 E - 2q^2 D + q^2 C}{2}, \text{ &c.}$$

Et par l'article XXV on aura

$$\hat{\Gamma}1(a^{I}, a^{II}) = \frac{q^2 C - 2q^2 A}{2} + q^2,$$

$$\hat{\Gamma}2(a^{I}, a^{II}) = \frac{q^2 D - q^2 B}{2},$$

$$\hat{\Gamma}3(a^{I}, a^{II}) = \frac{q^2 E - q^2 C}{2}, \text{ &c.}$$

& ces mêmes formules ſerviront auſſi pour les quantités $\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{III})$, $\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{IV})$, $\breve{\Gamma}(a^{II}, a^{III})$, &c. $\hat{\Gamma}(a^{I}, a^{III})$, $\hat{\Gamma}(a^{I}, a^{IV})$, $\hat{\Gamma}(a^{II}, a^{III})$, &c. en faiſant ſucceſſivement $q = \frac{a^{I}}{a^{III}}$, $q = \frac{a^{I}}{a^{IV}}$, $q = \frac{a^{II}}{a^{III}}$, &c.

Mais pour les quantités réciproques $\breve{\Gamma}(a^{II}, a^{I})$, $\hat{\Gamma}(a^{II}, a^{I})$, &c. on aura les formules ſuivantes:

$$\breve{\Gamma}(a^{II}, a^{I}) = \frac{qB - 2A}{2},$$

$$\breve{\Gamma}^1(a^{II}, a^I) = \frac{qC - 2B + 2qA}{2} - \frac{1}{q^2},$$

$$\breve{\Gamma}^2(a^{II}, a^I) = \frac{qD - 2C + qB}{2},$$

$$\breve{\Gamma}^3(a^{II}, a^I) = \frac{qE - 2D + qC}{2}, \text{ \&c.}$$

$$\hat{\Gamma}^1(a^{II}, a^I) = \frac{qC - 2qA}{2} + \frac{1}{q^2},$$

$$\hat{\Gamma}^2(a^{II}, a^I) = \frac{qD - qB}{2},$$

$$\hat{\Gamma}^3(a^{II}, a^I) = \frac{qE - qC}{2}, \text{ \&c. lesquelles auront lieu pareillement pour les quantités } \breve{\Gamma}(a^{III}, a^I), \hat{\Gamma}(a^{III}, a^I), \text{ \&c. en faisant comme ci-devant } q = \frac{a^I}{a^{III}}, \text{ \&c.}$$

XLV.

On formera ensuite les quantités marquées par Ξ & par Φ, (art. XXXIV & XXXVIII), ce qui n'aura aucune difficulté. On remarquera seulement que, à cause de $1 - \frac{\mu^2}{f} = ng$ (art. XXIX), on aura, en négligeant la quantité ng qui est de l'ordre n, $f = \mu^2$, & de-là $f^I = \mu^{I2}$, $f^{II} = \mu^{II2}$, $f^{III} = \mu^{III2}$, $f^{IV} = \mu^{IV2}$; par conséquent $M^I = \mu^I$ (article XXXV), & pareillement $M^{II} = \mu^{II}$, $M^{III} = \mu^{III}$, $M^{IV} = \mu^{IV}$.

Donc supposant $s = \frac{\mu^{II}}{\mu^I}$, on aura

$$\Xi 1(a^I, a^{II}) = \left(\breve{\Gamma}1(a^I, a^{II}) + \frac{2}{s-1}\breve{\Gamma}1(a^I, a^{II})\right)\frac{1}{(s-1)^2-1},$$

$$\Xi 2(a^I, a^{II}) = \left(\breve{\Gamma}2(a^I, a^{II}) + \frac{2}{2(s-1)}\breve{\Gamma}2(a^I, a^{II})\right)\frac{1}{4(s-1)^2-1},$$

$$\Xi 3(a^I, a^{II}) = \left(\breve{\Gamma}3(a^I, a^{II}) + \frac{2}{3(s-1)}\breve{\Gamma}3(a^I, a^{II})\right)\frac{1}{9(s-1)^2-1}, \text{ \&c.}$$

$$\Phi 1(a^{I}, a^{II}) = \frac{2}{s-1}\,\Xi 1(a^{I}, a^{II}) + \frac{1}{(s-1)^2}\,\hat{\Gamma} 1(a^{I}, a^{II}),$$

$$\Phi 2(a^{I}, a^{II}) = \frac{2}{2(s-1)}\,\Xi 2(a^{I}, a^{II}) + \frac{1}{4(s-1)^2}\,\hat{\Gamma} 2(a^{I}, a^{II}),$$

$$\Phi 3(a^{I}, a^{II}) = \frac{2}{3(s-1)}\,\Xi 3(a^{I}, a^{II}) + \frac{1}{9(s-1)^2}\,\hat{\Gamma} 3(a^{I}, a^{II}), \text{ \&c.}$$

De même en faisant $s = \frac{\mu^{III}}{\mu^{I}}$, on aura

$$\Xi 1(a^{I}, a^{III}) = \left(\breve{\Gamma} 1(a^{I}, a^{III}) + \frac{2}{s-1}\,\hat{\Gamma}(a^{I}, a^{III})\right)\frac{1}{(s-1)^2-1} \text{ \&c.}$$

$$\Phi 1(a^{I}, a^{III}) = \frac{2}{s-1}\,\Xi 1(a^{I}, a^{III}) + \frac{1}{(s-1)^2}\,\hat{\Gamma} 1(a^{I}, a^{III}) \text{ \&c.}$$

Pareillement on trouvera, s étant $= \frac{\mu^{II}}{\mu^{I}}$,

$$\Xi 1(a^{II}, a^{I}) = \left(\breve{\Gamma} 1(a^{II}, a^{I}) + \frac{2}{s-1}\,\hat{\Gamma}(a^{II}, a^{I})\right)\frac{1}{(s-1)^2-1} \text{ \&c.}$$

$$\Phi 1(a^{II}, a^{I}) = \frac{2}{s-1}\,\Xi 1(a^{II}, a^{I}) + \frac{1}{(s-1)^2}\,\hat{\Gamma} 1(a^{II}, a^{I}) \text{ \&c.}$$

Et ainsi des autres.

XLVI.

Cela posé, on remarquera :

1.° Que les quantités μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, μ^{IV} expriment les vitesses angulaires moyennes des satellites $\mathbb{C}^{I}$, $\mathbb{C}^{II}$, $\mathbb{C}^{III}$, $\mathbb{C}^{IV}$ autour de Jupiter (art. IV & IX); d'où il suit que ces quantités sont réciproquement proportionnelles aux aux temps périodiques des mêmes satellites.

Or on a, par les observations, en négligeant les secondes,

Révolutions périodiques.

$\mathbb{C}^{I}$ $\mathbb{C}^{II}$ $\mathbb{C}^{III}$ $\mathbb{C}^{IV}$

$1^{j}.\ 18^{h}.\ 27'$, $3^{j}.\ 13^{h}.\ 13'$, $7^{j}.\ 3^{h}.\ 42'$, $16\ 16^{h}.\ 32'$.

Donc réduisant ces quantités en minutes, on aura

$\mu^{I} = \frac{1}{2547}$, $\mu^{II} = \frac{1}{5113}$, $\mu^{III} = \frac{1}{10302}$, $\mu^{IV} = \frac{1}{24032}$.

2.° Que l'on a généralement $f = \mu^2$ (art. XLV); c'est-à-dire (à cause de $f = \frac{F}{a^3}$ (art. V) & de $F = \mathcal{T} + \mathbb{C}$, (art. X)

$= \Psi(1+n\chi) = \Psi)\frac{\Psi}{a^3} = \mu^2$; & par conséquent $\mu^{I_2} = \frac{\Psi}{a^{I_3}}$, $\mu^{II_2} = \frac{\Psi}{a^{II_3}}$; $\mu^{III_2} = \frac{\Psi}{a^{III_3}}$, $\mu^{IV_2} = \frac{\Psi}{a^{IV_3}}$; d'où l'on voit que les quantités a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV} sont entr'elles comme les quantités $\frac{1}{\mu^{I\frac{2}{3}}}$, $\frac{1}{\mu^{II\frac{2}{3}}}$, $\frac{1}{\mu^{III\frac{2}{3}}}$, $\frac{1}{\mu^{IV\frac{2}{3}}}$; ainsi on trouvera les valeurs de ces quantités, ou plutôt de leurs rapports, qui sont les seules dont nous ayons besoin ici.

Au reste comme ces valeurs ne sont exactes qu'aux quantités de l'ordre n près, nous emploierons, pour les distances moyennes des Satellites, les déterminations que M. Cassini a tirées des observations, lesquelles ne s'écartent d'ailleurs que très-peu de la loi de Kepler; on aura donc, en prenant le demi-diamètre de Jupiter pour l'unité,

$a^I = 5,67$; $a^{II} = 9,00$; $a^{III} = 14,38$; $a^{IV} = 25,30$.

Par le moyen de ces valeurs numériques, & des formules des articles XVIII & XIX, j'ai trouvé les déterminations suivantes.

q	$= \frac{a^I}{a^{II}}$	$= \frac{a^I}{a^{III}}$	$= \frac{a^I}{a^{IV}}$	$= \frac{a^{II}}{a^{III}}$	$= \frac{a^{II}}{a^{IV}}$	$= \frac{a^{III}}{a^{IV}}$
A	3.029	1.456	1.122	2.973	1.342	2.362
B	4.947	1.624	0.740	4.811	1.376	3.563
C	3.760	0.780	0.204	3.542	0.660	2.410
D	2.869	0.341	0.041	2.475	0.493	1.539
E	2.368	0.107	0.009	1.640	0.197	0.924
F	2.311	0.046	0.002	1.308	0.077	0.478
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Et de-là (art. XLIV),

	(a^{I}, a^{II})	(a^{I}, a^{III})	(a^{I}, a^{IV})	(a^{II}, a^{III})	(a^{II}, a^{IV})	(a^{III}, a^{IV})
$\breve{\Gamma}$	0. 224	0. 037	0. 007	0. 213	0. 027	0. 142
$\breve{\Gamma}^{1}$	0. 313	0. 032	0. 003	0. 286	0. 021	0. 175
$\breve{\Gamma}^{2}$	0. 611	0. 104	0. 017	0. 559	0. 088	0. 382
$\breve{\Gamma}^{3}$	0. 499	0. 048	0. 005	0. 415	0. 032	0. 255
$\breve{\Gamma}^{4}$	0. 436	0. 022	0. 001	0. 334	0. 027	0. 156
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.
$\hat{\Gamma}^{1}$	—0. 059	—0. 010	—0. 001	—0. 078	—0. 000	—0. 050
$\hat{\Gamma}^{2}$	—0. 412	—0. 099	—0. 017	—0. 457	—0. 056	—0. 327
$\hat{\Gamma}^{3}$	—0. 276	—0. 052	—0. 005	—0. 365	—0. 029	—0. 240
$\hat{\Gamma}^{4}$	—0. 111	—0. 024	—0. 001	—0. 234	—0. 026	—0. 172
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

	(a^{II}, a^{I})	(a^{III}, a^{I})	(a^{IV}, a^{I})	(a^{III}, a^{II})	(a^{IV}, a^{II})	(a^{IV}, a^{III})
$\breve{\Gamma}$	—1.471	—1.136	—1.039	—1.467	—1.097	—1.349
$\breve{\Gamma}^{1}$	—4.373	—7.328	—20.375	—4.395	—8.684	—4.631
$\breve{\Gamma}^{2}$	—1.298	—0.393	—0.116	—1.262	—0.328	—0.960
$\breve{\Gamma}^{3}$	—0.938	—0.166	—0.017	—0.853	—0.341	—0.592
$\breve{\Gamma}^{4}$	—0.736	—0.031	—0.004	—0.465	—0.096	—0.351
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

$\hat{\Gamma}^1$	1.796	6.012	19.681	1.802	7.542	2.438
$\hat{\Gamma}^2$	—0.654	—0.253	—0.053	—0.731	—0.157	—0.575
$\hat{\Gamma}^3$	—0.438	—0.133	—0.022	—0.595	—0.082	—0.422
$\hat{\Gamma}^4$	—0.175	—0.058	—0.004	—0.365	—0.074	—0.301
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

D'où enfin (art. XLV)

	(a^I, a^{II})	(a^I, a^{III})	(a^I, a^{IV})	(a^{II}, a^I)	(a^{II}, a^{III})	(a^{II}, a^{IV})
$\Xi 1$	—0.739	—0.133	—0.025	—57.643	—0.815	—0.058
$\Xi 2$	179.000	0.187	0.016	—0.637	91.562	0.539
$\Xi 3$	0.682	0.023	0.001	—0.152	0.698	0.012
$\Xi 4$	0.180	0.004	0.000	—0.054	0.184	0.004
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.
$\Phi 1$	2.705	0.337	0.054	—112.714	2.928	0.147
$\Phi 2$	—356.982	—0.292	—0.023	—0.793	—182.169	—0.908
$\Phi 3$	—1.025	—0.029	—0.001	—0.148	—1.081	—0.015
$\Phi 4$	—0.205	—0.005	—0.000	—0.003	—0.240	—0.005
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

	(a^{III}, a^{I})	(a^{III}, a^{II})	(a^{III}, a^{IV})	(a^{IV}, a^{I})	(a^{IV}, a^{II})	(a^{IV}, a^{III})
$\Xi 1$	—0.409	—31.500	—0.518	—0.224	—0.363	—1.243
$\Xi 2$	—0.013	—0.635	2.338	—0.000	—0.007	—0.064
$\Xi 3$	—0.002	—0.150	0.275	—0.000	—0.003	—0.053
$\Xi 4$	—0.000	—0.041	—0.066	—0.000	—0.000	—0.017
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.
$\Phi 1$	0.380	—60.322	1.659	0.224	0.354	—0.492
$\Phi 2$	—0.011	—0.803	—4.338	0.000	—0.004	—0.129
$\Phi 3$	—0.002	—0.163	—0.400	0.000	—0.001	—0.052
$\Phi 4$	0.000	—0.041	—0.089	0.000	—0.000	—0.017
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

En consultant cette dernière Table, on voit qu'il y a des quantités dont les valeurs numériques sont fort grandes; telles sont les quantités $\Xi 2(a^{I}, a^{II})$, $\Xi 1(a^{II}, a^{I})$, $\Xi 2(a^{II}, a^{III})$, $\Xi 1(a^{III}, a^{II})$, & leurs correspondantes $\Phi 2(a^{I}, a^{II})$, $\Phi 1(a^{II}, a^{I})$, $\Phi 2(a^{II}, a^{III})$, $\Phi 1(a^{III}, a^{II})$.

La raison pour laquelle ces quantités ont des valeurs si considérables, c'est que le diviseur $4(s-1)^2-1$ se trouve fort petit dans le cas où $s = \frac{\mu^{II}}{\mu^{I}}$, & $s = \frac{\mu^{III}}{\mu^{II}}$; & que pareillement le diviseur $(s-1)^2-1$ est fort petit lorsque $s = \frac{\mu^{I}}{\mu^{II}}$, & $s = \frac{\mu^{II}}{\mu^{III}}$, comme il est facile de s'en assurer, au moyen des valeurs de μ^{I}, μ^{II}, μ^{III} données ci-dessus.

Cette remarque eſt d'autant plus eſſentielle qu'elle ſert à expliquer pourquoi les équations empiriques des ſatellites de Jupiter ſont en effet les ſeules qui puiſſent être bien ſenſibles: voyez plus bas art. LVIII & ſuiv.

XLVIII.

Il ne reſte plus maintenant qu'à chercher les valeurs des quantités β & γ. (art. XXXVI & XXXVIII).

Pour cela, on remarquera que la quantité m qui repréſente la viteſſe angulaire moyenne du Soleil autour de Jupiter (art. XXVII), eſt extrêmement petite par rapport aux quantités μ, viteſſes moyennes des ſatellites; d'où il ſuit qu'elle pourra être négligée vis-à-vis de ces dernières quantités; or on a généralement (art. cités),

$$\beta = \tfrac{3}{2}\left(1 - \frac{\mu}{m-\mu}\right)\frac{f}{4(m-\mu)^2 - M^2}, \text{ \& } \gamma = \frac{\mu}{m-\mu}\beta - \frac{3f}{8(m-\mu)^2}$$

c'eſt-à-dire, à cauſe de $f = \mu^2$, & $M = \mu$ (art. XLV)

$$\beta = \tfrac{3}{2}\left(1 - \frac{\mu}{m-\mu}\right)\frac{\mu^2}{4(m-\mu)^2 - \mu^2}, \quad \gamma = \frac{\mu}{m-\mu}\beta - \frac{3\mu^2}{8(m-\mu)^2}$$

donc en négligeant les quantités m, on aura:

$$\beta = 1, \text{ \& } \gamma = -1 - \tfrac{3}{8} = -\tfrac{11}{8}.$$

A l'égard des quantités g & c qui doivent être déterminées par les équations $L = 0$, & $H = 0$, (art. XXIX, XXXV & ſuiv.) il eſt inutile d'en chercher la valeur, puiſqu'elles ne ſe trouvent point dans l'expreſſion des coefficiens de nos formules.

§.

Formules des rayons vecteurs, & des longitudes vraies des Satellites de Jupiter par rapport au plan de l'orbite de cette Planète.

XLIX.

Dans les formules ſuivantes, j'ai remis au lieu de $n\chi^1$,

$n\chi^{II}$, $n\chi^{III}$, $n\chi^{IV}$, les quantités $\frac{\mathbb{C}^{I}}{\mathfrak{T}}$, $\frac{\mathbb{C}^{II}}{\mathfrak{T}}$, $\frac{\mathbb{C}^{III}}{\mathfrak{T}}$, $\frac{\mathbb{C}^{IV}}{\mathfrak{T}}$ (art. XXIX); & j'ai substitué pour nK^{I}, nK^{II}, nK^{III}, nK^{IV}, leurs valeurs en nombres; car puisque $nK = \frac{a^{3}\odot}{a^{I}\mathfrak{T}}$ (article cité), & que $\frac{\mathfrak{T}}{a^{3}} = \mu^{2}$ (art. XLVI), & par conséquent aussi $\frac{\odot}{a^{3}} = m^{2}$, on aura $nK = \frac{m^{2}}{\mu^{2}}$; donc $nK^{I} = \frac{m^{2}}{\mu^{I2}}$, $nK^{II} = \frac{m^{2}}{\mu^{II2}}$ &c.

Or m étant la vitesse moyenne angulaire du Soleil autour de Jupiter, & μ les vitesses moyennes angulaires des Satellites, on aura $\frac{m}{\mu^{I}} = \frac{1^{j.}\ 18^{h.}\ 27'}{4332^{j.}\ 12^{h.}\ 20'}$, $\frac{m}{\mu^{II}} = \frac{3^{j.}\ 13^{h.}\ 13'}{4332^{j.}\ 12^{h.}\ 20'}$, $\frac{m}{\mu^{III}} = \frac{7^{j.}\ 12^{h.}\ 13'}{4332^{j.}\ 12^{h.}\ 20'}$, & $\frac{m}{\mu^{IV}} = \frac{16^{j.}\ 16^{h.}\ 32'}{4332^{j.}\ 12^{h.}\ 20'}$; d'où l'on tire à-très-peu près $nK^{I} = \frac{m^{2}}{\mu^{I2}} = 0.0000002$, $nK^{II} = 0.0000007$, $nK^{III} = 0.0000027$, $nK^{IV} = 0.0000148$.

Outre cela, au lieu de $\mu^{I}t$, $\mu^{II}t$, $\mu^{III}t$, $\mu^{IV}t$, & mt, qui représentent les valeurs moyennes des angles φ^{I}, φ^{II}, φ^{III}, φ^{IV} & $\downarrow$, c'est-à-dire des longitudes moyennes des quatre satellites, & du Soleil vus de Jupiter, & rapportés au plan de son orbite, j'ai mis les lettres u^{I}, u^{II}, u^{III}, u^{IV} & v.

De même au lieu de $M^{I}t + \omega^{I}$, $M^{II}t + \omega^{II}$, $M^{III}t + \omega^{III}$, $M^{IV}t + \omega^{IV}$, anomalies moyennes des Satellites, j'ai substitué pour plus de simplicité V^{I}, V^{II}, V^{III}, V^{IV}.

Enfin j'ai exprimé les rayons vecteurs en demi-diametres de Jupiter, & les longitudes en minutes. De cette manière j'ai trouvé :

L.

Rayon vecteur du premier Satellite.

$$r^{I} = 5,67(1 + n\varepsilon^{I}\cos.V^{I})$$

$$+\frac{\mathbb{C}^{II}}{4}(4,19\,cof.(u^{II}-u^{I})-1014,93\,cof.2(u^{II}-u^{I})$$
$$-3,87\,cof.3(u^{II}-u^{I})-1,02\,cof.4(u^{II}-u^{I})\ \&c.)$$
$$+\frac{\mathbb{C}^{III}}{4}(0,75\,cof.(u^{III}-u^{I})-1,06\,cof.2(u^{III}-u^{I})$$
$$-0,13\,cof.3(u^{III}-u^{I})-0,02\,cof.4(u^{III}-u^{I})\ \&c.)$$
$$+\frac{\mathbb{C}^{IV}}{4}(0,14\,cof.(u^{IV}-u^{I})-0,09\,cof.2(u^{IV}-u^{I})$$
$$-0,00\,cof.3(u^{IV}-u^{I})-0,00\,cof.4(u^{IV}-u^{I})\ \&c.)$$
$$-0.0000009\,cof.2(v-u^{I})$$

Rayon vecteur du second Satellite.

$$r^{II}=9,00(1+n\varepsilon^{II}cof.V^{II})$$
$$+\frac{\mathbb{C}^{I}}{4}(518,78\,cof.(u^{I}-u^{II})+5,73\,cof.2(u^{I}-u^{II})$$
$$+1,36\,cof.3(u^{I}-u^{II})+0,49\,cof.4(u^{I}-u^{II})\ \&c.)$$
$$+\frac{\mathbb{C}^{III}}{4}(7,16\,cof.(u^{III}-u^{II})-824,07\,cof.2(\mu^{III}-\mu^{II})$$
$$-6,29\,cof.3(u^{III}-u^{II})-1,66\,cof.4(\mu^{III}-\mu^{II})\ \&c.)$$
$$+\frac{\mathbb{C}^{IV}}{4}0,52\,cof.(u^{IV}-u^{II})-4,85\,cof.2(u^{IV}-u^{II})$$
$$-0,11\,cof.3(u^{IV}-u^{II})-0,04\,cof.4(u^{IV}-u^{II})\ \&c.)$$
$$-0,0000060\,cof.2(v-u^{II}).$$

Rayon vecteur du troisième Satellite.

$$r^{III}=14,38(1+n\varepsilon^{III}cof.V^{III})$$
$$+\frac{\mathbb{C}^{I}}{4}(5,88\,cof.(u^{I}-u^{III})+0,19\,cof.2(u^{I}-u^{III})$$
$$+0,03\,cof.3(u^{I}-u^{III})+0,00\,cof.4(u^{I}-u^{III})\ \&c.)$$
$$+\frac{\mathbb{C}^{II}}{4}(452,98\,cof.(u^{II}-u^{III})+9,13\,cof.2(u^{II}-u^{III})$$
$$+2,16\,cof.3(u^{II}-u^{III})+0,59\,cof.4(u^{II}-u^{III})\ \&c.)$$
$$+\frac{\mathbb{C}^{IV}}{4}7,46\,cof.(u^{IV}-u^{III})-33,62\,cof.2(u^{IV}-u^{III})$$
$$-3,95\,cof.3(u^{IV}-u^{III})+0,95\,cof.4(u^{IV}-u^{III})\ \&c.)$$
$$-0,0000392\,cof.2(v-u^{III}).$$

Rayon

Rayon vecteur du quatrième Satellite.

$$r^{IV} = 25,30(1+ne^{IV}\cos.V^{IV})$$
$$+\frac{\mathfrak{C}^{I}}{\mathfrak{T}}(5,66\cos.(u^{I}-u^{IV})+0,01\cos.2(u^{I}-u^{IV})$$
$$+0,00\cos.3(u^{I}-u^{IV})+0,00\cos.4(u^{I}-u^{IV})\ \&c.)$$
$$+\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}}(9,18\cos.(u^{II}-u^{IV})+0,17\cos.2(u^{II}-u^{IV})$$
$$+0,07\cos.3(u^{II}-u^{IV})+0,00\cos.4(u^{II}-u^{IV})\ \&c.)$$
$$+\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}}(31,55\cos.(u^{III}-u^{IV})+1,62\cos.2(u^{III}-u^{IV})$$
$$+1,35\cos.3(u^{III}-u^{IV})+0,43\cos.4(u^{III}-u^{IV})\ \&c.)$$
$$-0,0003754\cos.2(v-u^{IV}).$$

LI.

Longitude vraie du premier Satellite.

$$\varphi^{I} = u^{I} - 114^{\circ},35' ne^{I}\sin.V^{I}$$
$$+\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}}(9300'\sin.(u^{II}-u^{I})-1227214'\sin.2(u^{II}-u^{I})$$
$$-3526'\sin.3(u^{II}-u^{I})-705'\sin.4(u^{II}-u^{I})\ \&c.)$$
$$+\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}}(1158'\sin.(u^{III}-u^{I})-1007'\sin.2(u^{III}-u^{I})$$
$$-101'\sin.3(u^{III}-u^{I})-18'\sin.4(u^{III}-u^{I})\ \&c.)$$
$$+\frac{\mathfrak{C}^{IV}}{\mathfrak{C}}(188'\sin.(u^{IV}-u^{I})-81'\sin.2(u^{IV}-u^{I})-3'$$
$$\sin.3(u^{IV}-u^{I})-0'\sin.4(u^{IV}-u^{I})\ \&c.)$$
$$-0'',047\sin.2(v-u^{I}).$$

Longitude vraie du second Satellite.

$$\varphi^{II} = u^{II} - 114^{\circ},35' ne^{II}\sin.V^{II}$$

$$+\frac{\mathbb{C}^{I}}{\mathfrak{P}}(-387482'\,\sin.(u^{I}-u^{II})-2727'\,\sin.2(u^{I}-u^{II})$$
$$-509'\,\sin.3(u^{I}-\mu^{II})-12'\,\sin.(u^{I}-u^{II})\ \&c.)$$
$$+\frac{\mathbb{C}^{III}}{\mathfrak{P}}(10067'\sin.(u^{III}-u^{II})-626246'\sin.2(u^{III}-u^{II})$$
$$-3717'\,\sin.3(u^{III}-u^{II})-825'\,\sin.4(u^{III}-u^{II})\ \&c.)$$
$$+\frac{\mathbb{C}^{IV}}{\mathfrak{P}}(506'\sin.(u^{IV}-u^{II})-3123'\,\sin.2(u^{IV}-u^{II})-52'$$
$$\sin.3(u^{IV}-u^{II})-17'\,\sin.4(u^{IV}-u^{II})\ \&c.)$$
$$-0'',190\,\sin.2(v-u^{II}).$$

Longitude vraie du troisième Satellite.

$$\varphi^{III}=u^{III}-114^{\circ},35'\,n\varepsilon^{III}\,\sin.V^{III}$$
$$+\frac{\mathbb{C}^{I}}{\mathfrak{P}}(1306'\,\sin.(u^{I}-u^{III})-38'\,\sin.2\,(u^{I}-u^{III})-8'$$
$$\sin.3(u^{I}-u^{III})-1'\,\sin.4(u^{I}-u^{III})\ \&c.)$$
$$+\frac{\mathbb{C}^{II}}{\mathfrak{P}}(-207375'\,\sin.(u^{II}-u^{III})-2760'\,\sin.2(u^{II}-u^{III})$$
$$-559'\,\sin.3(u^{II}-u^{III})-142'\,\sin.4(u^{II}-^{III})\ \&c.)$$
$$+\frac{\mathbb{C}^{IV}}{\mathfrak{P}}(5703'\,\sin.(u^{IV}-u^{III})-14911'\,\sin.2(u^{IV}-u^{III})$$
$$-1376'\,\sin.3(u^{IV}-u^{III})-306'\,\sin.4(u^{IV}-u^{III})\ \&c.)$$
$$-0'',977\,\sin.(v-u^{III}).$$

Longitude vraie du quatrième Satellite.

$$\varphi^{IV}=u^{IV}-114^{\circ},35'\,n\varepsilon^{IV}\,\sin.V^{IV}$$
$$+\frac{\mathbb{C}^{I}}{\mathfrak{P}}(768'\,\sin.(u^{I}-u^{IV})-0'\,\sin.2\,(u^{I}-u^{IV})-0'$$
$$\sin.3(u^{I}-u^{IV})-0'\,\sin.4(u^{I}-u^{IV})\ \&c.)$$
$$+\frac{\mathbb{C}^{II}}{\mathfrak{P}}(1219'\,\sin.(u^{II}-u^{IV})-15'\,\sin.2(u^{II}-u^{IV})-3'$$
$$\sin.3(u^{II}-^{IV})-0'\,\sin.4(u^{II}-u^{IV})\ \&c.)$$

$+\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}}(-1691'\,sin.(u^{III}-u^{IV})-444'\,sin.2(u^{III}-u^{IV})$
$-180'\,sin.3\,(u^{III}-u^{IV})-59\,sin.4\,(u^{III}-u^{IV})$ &c.)
$-4'',208\,sin.2(v-u^{IV})$.

§. 4.

Où l'on donne les inégalités des Satellites, qui dépendent de leurs configurations, & qui ont lieu au temps des éclipses.

LII.

Il est visible que les éclipses des Satellites, c'est-à-dire leurs conjonctions avec Jupiter, arrivent lorsque leurs longitudes φ diffèrent de 180° de la longitude $\downarrow$ du Soleil vu de Jupiter; de sorte qu'on aura généralement l'équation $\varphi-\downarrow=180°$; ou bien, en mettant pour φ & $\downarrow$, leurs valeurs $u+ny$; & $v+nJ$; $u-v=180°+nJ-ny$; où nJ exprime l'équation de Jupiter, ny l'équation, ou plutôt la somme des équations du Satellite, & $u-v$ la distance, ou bien l'élongation moyenne du satellite; donc pour avoir la conjonction vraie, il n'y aura qu'à ajouter au temps de la conjonction moyenne la quantité $nJ-ny$ convertie en temps, à raison du mouvement moyen du satellite au Soleil, conversion qu'on fera aisément en multipliant la quantité proposée par 0,1179 pour le premier satellite, par 0,2369 pour le second, par 0,4771 pour le troisième & par 1,1169 pour le quatrième; & changeant ensuite les degrés en heures, les minutes en minutes de degrés, &c, ces nombres se trouvent, en divisant les durées des révolutions synodiques des satellites, lesquelles sont de $1^j.\,18^h.\,28'\,36''$, $3^j.\,13^h.\,17'\,54''$, $7^j.\,3^h.\,59'\,36''$, $16^j.\,18^h.\,5'\,7''$ par 360°, après avoir réduit le tout en secondes.

LIII.

Nous allons donc donner ici les équations des conjonctions des ſatellites ; mais nous ferons abſtraction de de celles qui viennent de l'excentricité de Jupiter, & des excentricités particulières des ſatellites, parce que les unes ſont aſſez connues des Aſtronomes, & que les autres ne ſont pas aſſez exactes pour qu'on puiſſe s'y fier.

LIV.

Équation du premier Satellite.

$$\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{C}^{II}}\left(-1097'\,\mathit{sin.}\,(u^{II}-u^{I})+144800'\,\mathit{sin.}\,2\,(u^{II}-u^{I})\right.$$
$$\left.+416'\,\mathit{sin.}\,3(u^{II}-u^{I})+83'\,\mathit{sin.}\,4(u^{II}-u^{I})\ \&c.\right)+$$
$$\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}}\left(-137'\,\mathit{sin.}\,(u^{III}-u^{I})+119'\,\mathit{sin.}\,2(u^{III}-u^{I})+12'\right.$$
$$\left.\mathit{sin.}\,3(u^{III}-u^{I})+1'\,\mathit{sin.}\,4(u^{III}-u^{I})\ \&c.\right)+$$
$$\frac{\mathfrak{C}^{IV}}{\mathfrak{T}}\left(-22'\,\mathit{sin.}\,(u^{IV}-u^{I})+9'\,\mathit{sin.}\,2(u^{IV}-u^{I})+0'\right.$$
$$\left.\mathit{sin.}\,3(u^{IV}-u^{I})+0'\,\mathit{sin.}\,4(u^{IV}-u^{I})\ \&c.\right)$$

LV.

Équation du ſecond Satellite.

$$\frac{\mathfrak{C}^{I}}{\mathfrak{T}}\left(91810'\,\mathit{sin.}\,(u^{I}-u^{II})+646'\,\mathit{sin.}\,2(u^{I}-u^{II})+121'\right.$$
$$\left.\mathit{sin.}\,3(u^{I}-u^{II})+3'\,\mathit{sin.}\,4(u^{I}-u^{II})\ \&c.\right)+$$
$$\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}}\left(-2385'\,\mathit{sin.}\,(u^{III}-u^{II})+148383'\,\mathit{sin.}\,2(u^{III}-u^{II})\right.$$
$$\left.+881'\,\mathit{sin.}\,3(u^{III}-u^{II})+195'\,\mathit{sin.}\,4(u^{III}-u^{II})\ \&c.\right)+$$
$$\frac{\mathfrak{C}^{IV}}{\mathfrak{T}}\left(-119'\,\mathit{sin.}\,(u^{IV}-u^{II})+740'\,\mathit{sin.}\,2(u^{IV}-u^{II})+12'\right.$$
$$\left.\mathit{sin.}\,3(u^{IV}-u^{II})+4'\,\mathit{sin.}\,4(u^{IV}-u^{II})\ \&c.\right)$$

LVI.

Équation du troisième Satellite.

$$\frac{\mathfrak{C}^{I}}{\mathfrak{T}}(-624'\,sin.(u^{I}-u^{III})+18'\,sin.2(u^{I}-u^{III})+4'\,sin.3(u^{I}-u^{III})+0'\,sin.4(u^{I}-u^{III})\ \&c.)+$$
$$\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}}(99075'\,sin.(u^{II}-u^{III})+1319'\,sin.2(u^{II}-u^{III})+267'\,sin.3(u^{II}-u^{III})+68'\,sin.4(u^{II}-u^{III})\ \&c.)+$$
$$\frac{\mathfrak{C}^{IV}}{\mathfrak{T}}(-2725'\,sin.(u^{IV}-u^{III})+7124'\,sin.2(u^{IV}-u^{III})+627'\,sin.3(u^{IV}-u^{III})+146'\,sin.4(u^{IV}-u^{III})\ \&c.)$$

LVII.

Équation du quatrième Satellite.

$$\frac{\mathfrak{C}^{I}}{\mathfrak{T}}(-858'\,sin.(u^{I}-u^{IV})+0'\,sin.2(u^{I}-u^{IV})\ \&c.)+$$
$$\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}}(-1362'\,sin.(u^{II}-u^{IV})+18'\,sin.2(u^{II}-u^{IV})+4'\,sin.3(u^{II}-u^{IV})-0'\,sin.4(u^{II}-u^{IV})\ \&c.)+$$
$$\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}}(1888'\,sin.(u^{III}-u^{IV})+496'\,sin.2(u^{III}-u^{IV})+201'\,sin.3(u^{III}-u^{IV})+66'\,sin.4(u^{III}-u^{IV})\ \&c.)$$

J'ai négligé dans ces formules les termes dus à l'action du Soleil, & qui sont de la forme de $sin.2(v-u)$, parce que ces termes deviennent nuls au temps des conjonctions ou l'on a $u-v=180°$.

§. 5.

Comparaiſon des formules précédentes avec les obſervations, & conſéquences qui en réſultent par rapport aux maſſes des Satellites.

LVIII.

Nous nous contenterons ici de comparer nos formules avec les tables de M. Wargentin, qui ſont, comme l'on ſait, le réſultat d'un grand nombres d'obſervations; mais avant d'entreprendre ce parallèle, il eſt bon d'avertir que les tables de ce grand Aſtronome ſont dreſſées de manière qu'il n'y a aucune équation ſouſtractive, quoique les équations qu'il a employées, ſoient de nature à être tantôt additives & tantôt ſouſtractives; cela vient de ce que l'Auteur a retranché, par avance des époques, chacune des plus grandes équations ſouſtractives; deſorte que les équations des tables ſe trouvent nulles dans le cas où elles auroient été les plus grandes à ſouſtraire, & que leur plus grande valeur eſt double de ce qu'elle auroit dû être.

LIX.

En examinant les différens termes de la formule de l'article LIV, on voit qu'il y en a un dont le coefficient numerique eſt très-grand, & vis-à-vis duquel tous les autres termes ne ſont preſque d'aucune conſidération; c'eſt le terme $\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}}\,144800'\,\mathit{ſin.}\,2\,(u^{II}-u^{I})$, d'où réſulte une équation qui a pour argument $2\,(u^{II}-u^{I})$, ſavoir le double de la diſtance moyenne du ſecond ſatellite au premier, au temps des conjonctions de celui-ci, & dont

la plus grande valeur eſt de $\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}} 144800'$, $\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}}$ exprimant le rapport de la maſſe du ſecond ſatellite à celle de Jupiter.

Pour mieux connoître la nature de cette inégalité qui doit avoir lieu dans les conjonctions du premier ſatellite, il faut chercher ſa période, laquelle dépend du rapport des révolutions ſynodiques des deux premiers ſatellites. Or ſuivant M. Wargentin, on a pour la durée de la révolution ſynodique du premier, $1^{j}\ 18^{h}\ 28'\ 35''\ 56'''\ 58^{IV}$, & pour celle du ſecond, $3^{j}\ 13^{h}\ 17'\ 53''\ 45'''\ 7^{IV}$; d'où l'on trouve, en additionnant ſucceſſivement ces nombres, que 247 révolutions du premier font $437^{j}\ 3^{h}\ 43'\ 59''\ 31''$, & que 123 révolutions du ſecond font $437^{j}\ 3^{h}\ 41'\ 11''\ 29'''$; ainſi pendant que le premier fait une révolution par rapport au Soleil, le ſecond ne fait que $\frac{123}{247}$ d'une pareille révolution; d'où il ſuit que la diſtance $u^{II} - u^{I}$ du ſecond ſatellite au premier augmente dans l'intervalle d'une conjonction à l'autre, de $(\frac{123}{247} - 1)\,360°$; pour avoir une exactitude plus grande, on additionnera de nouveau les périodes du premier & du ſecond ſatellite que nous venons de trouver, juſqu'à ce qu'ils faſſent des ſommes à-peu-près égales, & l'on trouvera que 449538 révolutions du premier font $795619^{j}\ 13^{h}\ 28'\ 8''\ 26'''$, & que 223860 révolutions du ſecond font $795619^{j}\ 13^{h}\ 32'\ 19''\ 40'''$; c'eſt pourquoi on aura, au lieu de la fraction $\frac{123}{247}$, celle-ci beaucoup plus exacte $\frac{223860}{449538}$.

Soit maintenant θ la diſtance du ſecond ſatellite au premier au temps d'une conjonction de celui-ci, cette diſtance deviendra, après n révolutions $\theta + n(\frac{223860}{449538} - 1)\,360° = u^{II} - u^{I}$; donc on aura $2(u^{II} - u^{I}) = 2\theta + n(\frac{447720}{449538} - 2)\,360° = 2\theta - n(\frac{1818}{449538} + 1)\,360°$;

& $\sin. 2(u^{II} - u^{I}) = \sin.(2\theta - n\,\frac{1818}{449538}\,380°)$; donc pourque cette quantité redevienne $\sin. 2\theta$, il faut que $\frac{1818n}{449538} = 1$, ce qui donne $n = \frac{449538}{1818} = 247,270$; c'eſt le nombre des révolutions du premier ſatellite qui exprime la période de l'équation $\sin. 2(u^{II} - u^{I})$.

Or 247 révolutions ſont à-très-peu près $437^{j}\ 3^{h}\ 44'\ 0''$; & $\frac{27}{100}$ de révolutions ſont $11^{h}\ 28'\ 7''$, donc la période cherchée ſera de $437^{j}\ 15^{h}\ 12'\ 7''$.

LX.

Voyons à-préſent quelle doit être la marche de cette équation ; pour cela, nous ſuppoſerons $\theta = 0$, c'eſt-à-dire, que les deux ſatellites ſe trouvent à-la-fois en conjonction, & nous aurons, après un nombre quelconque n de révolutions du premier ſatellite, $\sin. 2(u^{II} - u^{I}) = -\sin. n\,\frac{1818}{449538}\,360°$, ou bien en faiſant, pour abréger, $p = \frac{449538}{1818} =$ au nombre des révolutions qui forment la période de l'équation, $\sin. 2(u^{II} - u^{I}) = -\sin. \frac{n}{p}\,360°$.

De-là on voit que l'équation $\sin. 2(u^{II} - u^{I})$ ſera nulle au commencement de la période, qu'enſuite elle deviendra ſouſtractive, & qu'elle ſera la plus grande à ſouſtraire, lorſque $n = \frac{p}{4}$, c'eſt-à-dire, au quart de la période ; après quoi elle redeviendra nulle à la moitié de la période, enſuite ſe changera en additive croiſſante juſqu'aux trois quarts de la période, où elle ſera la plus grande, & enfin décroîtra pendant le dernier quart, pour ſe retrouver nulle au commencement de la période ſuivante.

LXI.

Je dis maintenant que l'équation que nous venons d'examiner eſt la même que celle qui ſe trouve dans les tables

tables du premier satellite, designée par la lettre C, & qui est la seule que les observations aient fait connoître jusqu'ici. En effet 1.° la période de cette équation est, selon M. Wargentin de $437^j\ 19^h\ 41'$ environ, ce qui s'accorde admirablement bien avec ce que nous avons trouvé dans l'article LIX; car la différence de $4^h\ 28'$ qui s'y trouve, n'est d'aucune considération par rapport à un intervalle de 437^j. 2.° Si on examine l'équation C on verra qu'en ôtant toujours $3'\ 30''$ (moitié de la plus grande valeur de cette équation, selon la remarque de l'article LVIII), & établissant le commencement de la période (qui est ici divisée en mille parties) au nombre 750, on verra, dis-je, que la marche de cette équation est la même que celle de l'équation $\sin. 2(u^{II} - u^{I})$ (art. préc.). De plus on trouvera, par les tables du premier & du second satellite, que dans les conjonctions du premier satellite, qui répondent exactement au nombre 750, l'élongation du second satellite est nulle. Donc, &c.

LXII.

De-là il suit que les nombres C des tables du premier satellite ne sont autre chose que les distances, c'est-à-dire, les élongations du second satellite au premier, au temps des conjonctions de celui ci, le cercle étant supposé divisé en 1000 parties, desorte que le nombre 750 réponde aux conjonctions des deux satellites & 250 à leurs oppositions; cette remarque fournit un moyen de rectifier les époques de ces nombres, si elles en avoient besoin, & de les prolonger autant qu'on voudra, sans craindre de s'égarer.

LXIII.

La plus grande valeur de l'équation C du premier satellite est de $7'$, dont il ne faut prendre que la moitié

(art. LVIII); donc, comparant cette valeur avec le coefficient de l'équation $\mathit{sin.}\ 2(u^{II} - u^{I})$ lequel est $\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}}$ 144800′ on aura $\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}}$ 144800 $= \frac{7}{2}$, d'où l'on tire $\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}} = \frac{7}{289600} =$ 0,00002417 $= \frac{11}{40000}$ à-peu-près; c'est le rapport de la masse du second satellite à celle de Jupiter. Si on prend la masse de la Terre pour l'unité, on a $\mathfrak{T} = 363,9$, ce qui donne $\mathfrak{C}^{II} = 0,008794 = \frac{11}{1250}$ à-peu-près.

Supposons que la densité de ce satellite soit la même que celle de Jupiter, ou au moins qu'elle n'en diffère que très-peu, ce qui est très-naturel, on trouvera, en prenant le demi-diamètre de Jupiter pour l'unité, que celui du satellite est 0,0289, c'est-à-dire, environ $\frac{1}{34}$, ce qui donneroit pour le temps que le satellite doit employer à entrer dans l'ombre de Jupiter 5′ 14″, ce qui est à-peu près le milieu entre les résultats des observations de M. Maraldi & de M. Whiston, (Mém. Acad. 1734).

LXIV.

Il seroit tout à-fait inutile d'examiner les autres termes de la formule de l'article LIV; car il est clair qu'il n'en pourroit résulter que des équations extrêmement petites, & par conséquent insensibles, à moins qu'on ne voulût supposer les masses du troisième & du quatrième satellite, énormément grandes par rapport à celle du second, ce qui ne paroît guères naturel; d'ailleurs l'équation que nous avons examinée est la seule qu'on ait jusqu'ici déduite des observations.

LXV.

Passons donc à la formule de l'article LV, qui renferme les équations des conjonctions du second satellite. Parmi tous les termes dont cette formule est composée, j'en

distingue d'abord deux qui sont beaucoup plus considérables que les autres par les coefficiens numériques dont ils sont affectés ; savoir :

$\frac{\mathbb{C}^{I}}{\mathbb{T}}$ 91810′ *sin.* $(u^{I} - u^{II}) + \frac{\mathbb{C}^{III}}{\mathbb{T}}$ 148383′ *sin.* $2(u^{III} - u^{II})$.

Dont l'un vient de l'action du premier satellite, & l'autre de l'action du troisième. Ces deux termes produisent, comme l'on voit, deux équations dont les argumens sont $u^{I} - u^{II}$, distance moyenne du premier satellite au second, & $2(u^{III} - u^{II})$ double de la distance moyenne du troisième satellite au second au temps des conjonctions de celui-ci.

Je remarque maintenant que la durée de la révolution synodique du troisième satellite est de $7^{j}\ 3^{h}\ 59'\ 35''\ 55'''\ 23^{IV}$, selon M. Wargentin ; ce qui donne, pour 61 révolutions, $437^{j}\ 3^{h}\ 35'\ 31''\ 18'''$, & pour 111021 révolutions $795619^{j}\ 13^{h}\ 29'\ 1''\ 55'''$; or nous avons déja trouvé que 449538 révolutions du premier font $795619^{j}\ 13^{h}\ 28'\ 8''\ 26'''$, & que 223860 révolutions du second font $795619^{j}\ 13^{h}\ 32'\ 19''\ 40'''$ (art. LIX) ; donc les mouvemens des trois premiers satellites au Soleil sont entr'eux comme les nombres 449538, 223860, 111021, & les différences entre les mouvemens des deux premiers & les mouvemens du second & du troisième sont au mouvement du second comme les nombres 225678, 112839 au nombre 223860 ; donc pendant que le second acheve une révolution au Soleil, les angles $u^{I} - u^{II}$, & $u^{III} - u^{II}$ croissent de $\frac{225678}{223860}$ 360°, & $-\frac{112839}{223860}$ 360° ; donc l'angle $2(u^{III} - u^{II})$ diminue à chaque révolution du second de la même quantité dont l'angle $u^{I} - u^{II}$ augmente, savoir de $\frac{225678}{223860}$ 360° ; donc la quantité $u^{I} - u^{II} + 2(u^{III} - u^{II})$ est toujours la même dans les conjonctions du second satellite.

Examinons donc une conjonction quelconque de ce

satellite, & voyons quelles sont les élongations du premier & du troisième, c'est-à-dire, les valeurs de $u^{I} - u^{II}$, & de $u^{III} - u^{II}$; je prends pour exemple la première conjonction de l'année 1760, laquelle est marquée dans les tables à $2^{j.}\ 13^{h.}\ 42'\ 50''$, à quoi ajoutant la moitié des plus grandes équations, savoir, $1^{h.}\ 35'\ 6''$, (art. LVIII) on a $2^{j.}\ 15^{h.}\ 17'\ 56''$ pour le tems moyen de la conjonction moyenne du second satellite; je trouve de la même manière, que les premières conjonctions moyennes du premier & du troisième satellite ont dû arriver à $1^{j.}\ 10^{h.}\ 48'\ 48''$, & à $3^{j.}\ 5^{h.}\ 54'\ 56''$ de tems moyen; d'où je conclus qu'au tems de la conjonction du second satellite, le premier étoit plus avancé de $1^{j.}\ 4^{h.}\ 29'$, ce qui fait $241°\ 24'$, & que le troisième étoit en arrière de $14^{h.}\ 37'$, ce qui vaut $30°\ 27'$; donc $u^{I} - u^{II} = 241°\ 24'$, & $u^{III} - u^{II} = -\ 30°\ 27'$; par conséquent $u^{I} - u^{II} + 2\,(u^{III} - u^{II}) = 180°\ 30' = 180°$ à très-peu-près.

On aura donc en général $2\,(u^{III} - u^{II}) = 180° - (u^{I} - u^{II})$ & $\sin 2\,(u^{III} - u^{II}) = \sin (u^{I} - u^{II})$; ainsi les deux termes $\frac{\mathbb{C}^{I}}{\mathbb{T}}\ 91810'\ \sin.\,(u^{I} - u^{II}) + \frac{\mathbb{C}^{III}}{\mathbb{T}}\ 148383'\ \sin.\ 2\,(u^{III} - u^{II})$ peuvent se réduire à un terme unique, tel que $\left(\frac{\mathbb{C}^{I}}{\mathbb{T}}\ 91810' + \frac{\mathbb{C}^{III}}{\mathbb{T}}\ 148383'\right) \sin.\,(u^{I} - u^{II})$, lequel ne donne qu'une équation dépendante de l'élongation du premier satellite au second.

LXVI.

Soit, dans une conjonction du second satellite, $u^{I} - u^{II} = \theta$, on aura, par ce que nous avons démontré dans l'article précédent, après n révolutions de ce même satellite, $u^{I} - u^{II} = \theta + n\ \frac{225678}{221860}\ 360°$; & par conséquent $\sin.\,(u^{I} - u^{II}) = \sin.\,(\theta + n\ \frac{225678}{221860}\ 360°) = \sin.\,(\theta + n$

$\frac{1818}{223860}$ 360°); d'où l'on voit que cette quantité ne peut redevenir *sin.* θ, à moins que l'on n'ait $n\frac{1818}{223860} = 1$, ce qui donne $n = \frac{223860}{1818} = 123, 135$; c'eſt le nombre des révolutions du ſecond ſatellite qui forment la période de l'équation *sin.* $(u^{I} - u^{II})$, & l'on trouvera que cette période eſt la même que celle de l'équation du premier ſatellite, ſavoir de $437^{j}\ 15^{h}\ 12'\ 7''$ (art. LIX).

Mettons p au lieu du nombre $\frac{223860}{1818}$, nous aurons *sin* $(u^{I} - u^{II}) = sin.\ (\theta + \frac{n}{p}\ 360°)$; donc ſuppoſant au commencement de la période $\theta = 0$, c'eſt-à-dire, les deux premiers ſatellites en conjonction à la fois, & faiſant ſucceſſivement $n = 0$, $n = \frac{p}{4}$, $n = \frac{p}{2}$, $n = \frac{3p}{4}$, & $n = p$ on trouvera que l'équation dont il s'agit eſt nulle au commencement de la période, qu'enſuite elle augmente juſqu'au quart de la période, où elle eſt la plus grande; que de-là elle diminue & redevient nulle à la moitié de la période, après quoi elle ſe change en négative, &c.

LXVII.

Si on compare maintenant la marche de cette équation avec celle de l'équation *C* des tables du ſecond ſatellite, on verra qu'elles s'accordent parfaitement, pourvu que l'on ait attention d'ôter conſtamment de cette dernière équation $16'\ 30''$ moitié de ſa plus grande valeur, & qu'on fixe le commencement de la période au nombre 250. Ainſi les nombres *C* des tables du ſecond ſatellite indiquent les élongations du premier au tems des conjonctions du ſecond, deſorte que le nombre 250 répond aux conjonctions des deux ſatellites, & le nombre 750 à leurs oppoſitions. Voyez là-deſſus la diſſertation de M. Wargentin qui eſt à la tête des Obſervations du ſecond ſatellite, dans les Mémoires de la Société d'Upſal pour l'année 1743.

LXVIII.

Il ne reste donc plus qu'à égaler le coefficient de l'équation $\mathit{sin.}\,(u^{I} - u^{II})$ à la plus grande valeur de l'équation C des tables, ce qui donne $\frac{\mathfrak{C}^{I}}{\mathfrak{T}}\,91810 + \frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}}\,148383 = \frac{33}{2}$; desorte qu'en supposant $\mathfrak{C}^{III} = m\,\mathfrak{C}^{I}$, on aura $\frac{\mathfrak{C}^{I}}{\mathfrak{T}} = \frac{33}{183620 + 296766m}$ & $\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}} = \frac{33m}{183620 + 296766m}$.

Soit par exemple $m = 1$, c'est-à-dire, les masses du premier & du troisiéme satellite égales entr'elles, on aura $\frac{\mathfrak{C}^{I}}{\mathfrak{T}} = \frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}} = \frac{33}{480386} = 0,\ 00006869 = \frac{1}{14500}$ environ; d'où, en supposant les densités des satellites égales à celles de Jupiter, on tire leurs demi diametres $= 0,0409 =$ environ $\frac{1}{25}$ de celui de Jupiter; ce qui donne pour le tems que le premier devroit employer à entrer dans l'ombre $5'\ 51''$, & pour le tems que devroit employer le troisième $9'\ 21''$.

Au reste, quelque soit le nombre m, comme il ne sauroit être ni infini ni nul, il est clair que les quantités $\frac{\mathfrak{C}^{I}}{\mathfrak{T}}$, $\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}}$ sont toujours nécessairement moindres que la fraction $\frac{33}{296766} = 0,\ 000111$, c'est-à-dire, en prenant la masse de la Terre pour l'unité $\left.\begin{matrix}\mathfrak{C}^{I} \\ \mathfrak{C}^{III}\end{matrix}\right\} < 0,0404..$; environ $\frac{1}{25}$,

LXIX.

A l'égard des autres termes de la formule de l'art. LV, il est facile de voir qu'ils ne donnent que des équations extrêmement petites, & qui peuvent par conséquent être négligées; en effet, le terme qui a le plus grand coefficient numérique, après ceux que nous venons d'examiner, est

$\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}} \times -2385'\ sin.\ (u^{III} - u^{II})$; or nous avons trouvé que $\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}} < 0,000111\ldots$, donc la plus grande équation sera $< 15''$.

LXX.

L'équation $u^{I} - u^{II} + 2\ (u^{III} - u^{II}) = 180°\ 30'$, trouvée dans l'article XLV, & d'où nous avons tiré $sin.\ 2\ (u^{III} - u^{II}) = sin.\ (u^{I} - u^{II})$ à très-peu-près, est une suite du rapport que nous avons établi entre les révolutions synodiques des trois premiers satellites ; ce rapport n'est pas exact à la rigueur, mais il ne s'écarte de la vérité que d'une quantité infiniment petite, desorte qu'au bout de mille ans, l'erreur qui en pourra résulter sera encore presque insensible.

En effet, on trouve qu'il faudroit environ 1317900 ans, pour que l'équation dont nous parlons devint $u^{I} - u^{II} + 2\ (u^{III} - u^{II}) = 360°$, pourvu que les moyens mouvemens des satellites fussent assez exacts pour pouvoir être employés dans une si longue suite de siècles. Voyez l'ouvrage de M. Wargentin cité ci-dessus.

LXXI.

La formule de l'article LVI qui renferme les équations du troisième satellite, ne nous présente qu'un terme qui puisse être de quelque considération ; c'est le terme $\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}}\ 99075'\ sin.\ (u^{II} - u^{III})$, dont l'argument est l'élongation du second satellite au troisième au tems des conjonctions de celui-ci.

Avant d'entrer dans le détail de l'inégalité qui en résulte, voyons si elle est assez considérable pour qu'on doive en tenir compte. Pour cela on substituera au lieu de

$\frac{\mathfrak{C}''}{\mathfrak{T}}$ ſa valeur trouvée ci-deſſus (article LXIII) ſavoir $\frac{7}{289600}$, & l'on trouvera $\frac{\mathfrak{C}''}{\mathfrak{T}}$ 99075′ = 2′, 24″, deſorte que l'inégalité dont il s'agit montera à 4′ 48″, à cauſe que l'équation *ſin.* $(u^{II} - u^{III})$ eſt, tantôt additive, tantôt ſouſtractive.

Maintenant on ſait que les mouvemens moyens du ſecond & du troiſième ſatellites ſont entr'eux comme les nombres 233660, 111021 (article LXV) d'où il ſuit que pendant que le troiſième acheve une révolution au ſoleil, la diſtance $u^{II} - u^{III}$ augmente de $\frac{112819}{111021}$ 360°; deſorte que ſi on appelle θ l'élongation du ſecond ſatellite au troiſième au tems d'une conjonction quelconque de ce dernier, on aura après n révolutions $u^{II} - u^{III} = \theta + n \frac{112819}{111021}$ 360°, & de là *ſin.* $(u^{II} - u^{III}) =$ *ſin.* $(\theta + n \frac{112819}{111021}$ 360°) = *ſin.* $(\theta + n \frac{1818}{111021}$ 360°), d'où l'on voit 1°. que la période de cette équation ſera de $\frac{111021}{1818}$ révolutions du troiſième ſatellite, ce qui revient au même que celles du premier & du ſecond ſatellite (article LIX & LXVI); 2.° que ſi on prend pour le commencement de la période une conjonction du troiſième ſatellite dans laquelle θ = 0, c'eſt-à-dire, que le ſecond ſatellite ſoit auſſi en conjonction, on trouvera que la marche de l'équation dont il s'agit ſera entiérement analogue à celle de l'équation du ſecond ſatellite (article LXVI).

LXXII.

L'équation que nous venons d'examiner ne ſe trouve point dans les tables du troiſième ſatellite; M. Wargentin s'eſt contenté de l'indiquer dans la Préface de ſes Tables (Mémoire de la Société d'Upſal, pour l'année 1741), où il dit: *Multæ etiam obſervationes ſatis manifeſtè indicant tertium æquatione aliâ indigere cujus ferè eadem*

eadem est quantitas & natura cum æquatione novâ primi ; sed quoniam observationes non paucas habeam quæ eam vel minorem, vel nullam arguant, hujus æquationis in tabulis nullam habere rationem satiùs judicavi ; & ailleurs (dans la Dissertation qui est à la tête des Observations du second satellite) : *In motibus tertii satellitis deprehenditur inæqualitas quædam quæ indicat eum esse retardatum in conjunctionibus, sed accleratum in oppositionibus secundi ;* & plus bas : *Est etiam hæc inæqualitas tertii similis inæqualitati suprà descriptæ secundi ;* ce qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons trouvé dans l'article précédent. Il est vrai que cette équation a paru à M. Wargentin de la même quantité que celle du premier satellite, au lieu qu'elle n'en est qu'environ les deux tiers, suivant notre théorie ; mais ce savant Astronome avoue lui même qu'il ne regarde pas son résultat comme fort exact, l'ayant trouvé quelquefois moindre, & même nul, & que c'est pour cette raison qu'il a cru devoir s'abstenir d'en faire usage dans ses Tables.

LXXIII.

Avant de quitter la formule de l'article LVI, nous dirons deux mots des termes qui dépendent de $u^{IV} - u^{III}$, élongation du quatrième satellite au troisième, & dont le plus considérable est celui-ci : $\frac{\mathbb{C}^{IV}}{\mathbb{T}}\, 7124'\, sin.2(u^{IV} - u^{III})$.

Supposons d'abord que l'équation qui en provient soit, lorsqu'elle est la plus grande, de m minutes ; on aura $\frac{\mathbb{C}^{IV}}{\mathbb{T}}\, 7124 = m$; donc $\frac{\mathbb{C}^{IV}}{\mathbb{T}} = \frac{m}{7124} = 0,000140\, m$;

d'où l'on voit que pour que m soit au moins $= 1$, il faut que la masse du quatrième satellite surpasse de beaucoup celles des trois premiers.

Si on veut que la densité de ce satellite soit la même que

celle de Jupiter, on trouvera ſon diamettre $= 0{,}0519\sqrt[3]{m}$ de celui de Jupiter ; & par conſéquent le tems qu'il doit employer à entrer dans l'ombre $= 15'\ 46''\ \sqrt[3]{m}$; ce qui, en faiſant $m = 1$, eſt aſſez conforme au réſultat des obſervations de M. Maraldi.

Cette équation, au reſte, ſuppoſé qu'elle montât à quelques minutes, ce qui ne ſeroit nullement impoſſible, mériteroit d'autant plus l'attention des Aſtronomes, qu'elle varie beaucoup d'une conjonction à l'autre ; en effet, les révolutions ſynodiques du troiſième & du quatrième ſatellite étant de $619176''$, & $1447507''$, on trouve que l'angle $u^{IV} - u^{III}$ doit augmenter pendant une révolution du troiſième de $\left(\frac{619176}{1447507} - 1\right) 360°$, c'eſt-à-dire, diminuer de $\frac{828331}{1447507}\ 360°$; donc, nommant θ l'angle $u^{IV} - u^{III}$ dans le tems d'une conjonction quelconque de ce ſatellite, on aura après n révolutions, $u^{IV} - u^{III} = \theta - n\,\frac{828331}{1447507}\ 360°$, & $2\,(u^{IV} - u^{III}) = 2\,\theta - n\,\frac{1656662}{1447507}\ 360°$, d'où $\sin.\ 2\,(u^{IV} - u^{III}) = \sin.\,(2\,\theta - n\,\frac{209155}{1447507}\ 360°)$; par conſéquent la période de cette équation ne ſera que de $\frac{1447507}{209155}$ révolutions, c'eſt-à-dire, de 6, 920 révolutions, ce qui fait $49^{j}\ 14^{h}$, 12′ à-peu-près. Ne ſeroit-ce point là la ſource de ces inégalités qu'on obſerve dans les conjonctions du troiſième ſatellite, & qui ſont des ſauts conſidérables d'une conjonction à l'autre ? c'eſt une vue que nous propoſons aux Aſtronomes qui s'occupent de la théorie des ſatellites.

LXXIV.

Il ne reſteroit plus qu'à examiner les équations des conjonctions du quatrième ſatellite, contenues dans la formule de l'article LVIII : mais ayant déja trouvé $\mathfrak{C}^{I} = 0,00002417\ \mathfrak{F}$, & $\left\{\frac{\mathfrak{C}^{I}}{\mathfrak{C}^{III}}\right\} < 0,000111\ \mathfrak{F}$ (articles

LXIII & LXVIII), on verra aiſément que les coefficiens de ces équations ne s'étendent point au-delà d'un petit nombre de ſecondes; ce qui eſt trop peu de choſe pour qu'on doive en tenir compte dans le mouvement de ce ſatellite, ſur-tout vu l'imperfection qui regne encore dans les tables de Jupiter.

CHAPITRE IV.

Suite du calcul des perturbations des Satellites de Jupiter.

LXXV.

AYANT trouvé les premieres valeurs de x, y, z (article XXXVI & ſuivans), on reprendra les équations de l'article XXXII; & après y avoir mis au lieu de X, Y, Z leurs expreſſions (article XXX & ſuivans), ſans négliger les termes de l'ordre de n, on ſubſtituera dans tous les termes de cet ordre les valeurs trouvées de x, y, z, & l'on aura de nouvelles équations en x, y, z plus exactes que celles de l'article XXXV, & qui s'intégreront encore par la même méthode.

LXXVI.

Soit pour le premier ſatellite, (ces formules s'appliqueront également aux trois autres, ſuivant les remarques des articles IX & XIII).

$$\Sigma^{I} = g^{I} - 2\mu^{I} H^{I} - \frac{\chi^{II}}{1+n\chi^{I}} \breve{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) - \frac{\chi^{III}}{1+n\chi^{I}} \breve{\Gamma}(a^{I}, a^{III})$$
$$- \frac{\chi^{IV}}{1+n\chi^{I}} \breve{\Gamma}(a^{I}, a^{IV}) - \tfrac{1}{2} \frac{K^{I}}{1+n\chi^{I}} + \tfrac{1}{5} \frac{x^{I}}{1+n\chi^{I}};$$

$$M^{I_2} = 3\mu^{I_2} - 2f^I - nf^I\left(\chi^{II}\breve{\Pi}(a^I, a^{II}) + \chi^{III}\breve{\Pi}(a^I, a^{III})\right.$$
$$\left. + \chi^{IV}\breve{\Pi}(a^I, a^{IV}) + \tfrac{1}{2}K^I + \tfrac{4}{5}x^I\right);$$

$$N^{I_2} = \mu^{I_2} + nf^I\left(\chi^{II}\tilde{\Gamma}(a^I, a^{II}) + \chi^{III}\tilde{\Gamma}(a^I, a^{III})\right.$$
$$\left. + \chi^{IV}(a^I, a^{IV}) + \tfrac{3}{2}K^I + \tfrac{3}{5}x^I\right) 2m\mu^I f^I H^I.$$

Suppoſons de plus

$$\mathfrak{b}^I = -\frac{\chi^{II}}{1+n\chi^I}\left(\Xi 1\,(a^I, a^{II})\,cof.\,(\mu^{II} - \mu^I)\,t\right.$$
$$\left. + \Xi 2\,(a^I, a^{II})\,cof.\,2\,(\mu^{II} - \mu^I)\,t + \&c.\right)$$
$$-\frac{\chi^{III}}{1+n\chi^I}\left(\Xi 1\,(a^I, a^{III})\,cof.\,(\mu^{III} - \mu^I)\,t\right.$$
$$\left. + \Xi 2\,(a^I, a^{III})\,cof.\,2\,(\mu^{III} - \mu^I)\,t + \&c.\right)$$
$$-\frac{\chi^{IV}}{1+n\chi^I}\left(\Xi 1\,(a^I, a^{IV})\,cof.\,(\mu^{IV} - \mu^I)\,t\right.$$
$$\left. + \Xi 2\,(a^I, a^{IV})\,cof.\,2\,(\mu^{IV} - \mu^I)\,t + \&c.\right)$$
$$-\frac{K^I}{1+n\chi^I}\left(\beta^I\,cof.\,2\,(m - \mu^I)\,t, \text{ (art. XXXVI)}\right);$$

$$\mathfrak{g}^I = \frac{\chi^{II}}{1+n\chi^I}\left(\Phi 1\,(a^I, a^{II})\,\mathit{fin.}\,(\mu^{II} - \mu^I)\,t\right.$$
$$\left. + \Phi 2\,(a^I, a^{II})\,\mathit{fin.}\,2\,(\mu^{II} - \mu^I)\,t + \&c.\right)$$
$$+\frac{\chi^{III}}{1+n\chi^I}\left(\Phi 1\,(a^I, a^{III})\,\mathit{fin.}\,(\mu^{III} - \mu^I)\,t\right.$$
$$\left. + \Phi 2\,(a^I, a^{III})\,\mathit{fin.}\,2\,(\mu^{III} - \mu^I)\,t + \&c.\right)$$
$$+\frac{\chi^{IV}}{1+n\chi^I}\left(\Phi 1\,(a^I, a^{IV})\,\mathit{fin.}\,(\mu^{IV} - \mu^I)\,t\right.$$
$$\left. + \Phi 2\,(a^I, a^{IV})\,\mathit{fin.}\,2\,(\mu^{IV} - \mu^I)\,t + \&c.\right)$$
$$+\frac{K^I}{1+n\chi^I}\,\gamma^I\,\mathit{fin.}\,2\,(m - \mu^I)\,t, \text{ (art. XXXVIII), \&}$$

faiſons $x^I = \mathfrak{b}^I + x'^I$, $y^I = \mathfrak{g}^I + y'^I$, (nous verrons bientôt la raiſon de ces ſubſtitutions). Les équations de l'article XXXII ſe changeront en celles-ci, dans leſquelles nous avons négligé les termes affectés de n^2.

$\frac{d^2x^I}{dt^2} + M^{I2}x^I + f^I L^I - n(6\mu^{I2} - 3f^I{}_I x^{I2} - \frac{3}{2}nf^I z^{I2} - nf^{I2}Y^{I2}$

$- n\chi^{II} f^I x^I \left(\breve{\Pi}^1(a^I, a^{II}) + \frac{2\mu^I}{\mu^{II}-\mu^I}\hat{\Gamma}^1(a^I, a^{II})\right) cos.(\mu^{II} - \mu^I)t$

$- n\chi^{II} f^I x^I \left(\breve{\Pi}^2(a^I, a^{II}) + \frac{2\mu^I}{2(\mu^{II}-\mu^I)}\breve{\Gamma}^2(a^I, a^{II})\right) cos.2(\mu^{II} - \mu^I)t$

&c.

$- n\chi^{III} f^I x^I \left(\breve{\Pi}^1(a^I, a^{III}) + \frac{2\mu^I}{\mu^{III}-\mu^I}\hat{\Gamma}^1(a^I, a^{III})\right) cos.(\mu^{III} - \mu^I)t$

$- n\chi^{III} f^I x^I \left(\breve{\Pi}^2(a^I, a^{III}) + \frac{2\mu^I}{2(\mu^{III}-\mu^I)}\hat{\Gamma}^2(a^I, a^{III})\right) cos.2(\mu^{III} - \mu^I)t$

$- n\chi^{IV} f^I x^I \left(\breve{\Pi}^1(a^I, a^{IV}) + \frac{2\mu^I}{\mu^{IV}-\mu^I}\hat{\Gamma}^1(a^I, a^{IV})\right) cos.(\mu^{IV} - \mu^I)t$

$- n\chi^{IV} f^I x^I \left(\breve{\Pi}^2(a^I, a^{IV}) + \frac{2\mu^I}{2(\mu^{IV}-\mu^I)}\hat{\Gamma}^2(a^I, a^{IV})\right) cos.2(\mu^{IV} - \mu^I)t$

&c.

$- nK^I f^I x^I \left(\frac{1}{2} - \frac{3\mu^I}{2(m-\mu^I)}\right) cos.2(m - \mu^I)t$

$- n\chi^{II} f^I x^{II} \left(\breve{\Psi}(a^I, a^{II}) + \breve{\Psi}^1(a^I, a^{II}) cos.(\mu^{II} - \mu^I)t\right.$
$\left. + \breve{\Psi}^2(a^I, a^{II}) cos.2(\mu^{II} - \mu^I)t \text{ &c.}\right)$

$- n\chi^{III} f^I x^{III} \left(\breve{\Psi}(a^I, a^{III}) + \breve{\Psi}^1(a^I, a^{III}) cos.(\mu^{III} - \mu^I)t\right.$
$\left. + \breve{\Psi}^2(a^I, a^{III}) cos.2(\mu^{III} - \mu^I)t \text{ &c.}\right)$

$- n\chi^{IV} f^I x^{IV} \left(\breve{\Psi}(a^I, a^{IV}) + \breve{\Psi}^1(a^I, a^{IV}) cos.(\mu^{IV} - \mu^I)t\right.$
$\left. + \breve{\Psi}^2(a^I, a^{IV}) cos.2(\mu^{IV} - \mu^I)t \text{ &c.}\right)$

$+ nK^I f^I \xi \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{2} cos.2(m - \mu^I)t\right)$

$+ n\chi^{II} f^I (y^{II} - y^I) \left(\breve{\Gamma}^1(a^I, a^{II}) sin.(\mu^{II} - \mu^I)t\right.$
$\left. + 2\breve{\Gamma}^2(a^I, a^{II}) sin.2(\mu^{II} - \mu^I)t \text{ &c.}\right)$

$+ n\chi^{III} f^I (y^{III} - y^I) \left(\breve{\Gamma}^1(a^I, a^{III}) sin.(\mu^{III} - \mu^I)t\right.$
$\left. + 2\breve{\Gamma}^2(a^I, a^{III}) sin.2(\mu^{III} - \mu^I)t \text{ &c.}\right)$

$+ n\chi^{IV} f^I (y^{IV} - y^I) \left(\breve{\Gamma}^1(a^I, a^{IV}) sin.(\mu^{IV} - \mu^I)t\right.$
$\left. + 2\breve{\Gamma}^2(a^I, a^{IV}) sin.2(\mu^{IV} - \mu^I)t \text{ &c.}\right)$

$+ nK^I f^I (v - y^I) \times 3 sin.2(m - \mu^I)t$

$$+ 2n\chi^{II} f^{I} \mu^{I} \int x^{I} \left(\tilde{\Pi}^{1} (a^{I}, a^{II}) \sin.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \tilde{\Pi}^{2} (a^{I}, a^{II}) \sin.2(\mu^{II} - \mu^{I})\, t \;\&c.\right) dt$$
$$+ 2n\chi^{III} f^{I} \mu^{I} \int x^{I} \tilde{\Pi}^{1} (a^{I}, a^{III}) \sin.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t$$
$$\left. + \tilde{\Pi}^{2} (a^{I}, a^{III}) \sin.2(\mu^{III} - \mu^{I})\, t \;\&c.\right) dt$$
$$+ 2n\chi^{IV} f^{I} \mu^{I} \int x^{I} \left(\tilde{\Pi}^{1} (a^{I}, a^{IV}) \sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \tilde{\Pi}^{2} (a^{I}, a^{IV}) \sin.2(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t \;\&c.\right) dt$$
$$- 2nK^{I} f^{I} \mu^{I} \int x^{I} \times 3 \sin.2(m - \mu^{I})\, t\, dt$$
$$+ 2n\chi^{II} f^{I} \mu^{I} \int x^{II} \left(\hat{\Psi}^{1} (a^{I}, a^{II}) \sin.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \hat{\Psi}^{2} (a^{I}, a^{II}) \sin.2(\mu^{II} - \mu^{I})\, t \;\&c.\right) dt$$
$$+ 2n\chi^{III} f^{I} \mu^{I} \int x^{III} \left(\hat{\Psi}^{1} (a^{I}, a^{III}) \sin.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \hat{\Psi}^{2} (a^{I}, a^{III}) \sin.2(\mu^{III} - \mu^{I})\, t \;\&c.\right) dt$$
$$+ 2n\chi^{IV} f^{I} \mu^{I} \int x^{IV} \left(\hat{\Psi}^{1} (a^{I}, a^{IV}) \sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + \hat{\Psi}^{2} (a^{I}, a^{IV}) \sin.2(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t \;\&c.\right) dt$$
$$+ 2n K^{I} f^{I} \mu^{I} \int \xi \times \tfrac{9}{2} \sin.2(m - \mu^{I})\, t\, dt$$
$$+ 2n\chi^{II} f^{I} \mu^{I} \int (y^{II} - y^{I}) \left(\hat{\Gamma}^{1} (a^{I}, a^{II}) \cos.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + 2\hat{\Gamma}^{2} (a^{I}, a^{II}) \cos.2(\mu^{II} - \mu^{I})\, t \;\&c.\right) dt$$
$$+ 2n\chi^{III} f^{I} \mu^{I} \int (y^{III} - y^{I}) \left(\hat{\Gamma}^{1} (a^{I}, a^{III}) \cos.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + 2\hat{\Gamma}^{2} (a^{I}, a^{III}) \cos.2(\mu^{III} - \mu^{I})\, t \;\&c.\right) dt$$
$$+ 2n\chi^{IV} f^{I} \mu^{I} \int (y^{IV} - y^{I}) \left(\hat{\Gamma}^{1} (a^{I}, a^{IV}) \cos.2(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t \right.$$
$$\left. + 2\hat{\Gamma}^{2} (a^{I}, a^{IV}) \cos.2(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t \;\&c.\right) dt$$
$$- 2n K^{I} f^{I} \mu^{I} \int (J - y^{I}) \times 3 \cos.2(m - \mu^{I})\, t\, dt = 0 \ldots\ldots\ldots (G)$$

$$\frac{dy^{I}}{dt} + 2\mu^{I} x^{\cdot I} - f^{I} H^{I} - 3n\mu x^{I2}$$

$$+ 2n\chi^{II} f^{I} x^{I} \left(\frac{\hat{\Gamma}^{1}(a^{I}, a^{II})}{\mu^{II} - \mu^{I}} \cos.(\mu^{II} - \mu^{I})t + \frac{\hat{\Gamma}^{2}(a^{I}, a^{II})}{2(\mu^{II} - \mu^{I})} \cos.2(\mu^{II} - \mu^{I})t \;\&c.\right)$$
$$+ 2n\chi^{III} f^{I} x^{I} \left(\frac{\hat{\Gamma}^{1}(a^{I} a^{III})}{\mu^{III} - \mu^{I}} \cos.(\mu^{III} - \mu^{I})t + \frac{\hat{\Gamma}^{2}(a^{I}, a^{III})}{2(\mu^{III} - \mu^{I})} \cos.2(\mu^{III} - \mu^{I})t \;\&c.\right)$$
$$+ 2n\chi^{IV} f^{I} x^{I} \left(\frac{\hat{\Gamma}^{1}(a^{I}, a^{IV})}{\mu^{IV} - \mu^{I}} \cos.(\mu^{IV} - \mu^{I})t + \frac{\hat{\Gamma}^{2}(a^{I}, a^{IV})}{2(\mu^{IV} - \mu^{I})} \cos.2(\mu^{IV} - \mu^{I})t \;\&c.\right)$$

$$- 2n K^{I} f^{I} x^{I} \times \frac{3}{4(m-\mu^{I})} \cos.2(m-\mu^{I})t$$

$$+ n\chi^{II} f^{I} \int x^{I} \left(\tilde{\Pi}^{1}(a^{I}, a^{II}) \sin.(\mu^{II}-\mu^{I})t \right.$$
$$\left. + \tilde{\Pi}^{2}(a^{I}, a^{II}) \sin.2(\mu^{II}-\mu^{I})t \text{ \&c.} \right) dt$$

$$+ n\chi^{III} f^{I} \int x^{I} \left(\tilde{\Pi}^{1}(a^{I}, a^{III}) \sin.(\mu^{III}-\mu^{I})t \right.$$
$$\left. + \tilde{\Pi}^{2}(a^{I}, a^{III}) \sin.2(\mu^{III}-\mu^{I})t \text{ \&c.} \right) dt$$

$$+ n\chi^{IV} f^{I} \int x^{I} \left(\tilde{\Pi}^{1}(a^{I}, a^{IV}) \sin.(\mu^{IV}-\mu^{I})t \right.$$
$$\left. + \tilde{\Pi}^{2}(a^{I}, a^{IV}) \sin.2(\mu^{IV}-\mu^{I})t \text{ \&c.} \right) dt$$

$$+ nK^{I} f^{I} \int x^{I} \times 3 \sin.2(m-\mu^{I})t\, dt$$

$$+ n\chi^{II} f^{I} \int x^{II} \left(\hat{\Psi}^{1}(a^{I}, a^{II}) \sin.(\mu^{II}-\mu^{I})t \right.$$
$$\left. + \hat{\Psi}^{2}(a^{I}, a^{II}) \sin.2(\mu^{II}-\mu^{I})t \text{ \&c.} \right) dt$$

$$+ n\chi^{III} f^{I} \int x^{III} \left(\hat{\Psi}^{1}(a^{I}, a^{III}) \sin.(\mu^{III}-\mu^{I})t \right.$$
$$\left. + \hat{\Psi}^{2}(a^{I}, a^{III}) \sin.2(\mu^{III}-\mu^{I})t \text{ \&c.} \right) dt$$

$$+ n\chi^{IV} f^{I} \int x^{IV} \left(\hat{\Psi}^{1}(a^{I}, a^{IV}) \sin.(\mu^{IV}-\mu^{I})t \right.$$
$$\left. + \hat{\Psi}^{2}(a^{I}, a^{IV}) \sin.2(\mu^{IV}-\mu^{I})t \text{ \&c.} \right) dt$$

$$+ nK^{I} f^{I} \int \xi \times \tfrac{9}{2} \sin.2(m-\mu^{I})t\, dt$$

$$+ n\chi^{II} f^{I} \int (y^{II}-y^{I}) \left(\hat{\Gamma}^{1}(a^{I}, a^{II}) \cos.(\mu^{II}-\mu^{I})t \right.$$
$$\left. + 2\hat{\Gamma}^{2}(a^{I}, a^{II}) \cos.2(\mu^{II}-\mu^{I})t \text{ \&c.} \right) dt$$

$$+ n\chi^{III} f^{I} \int (y^{III}-y^{I}) \left(\hat{\Gamma}^{1}(a^{I}, a^{III}) \cos.(\mu^{III}-\mu^{I})t \right.$$
$$\left. + 2\hat{\Gamma}^{2}(a^{I}, a^{III}) \cos.2(\mu^{III}-\mu^{I})t \text{ \&c.} \right) dt$$

$$+ n\chi^{IV} f^{I} \int (y^{IV}-y^{I}) \left(\hat{\Gamma}^{1}(a^{I}, a^{IV}) \cos.(\mu^{IV}-\mu^{I})t \right.$$
$$\left. + 2\hat{\Gamma}^{2}(a^{I}, a^{IV}) \cos.2(\mu^{IV}-\mu^{I})t \text{ \&c.} \right) dt$$

$$- K^{I} f^{I} \int (J-y^{I}) \times 3 \cos.2(m-\mu^{I})t = 0 \ldots\ldots (H)$$

$$\frac{d^{2}\zeta^{I}}{dt^{2}} + N^{I2} - 4n\mu^{I2} z^{I} x^{I} + 2n \frac{dx^{I}\, d\zeta^{I}}{dt^{2}}$$

$$+ n\chi^{II} f^{I} z^{I} \left(\tilde{\Gamma}^{1}(a^{I}, a^{II}) + \frac{2\mu^{I}}{\mu^{II}-\mu^{I}} \hat{\Gamma}^{1}(a^{I}, a^{II}) \right) \cos.(\mu^{II}-\mu^{I})t$$

$$+ n\chi^{II} f^{I} z^{I} \left(\tilde{\Gamma}^{2}(a^{I}, a^{II}) + \frac{2\mu^{I}}{2(\mu^{II}-\mu^{I})} \hat{\Gamma}^{2}(a^{I}, a^{II}) \right) 2\cos.(\mu^{II}-\mu^{I})t \text{ \&c.}$$

$$+n\chi^{III}f^{I}z^{I}\left(\tilde{\Gamma}^{1}(a^{I},a^{III})+\frac{2\mu^{I}}{\mu^{III}-\mu^{I}}\hat{\Gamma}^{1}(a^{I},a^{III})\right)cof.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t$$

$$+n\chi^{III}f^{I}z^{I}\left(\tilde{\Gamma}^{2}(a^{I},a^{III})+\frac{2\mu^{I}}{2(\mu^{III}-\mu^{I})}\hat{\Gamma}^{2}(a^{I},a^{III})\right)cof.2(\mu^{III}-\mu^{I})t\ \&c.$$

$$+n\chi^{IV}f^{I}z^{I}\left(\tilde{\Gamma}^{1}(a^{I},a^{IV})+\frac{2\mu^{I}}{\mu^{IV}-\mu^{I}}\hat{\Gamma}^{1}(a^{I},a^{IV})\right)cof.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t$$

$$+n\chi^{IV}f^{I}z^{I}\left(\tilde{\Gamma}^{2}(a^{I},a^{IV})+\frac{2\mu^{I}}{2(\mu^{IV}-\mu^{I})}\hat{\Gamma}^{2}(a^{I},a^{IV})\right)cof.2(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t\ \&c.$$

$$+nK^{I}f^{I}z^{I}\left(\frac{3}{2}-\frac{3\mu^{I}}{2(m-\mu^{I})}\right)cof.2\,(m-\mu^{I})\,t$$

$$-n\chi^{II}f^{I}z^{II}\left(\overset{0}{\Gamma}(a^{I},a^{II})+\overset{0}{\Gamma}{}^{1}(a^{I},a^{II})cof.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t\right.$$
$$\left.+\overset{0}{\Gamma}{}^{2}(a^{I},a^{II})\,cof.2(\mu^{II}-\mu^{I})\,t\ \&c.\right);$$

$$-n\chi^{III}f^{I}z^{III}\left(\overset{0}{\Gamma}(a^{I},a^{III})+\overset{0}{\Gamma}{}^{1}(a^{I},a^{III})\,cof.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t\right.$$
$$\left.+\overset{0}{\Gamma}{}^{2}(a^{I},a^{III})\,cof.2(\mu^{III}-\mu^{I})\,t\ \&c.\right)$$

$$-n\chi^{IV}f^{I}z^{IV}\left(\overset{0}{\Gamma}(a^{I},a^{IV})+\overset{0}{\Gamma}{}^{1}(a^{I},a^{IV})cof.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t\right.$$
$$\left.+\overset{0}{\Gamma}{}^{2}(a^{I},a^{IV})\,cof.2\,(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t\ \&c.\right)=0\ldots\ldots(K)$$

LXXVII.

Si on rejette dans les équations (G) & (H) tous les termes affectés de n, comme auſſi tous les termes conſtans qui doivent être nuls par les conditions de l'article XXXII, on a $\frac{d^2x}{dt^2}+M^{I2}x^{I}=0$, & $\frac{dy^{I}}{dt}+2\mu^{I}x^{I}=0$,

D'ou l'on tire :

$$x^{I}=\varepsilon^{I}cof.(M^{I}t+\omega^{I}),\ \&\ y^{I}=-\frac{2\mu^{I}}{M^{I}}\varepsilon^{I}\,ſin.\,(M^{I}t+\omega^{I})$$

ce qui donne pour x^{I} & y^{I} les mêmes valeurs que nous avons déja trouvées (art. LXXV).

La quantité $-\frac{2\mu^{I}}{M^{I}}\varepsilon^{I}\,ſin.\,(M^{I}t+\omega^{I})$ n'eſt que le premier terme de l'équation du centre calculée dans une ellipſe mobile (art. XXXVIII) ; ſi on vouloit avoir le terme ſuivant

suivant, c'est-à-dire celui qui contient le quarré de l'excentricité, il n'y auroit qu'à mettre au lieu de x^I dans les termes $-n(6\mu^{I2}-3f^I)x^{I2}$, & $-3n\mu^I x^{I2}$ des équations (G), (H), la valeur de x''^I qu'on vient de trouver.

On auroit donc, en négligeant toujours les termes constans;

$$\frac{d^2x''^I}{dt^2}+M^{I2}x''^I-n(6\mu^{I2}-3f^I)\frac{\varepsilon^{I2}}{2}\cos.2(M^It+\omega^I)=0, \&$$

$$\frac{dy''^I}{dt}+2\mu^I x''^I-3n\mu^I\frac{\varepsilon^{I2}}{2}\cos.2(M^It+\omega^I)=0.$$

La première de ces équations donne, (art. XXXIV)

$$x''^I=\varepsilon^I\cos.(M^It+\omega^I)-n(6\mu^{I2}-3f^I)\frac{\varepsilon^{I2}}{2}\times\frac{\cos.2(M^It+\omega^I)}{3M^{I2}},$$

c'est-à-dire, en mettant au lieu de f^I, & de M^{I2} leurs valeurs approchées μ^{I2} (art. XLV)

$$x''^I=\varepsilon^I\cos.(M^It+\omega^I)-n\frac{\varepsilon^{I2}}{2}\cos.2(M^It+\omega^I).$$

Donc substituant cette valeur de x''^I dans la seconde, & l'intégrant ensuite, on aura

$$y''^I=-\frac{2\mu^I}{M^I}\varepsilon^I\sin.(M^It+\omega^I)+n\frac{5\mu^I}{4M^I}\varepsilon^{I2}\sin.2(M^It+\omega^I).$$

Ce qui s'accorde avec ce que l'on fait d'ailleurs; mais nous verrons plus bas qu'il y a dans l'équation (G) d'autres termes qui influent considérablement sur l'équation du centre, & qui empêchent qu'on ne puisse regarder l'expression précédente comme assez exacte, même dans le cas où l'on néglige les quantités de l'ordre n.

Il en faut dire autant de l'expression de la latitude que nous avons déja tronvée (art. XL); mais avant que d'entrer dans cette discussion, il est bon de voir ce que donnent les nouvelles valeurs de M & de N (art. préc.) pour le mouvement des apsides & des nœuds.

§. I.

Premières valeurs du mouvement des apſides & des nœuds des Satellites.

LXXVIII.

Nous avons trouvé (art. LXXVI)
$M^{I_2} = 3\mu^{I_2} - 2f^I - nf^I\left(\chi^{II}\breve{\Pi}(a^I, a^{II}) + \chi^{III}\breve{\Pi}(a^I, a^{III}) + \chi^{IV}\breve{\Pi}(a^I, a^{IV}) + \frac{1}{2}K^I + \frac{4}{5}x^I\right)$; or l'on a généralement (art. XXIX) $1 - \frac{\mu^2}{f} = ng$, d'où $f = \frac{\mu^2}{1-ng} = \mu^{I_2}(1+ng^I)$, & par conſéquent $f^I\mu^{I_2}(1+ng^I)$; donc négligeant les termes affectés de n, on aura :
$M^{I_2} = \mu^{I_2}\left(1 - 2ng^I - n\chi^{II}\breve{\Pi}(a^I, a^{II}) - n\chi^{III}\breve{\Pi}(a^I, a^{III}) - n\chi^{IV}\breve{\Pi}(a^I, a^{IV}) - \frac{1}{2}K^I - \frac{4}{5}nx^I\right)$.

Maintenant on a par l'équation $L^I = g^I$ — &c. de l'article LXXV,
$g^I = L^I + 2\mu^I H^I + \frac{1}{1+n\chi^I}\left(\chi^{II}\breve{\Gamma}(a^I, a^{II}) + \chi^{III}\left(\breve{\Gamma}(a^I, a^{III}) + \chi^{IV}(a^I, a^{IV}) + \frac{1}{2}K^I - \frac{1}{5}x^I\right)\right.$; donc
$M^{I_2} = \mu^{I_2}\left(1 - n\chi^{II}\left(\breve{\Pi}(a^I, a^{II}) + 2\breve{\Gamma}(a^I, a^{II})\right)\right.$
$- n\chi^{III}\left(\breve{\Pi}(a^I, a^{III}) + 2\breve{\Gamma}(a^I, a^{III})\right) - n\chi^{IV}\left(\breve{\Pi}(a^I, a^{IV})\right.$
$\left.\left. + 2\breve{\Gamma}(a^I, a^{IV})\right) - \frac{3}{2}nK^I - \frac{2}{5}nx^I - 2nL^I - 4n\mu^I H^I\right)$,
les quantités L^I, H^I devant être déterminées par la condition que les équations (G), (H) ne renferment aucun terme conſtant.

Pour remplir ces deux conditions, on ſuppoſera que (x^{I_2}), ſoit la quantité conſtante qui entre dans la valeur de x^{I_2}; (car la valeur de x étant compoſée de *ſinus* & de *coſinus*, il eſt eſt évident que que le quarré x^{I_2} contiendra

néceſſairement des termes conſtans, quoique x^{I} n'en contienne point); de même ſoient (z^{I_2}), (Y^{I_2}) les quantités conſtantes qui entreront dans les valeurs de z^{I_2}, Y^{I_2}; on aura donc

$$f^{I}L - n(6\mu^{I_2} - 3f^{I})(x^{I_2}) - \tfrac{3}{2}nf^{I}(z^{I_2}) - nf^{I_2}(Y^{I_2}) = 0,$$
$$\& - f^{I}H^{I} - 3n\mu^{I}(x^{I_2}) = 0:$$

d'où l'on tirera L^{I}, & H^{I}, qui ſeront de l'ordre de n; c'eſt pourquoi on peut négliger dans la valeur de M^{I_2} les quantités $2nL^{I}$, & $4n\mu^{I}H^{I}$, qui ſeroient de l'ordre n^2.

LXXIX.

Donc, ſi on fait pour abréger

$$\mathcal{C}^{I} = \chi^{II}(\breve{\Pi}(a^{I}, a^{II}) + 2\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{II})) + \chi^{III}(\breve{\Pi}(a^{I}, a^{III}) + 2\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{III})) + \chi^{IV}(\breve{\Pi}(a^{I}, a^{IV}) + 2\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{IV})) + \tfrac{3}{2}K^{I} + \tfrac{2}{5}x^{I},$$

& de même (art. IX).

$$\mathcal{C}^{II} = \chi^{I}(\breve{\Pi}(a^{II}, a^{I}) + 2\breve{\Gamma}(a^{II}, a^{I})) + \chi^{III}(\breve{\Pi}(a^{II}, a^{III}) + 2\breve{\Gamma}(a^{II}, a^{III})) + \chi^{IV}(\breve{\Pi}(a^{II}, a^{IV}) + 2\breve{\Gamma}(a^{II}, a^{IV})) + \tfrac{3}{2}K^{II} + \tfrac{2}{5}x^{II}$$

$$\mathcal{C}^{III} = \chi^{I}(\breve{\Pi}(a^{III}, a^{I}) + 2\breve{\Gamma}(a^{III}, a^{I})) + \chi^{IV}(\breve{\Pi}(a^{III}, a^{II}) + 2\breve{\Gamma}(a^{III}, a^{II})) + \chi^{IV}(\breve{\Pi}(a^{III}, a^{IV}) + 2\breve{\Gamma}(a^{III}, a^{IV})) + \tfrac{3}{2}K^{III} + \tfrac{2}{5}x^{III},$$

$$\mathcal{C}^{IV} = \chi^{I}(\breve{\Pi}(a^{III}, a^{I}) + 2\breve{\Gamma}(a^{IV}, a^{I})) + \chi^{II}(\breve{\Pi}(a^{IV}, a^{II}) + 2\breve{\Gamma}(a^{IV}, a^{II})) + \chi^{III}(\breve{\Pi}(a^{IV}, a^{III}) + 2\breve{\Gamma}(a^{IV}, a^{III})) + \tfrac{3}{2}K^{IV} + \tfrac{2}{5}x^{IV}.$$

On aura

$$M^{I_2} = \mu^{I_2}(1 - n\mathcal{C}^{I}),\ M^{I} = \mu^{I}(1 - \tfrac{1}{2}n\mathcal{C}^{I})$$
$$M^{II_2} = \mu^{II_2}(1 - n\mathcal{C}^{II});\ M^{II} = \mu^{II}(1 - \tfrac{1}{2}n\mathcal{C}^{II})$$

& ainſi des autres.

Or le mouvement de la ligne des apſides étant au mouvement moyen comme $\mu - M$ à μ (art. XXXVII), cette

ligne avancera pendant une révolution de $\frac{n\,6}{2}$ 360°, d'où l'on connoîtra le mouvement des apſides de tous les ſatellites.

LXXX.

Pour évaluer en nombres les quantités $\mathfrak{C}$, il faut commencer par chercher les valeurs des quantités $\breve{\Pi}(a^{I}, a^{II})$ &c. leſquelles dépendent des quantités $\Lambda(a^{I}, a^{II})$ &c. c'eſt-à-dire, des coeficiens de la ſerie qui repréſente la quantité radicale $(1 - 2q\theta + q^2)^{-\frac{5}{2}}$, (art. XX & ſuiv.)

Soit donc, comme dans cet article,

$(1 - 2q\,cof.\theta + q^2)^{-\frac{5}{2}} = (A) + (B)cof.\theta + (C)\,cof.2\theta +$ &c.

on aura, en faiſant $q = \frac{a^{I}}{a^{II}}$, & $\theta = \varphi^{II} - \varphi^{I}$,

$(a^{I_2} - 2a^{I}a^{II}\,cof.(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + a^{II_2})^{-\frac{5}{2}} = a^{II-5}\,((A) + (B)\,cof.(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + (C)\,cof.\,2(\varphi^{II} - \varphi^{I}) +$ &c.$)$;

donc (art. XXI),

$\Lambda(a^{I}, a^{II}) = a^{II-5}(A)$, $\Lambda 1(a^{I}, a^{II}) = a^{II-5}(B)$ &c.

De même en faiſant $q = \frac{a^{I}}{a^{III}}$, $= \frac{a^{II}}{a^{III}}$, &c. on aura

$\Lambda(a^{I}, a^{III}) = a^{III-5}(A)$, $\Lambda 1(a^{I}, a^{III}) = a^{III-5}(B)$ &c.

& ainſi de ſuite; où l'on remarquera que les quantités réciproques $\Lambda(a^{II}, a^{I})$, $\Lambda(a^{III}, a^{I})$ &c. ſont les mêmes que les quantités $\Lambda(a^{I}, a^{II})$, $\Lambda(a^{I}, a^{III})$ &c. (art. XLIII);

Cela poſé, on trouvera (art. XXII.) q étant $= \frac{a^{I}}{a^{II}}$

$$\Pi(a^{I}, a^{II}) = \frac{q(B) - 2q^2(A)}{2a^{II}}$$

$$\Pi 1(a^{I}, a^{II}) = \frac{q(C) - 2q^2(B) + 2q(A)}{2a^{II}}$$

$$\Pi 2(a^{I}, a^{II}) = \frac{q(D) - 2q^2(C) + q(B)}{2a^{II}}$$ &c.

& de là, en faiſant pour abréger

$$P = \frac{q(B) - q^2(A)}{2}$$

$$P_1 = \frac{q(C) - 2q^2(B) + 2q(A)}{2}$$

$$P_2 = \frac{q(D) - q^2(C) + q(B)}{2}$$

on aura par l'art. XXIV,

$$\breve{\Pi}(a^{I}, a^{II}) = 3\,\frac{q^2 P_1 - 2q^3 P}{2} - q^3 A$$

$$\breve{\Pi}^{1}(a^{I}, a^{II}) = 3\,\frac{q^2 P_2 - 2q^3 P_1 + 2q^4 P}{2} - q^3 B$$

$$\breve{\Pi}^{2}(a^{I}, a^{II}) = 3\,\frac{q^2 P_3 - 2q^3 P_2 + q^4 P_1}{2} - q^3 C \text{ \&c.}$$

On trouvera des expreſſions ſemblables pour les fonctions $\breve{\Pi}$ de (a^{I}, a^{III}), (a^{II}, a^{III}) &c. en faiſant $q = \frac{a^{I}}{a^{III}}$, $= \frac{a^{II}}{a^{III}}$ &c.

De la même manière on trouvera que l'on a, q étant encore $= \frac{a^{I}}{a^{II}}$,

$$\Pi(a^{II}, a^{I}) = \frac{q(B) - 2(A)}{2a^{II3}}$$

$$\Pi_1(a^{II}, a^{I}) = \frac{q(C) - 2(B) + 2q(A)}{2a^{II2}}$$

$$\Pi_2(a^{II}, a^{I}) = \frac{q(D) - 2(C) + q(B)}{2a^{II3}} \text{ \&c.}$$

d'où l'on tire, en faiſant

$$Q = \frac{q(B) - 2(A)}{2}$$

$$Q_1 = \frac{q(C) - 2(B) + 2q(A)}{2}$$

$$Q_2 = \frac{q(O) - 2(C) + q(B)}{2} \text{ \&c.}$$

$$\breve{\Pi}(a^{II}, a^{I}) = 3\,\frac{qQ_1 - 2Q}{2} - A$$

$$\breve{\Pi}^{1}(a^{II}, a^{I}) = 3\,\frac{qQ_2 - 2Q_1 + 2qQ}{2} - B$$

$\breve{\Pi}^2(a^{II}, a^I) = 3\,\frac{qQ_3 - 2Q_2 + qQ_1}{2} - C$ &c.

expreſſions qui ſerviront auſſi pour les quantités $\breve{\Pi}(a^{III}, a^I)$, $\breve{\Pi}(a^{III}, a^{II})$ &c. en faiſant ſucceſſivement $q = \frac{a^I}{a^{III}}$, $q = \frac{a^{II}}{a^{III}}$ &c.

LXXXI.

Ayant donc fait le calcul de ces différentes quantités, j'ai trouvé les valeurs ſuivantes:

q	$= \frac{a^I}{a^{II}}$	$= \frac{a^I}{a^{III}}$	$= \frac{a^I}{a^{IV}}$	$= \frac{a^{II}}{a^{III}}$	$= \frac{a^{II}}{a^{IV}}$	$= \frac{a^{III}}{a^{IV}}$
(A)	14,494	2,654	1,366	13,856	2.198	8,288
(B)	27.331	4,095	1,399	26,083	3,179	15,144
(C)	23,754	2,544	0,550	22,646	1,850	12,400
(D)	19,323	1,151	0,515	17,547	1,185	9,402
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.
P	2,856	0,395	0,099	2,734	0,287	1,627
P_1	5,767	0.912	0.298	5,539	0,709	3,342
P_2	5,268	0,639	0,186	4,783	0,541	2,972
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.
Q	—5,887	—1,847	—1,199	—5,692	—1,633	—3,985
Q_1	—10,717	—2,547	—1,031	—10,335	—2,068	—6,909
Q_2	—9,059	—1,510	—0,336	—8,993	—1,075	—5,423
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

	(a^{I}, a^{II})	(a^{I}, a^{III})	(a^{I}, a^{IV})	(a^{II}, a^{III})	(a^{II}, a^{IV})	(a^{III}, a^{IV})
$\breve{\Pi}$	0,534	0,050	0,008	0,514	0,036	0,389
	(a^{II}, a^{I})	(a^{III}, a^{I})	(a^{IV}, a^{I})	(a^{III}, a^{II})	(a^{IV}, a^{II})	(a^{IV}, a^{III})
$\breve{\Pi}$	4,564	2,579	2,128	4,401	2,454	3,837

LXXXII.

A l'égard des valeurs de $\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{II})$ &c. nous les avons données ci-deſſus (art. XLVII); auſſi bien que celles nk^{I}, nk^{II} &c. (art. XLIX; & pour ce qui eſt des quantités $nx = \nu\frac{A^2}{a^2}$ (art. XXIX) on aura, en faiſant A, demi-diametre de Jupiter, $= I$, & mettant pour a^{I}, a^{II} &c. leur valeurs (art XLVI), on aura dis-je:

$nx^{I} = 0,03110..\nu$, $nx^{II} = 0,01234..\nu$, $nx^{III} = 0,00484..\nu$
$nx^{IV} = 0,00156...\nu$.

la quantité ν dépendant de la figure, & de la conſtitution intérieure de Jupiter, comme on l'a vu (art. XVI).

LXXXIII.

Toutes ces ſubſtitutions faites, on aura, après avoir remis au lieu de $n\chi^{I}$, $n\chi^{II}$ &c, les quantités $\frac{\mathbb{C}^{I}}{\Psi}$, $\frac{\mathbb{C}^{II}}{\Psi}$ &c.

$$n\mathfrak{C}^{I} = 0,982\frac{\mathbb{C}^{II}}{\Psi} + 0,124\frac{\mathbb{C}^{III}}{\Psi} + 0,022\frac{\mathbb{C}^{IV}}{\Psi} + 0,012440\nu + 0,0000003,$$

$$n\mathfrak{C}^{II} = 1,562\frac{\mathbb{C}^{I}}{\Psi} + 0,940\frac{\mathbb{C}^{III}}{\Psi} + 0,090\frac{\mathbb{C}^{IV}}{\Psi} + 0,004936\nu + 0,0000010,$$

$n\mathfrak{C}^{III} = 0{,}307\,\frac{\mathfrak{C}^{I}}{\mathfrak{T}} + 1{,}467\,\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}} + 0{,}673\,\frac{\mathfrak{C}^{IV}}{\mathfrak{T}} + 0{,}0019369$
$+ 0{,}0000040.$

$n\mathfrak{C}^{IV} = 0{,}050\,\frac{\mathfrak{C}^{I}}{\mathfrak{T}} + 0{,}260\,\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}} + 1{,}139\,\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{T}} + 0{,}0006249$
$+ 0{,}0000222.$

LXXXIV.

Paſſons maintenant aux formules qui donnent le mouvement des nœuds, & nous trouvons d'abord pour le premier ſatellite (art. LXXV).

$N^{I_2} = \mu^{I_2} + nf^{I}\left(\chi^{II}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) + \chi^{III}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{III}) + \chi^{IV}\right.$
$\left.\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{IV}) + \frac{3}{2}K^{I} + \frac{3}{5}x^{I}\right) + 2n\mu^{I}f^{I}H^{I};$

c'eſt-à-dire, en mettant μ^{I} au lieu de f^{I}, & négligeant le terme $2n\mu^{I}f^{I}H^{I}$ qui eſt du ſecond ordre, à cauſe que H^{I} eſt déja de l'ordre de n (art. LXXVIII).

$N^{I_2} = \mu^{I}\left(1 + n\chi^{II}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) + n\chi^{III}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{III})\right.$
$\left. + n\chi^{IV}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{IV}) + \frac{1}{2}nK^{I} + \frac{1}{5}nx^{I}\right);$

donc ſi on fait pour abréger,

$\pi^{I} = \chi^{II}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) + \chi^{III}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{III}) + \chi^{IV}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{IV}) + \frac{3}{2}K^{I} + \frac{3}{5}x^{I}$

de même

$\pi^{II} = \chi^{I}\tilde{\Gamma}(a^{II}, a^{I}) + \chi^{III}\tilde{\Gamma}(a^{II}, a^{III}) + \chi^{IV}\tilde{\Gamma}(a^{II}, a^{IV})$
$+ \frac{3}{2}K^{II} + \frac{3}{5}x^{II}$

$\pi^{III} = \chi^{I}\tilde{\Gamma}(a^{III}, a^{I}) + \chi^{II}\tilde{\Gamma}(a^{III}, a^{II}) + \chi^{III}\tilde{\Gamma}(a^{III}, a^{IV})$
$+ \frac{3}{2}K^{III} + \frac{3}{5}x^{III}$

$\pi^{IV} = \chi^{I}\tilde{\Gamma}(a^{IV}, a^{I}) + \chi^{II}\tilde{\Gamma}(a^{IV}, a^{II}) + \chi^{III}\tilde{\Gamma}(a^{IV}, a^{III})$
$+ \frac{3}{2}K^{IV} + \frac{3}{5}x^{IV}.$

On aura pour tous les quatre ſatellites

$N^{I_2} = \mu^{I_2}(1 + n\pi^{I}),\quad N^{I} = \mu^{I}(1 + \frac{1}{2}n\pi^{I})$

$N^{II_2} = \mu^{II_2}(1 + n\pi^{II}),\quad N^{I} = \mu^{II}(1 + \frac{1}{2}n\pi^{II})$ &c.

Pour

Pour tirer de-là le mouvement des nœuds, on remarquera que $(\mu - N)\,t - \varpi$ exprime en général la longitude moyenne du nœud ascendant (art. XLI); d'où il suit que le mouvement de la ligne des nœuds sera au mouvement moyen, comme $\mu - N$ à μ, c'est-à-dire, comme $-\frac{n\pi}{2}$ à 1; par conséquent les nœuds reculeront à chaque révolution de $\frac{1}{2}n\pi \times 360°$.

LXXXV.

Or, on trouve par l'art. XXXII, en faisant successivement $q = \frac{a^{I}}{a^{II}}$, $= \frac{a^{I}}{a^{III}}$ &c.

$\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) = q^{3}A + \breve{\Gamma}(a^{I}, a^{II})$

$\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{III}) = q^{3}A + \breve{\Gamma}(a^{I}, a^{III})$

&c. ensuite,

$\tilde{\Gamma}(a^{II}, a^{I}) = A + \breve{\Gamma}(a^{II}, a^{I})$

$\tilde{\Gamma}(a^{III}, a^{I}) = A + \breve{\Gamma}(a^{III}, a^{I})$ &c.

ce qui donne (art. XLVII)

	(a^{I}, a^{II})	(a^{I}, a^{III})	(a^{I}, a^{IV})	(a^{II}, a^{III})	(a^{II}, a^{IV})	(a^{III}, a^{IV})
$\breve{\Gamma}$	0,981	0,126	0,018	0,942	0,087	0,576
	(a^{II}, a^{I})	(a^{III}, a^{I})	(a^{IV}, a^{I})	(a^{III}, a^{II})	(a^{IV}, a^{II})	(a^{IV}, a^{III})
$\breve{\Gamma}$	1,558	0,320	0,083	1,506	0,245	1,013

LXXXVI.

Donc faisant ces substitutions, & remettant $\frac{\mathfrak{C}^{I}}{\varpi}$, $\frac{\mathfrak{C}^{I}}{\varpi}$ &c. au lieu de $n\chi^{I}$, $n\chi^{II}$, &c. on aura

$$n\pi^{I} = 0,981\,\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{P}} + 0,126\,\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{P}} + 0,018\,\frac{\mathfrak{C}^{IV}}{\mathfrak{P}} + 0,018660\nu + 0,0000003$$

$$n\pi^{II} = 1,558\,\frac{\mathfrak{C}^{I}}{\mathfrak{P}} + 0,942\,\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{P}} + 0,087\,\frac{\mathfrak{C}^{IV}}{\mathfrak{P}} + 0,007404\nu + 0,0000010$$

$$n\pi^{III} = 0,320\,\frac{\mathfrak{C}^{I}}{\mathfrak{P}} + 1,506\,\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{P}} + 0,576\,\frac{\mathfrak{C}^{IV}}{\mathfrak{P}} + 0,002904\nu + 0,0000040$$

$$n\pi^{IV} = 0,083\,\frac{\mathfrak{C}^{I}}{\mathfrak{P}} + 0,245\,\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{P}} + 1,013\,\frac{\mathfrak{C}^{III}}{\mathfrak{P}} + 0,000936\nu + 0,0000222$$

§. 2.

Où l'on montre la néceſſité d'avoir égard, dans les calculs de l'équation du centre, & de la latitude, à quelques termes de l'ordre n, *des équations* (G), & (K).

LXXXVII.

Nous avons trouvé (art. LXXVII) $x'^{I} = \varepsilon^{I} \cos.(M^{I}t + \omega^{I})$, & $y'^{I} = -\frac{2\mu^{I}}{M^{I}}\varepsilon^{I} \sin.(M^{I}t + \omega^{I})$; on trouvera de même $x'^{II} = \varepsilon^{II} \cos.(M^{II}t + \omega^{II})$, $y'^{II} = -\frac{2\mu^{II}}{M^{II}}\varepsilon^{II} \sin.(M^{II}t + \omega^{II})$ & ainſi des autres. Cela poſé, ſi on reprend l'équation (G) de l'article LXXVI, & qu'on ſubſtitue dans le terme $n\chi^{II} f^{I} x^{II} \breve{\Psi}^{I}(a^{I}, a^{II}) \cos.(\mu^{II} - \mu^{I})t$, au lieu de x^{II} ſa valeur $x'^{II} + \theta^{II}$, on verra que la quantité $x'^{II} \cos.(\mu^{II} - \mu^{I})t$ renfermera un terme de cette forme $\cos.((M^{II} - \mu^{II}$

$+\mu^{I})t+\omega^{II})=cof.\left(\left(\mu^{I}-\frac{n\zeta^{II}}{2}\right)t+\omega^{II}\right)$, lequel étant intégré deviendra $\frac{cof.\left(\left(\mu^{I}-\frac{n\zeta^{II}}{2}\right)t+\omega^{II}\right)}{\left(\mu^{I}-\frac{n\zeta^{II}}{2}\right)^{2}-\left(\mu^{I}-\frac{n\zeta}{2}\right)^{2}}$; ainſi le terme $n\chi^{II}f^{I}\breve{\Psi}I(a^{I},a^{II})x^{II}cof.(\mu^{II}-\mu^{I})t$ de l'équation différentielle donnera dans la valeur de x^{I} le terme ſuivant:

$$\frac{1}{2}\frac{n\chi^{II}f^{I}\breve{\Psi}I(a^{I},a^{II})cof.\left(\left(\mu^{I}-\frac{n\zeta^{II}}{2}\right)t+\omega^{II}\right)}{\left(\mu^{I}-\frac{n\zeta^{II}}{2}\right)^{2}-\left(\mu^{I}-\frac{n\zeta^{I}}{2}\right)^{2}}=\frac{\chi^{II}f^{I}\breve{\Psi}I(a^{I},a^{II})}{2(\zeta^{I}-\zeta^{II})}$$

$cof.\left(\left(\mu^{I}-\frac{n\zeta^{II}}{2}\right)t+\omega^{II}\right)$, lequel appartient, comme l'on voit à la première valeur de x^{I}. Pareillement le terme $n\chi^{III}f^{I}x^{III}\breve{\Psi}I(a^{I},a^{III})cof.(\mu^{III}-\mu^{I})t$ donnera dans la valeur de x^{I} le terme $\frac{\chi^{III}f^{I}\breve{\Psi}I(a^{I},a^{III})}{2(\zeta^{I}-\zeta^{III})}cof.\left(\left(\mu^{I}-\frac{n\zeta^{III}}{2}\right)t+\omega^{III}\right)$; & il en ſera de même de quelques autres termes de l'équation (G) dont nous parlerons plus bas.

On trouvera de la même manière dans la valeur de x^{II} les termes $\frac{\chi^{I}f^{II}\breve{\Psi}I(a^{II},a^{I})}{2(\zeta^{II}-\zeta^{I})}cof.\left(\left(\mu^{II}-\frac{n\zeta^{I}}{2}\right)t+\omega^{I}\right)$, $\frac{\chi^{III}f^{II}\breve{\Psi}I(a^{II},a^{III})}{2(\zeta^{II}-\zeta^{III})}cof.\left(\left(\mu^{II}-\frac{n\zeta^{III}}{2}\right)t+\omega^{III}\right)$; leſquels étant de nouveau ſubſtitués dans le terme $n\chi^{II}f^{I}\breve{\Psi}I(a^{I},a^{II})x^{II}cof.(\mu^{II}-\mu^{I})t$ de l'équation (G), en donneront deux autres de cette forme $\frac{1}{2}n\chi^{II}f^{I}\breve{\Psi}I(a^{I},a^{II})\times\frac{\chi^{I}f^{II}\breve{\Psi}I(a^{II},a^{I})}{2(\zeta^{II}-\zeta^{I})}$ $cof.\left(\left(\mu^{I}-\frac{n\zeta^{I}}{2}\right)t+\omega^{I}\right)$, $\frac{1}{2}n\chi^{II}f^{I}\breve{\Psi}I(a^{I},a^{II})\times\frac{\chi^{III}f^{II}\breve{\Psi}I(a^{II},a^{III})}{2(\zeta^{II}-\zeta^{III})}$ $cof.\left(\left(\mu^{I}-\frac{n\zeta^{III}}{2}\right)t+\omega^{III}\right)$; le premier de ces deux termes produira (à cauſe de $\mu^{I}-\frac{n\zeta^{I}}{2}=M$) dans la valeur de x^{I} un terme qui ſera multiplié par l'angle t, (art. XXXIV); ce qui donnera des arcs de cercle dans le rayon vecteur

de l'orbite; le second y produira le terme $\frac{\chi^{II} f^{I} \breve{\Psi}^{I}(a^{I}, a^{II})}{2(\epsilon^{III} - \epsilon^{I})} \times \frac{\chi^{III} f^{II} \breve{\Psi}^{I}(a^{II}, a^{III})}{2(\epsilon^{II} - \epsilon^{III})} \cos.\left(\left(\mu^{I} - \frac{n\epsilon^{III}}{2}\right)t + \omega^{III}\right)$ qui est de la même forme que celui que nous avons déja trouvé.

Ces termes en reproduiront d'autres dans la valeur de x^{III}, de la même forme que ceux que nous venons d'examiner, d'où il renaîtra encor dans la valeur de x^{I} d'autres termes de la même espèce que les précédens, & ainsi de suite à l'infini.

LXXXVIII.

De-là je tire ces deux conséquences fort importantes; 1.° que les termes dont il s'agit, quoique de l'ordre n dans l'équation différentielle, appartiennent cependant à la première approximation, & ne doivent point être négligés dans les premières valeurs de x, y; 2.° Que la méthode ordinaire d'approximation, suivant laquelle on emploie à chaque nouvelle correction les valeurs trouvées dans la correction précédente est absolument insuffisante pour calculer ces sortes de termes.

On appliquera le même raisonnement à l'équation (K) & on en tirera des conclusions analogues par rapport à la valeur de z.

LXXXIX.

Il est donc nécessaire d'avoir une méthode particulière pour intégrer les équations (G), (K); on verra dans le paragraphe suivant comment je m'y suis pris pour arriver à ce but; mais il faut commencer ici par voir quels sont les termes de ces équations, auxquels on doit avoir égard.

Pour peu qu'on examine l'équation (G), on reconnoîtra aisément que les termes dont il s'agit viennent uniquement des termes qui renferment

$x^{II} \cos.(\mu^{II} - \mu^{I})t$, $x^{III} \cos.(\mu^{III} - \mu^{I})t$, $x^{IV} \cos.(\mu^{IV} - \mu^{I})t$,

$y^{II} \sin.(\mu^{II}-\mu^{I})t$, $y^{III} \sin.(\mu^{III}-\mu^{I})t$, $y^{IV} \sin.(\mu^{IV}-\mu^{I})t$,

$\int x^{II} \sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t\,dt$, $\int x^{III} \sin.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t\,dt$,

$\int x^{IV} \sin.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t\,dt$,

$\int y^{II} \cos.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t\,dt$, $\int y^{III} \cos.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t\,dt$,

$\int y^{IV} \cos.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t\,dt$,

en tant qu'on y substitue x'^{II}, x'^{III}, x'^{IV}; y'^{II}, y'^{III}, y'^{IV}, à la place de x^{II}, x^{III}, x^{IV}; y^{II}, y^{III}, y^{IV}; de sorte qu'on pourra réduire cette équation à celle-ci

$$\frac{d^2x'^{I}}{dt^2} + M^{I2}x'^{I}.$$
$$-nf^{I}\chi^{II}\breve{\Psi}^{I}(a^{I},a^{II})\,x'^{II}\cos.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t$$
$$-nf^{I}\chi^{III}\breve{\Psi}^{I}(a^{I},a^{III})\,x'^{III}\cos.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t$$
$$-nf^{I}\chi^{IV}\breve{\Psi}^{I}(a^{I},a^{IV})\,x'^{IV}\cos.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t$$

$$+nf^{I}\chi^{II}\breve{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{II})\,y'^{II}\sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t$$
$$+nf^{I}\chi^{III}\breve{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{III})\,y'^{III}\sin.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t$$
$$+nf^{I}\chi^{IV}\breve{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{IV})\,y'^{IV}\sin.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t$$

$$+2nf^{I}\mu^{I}\chi^{II}\hat{\Psi}^{I}(a^{I},a^{II})\int x'^{II}\sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t\,dt$$
$$+2nf^{I}\mu^{I}\chi^{III}\hat{\Psi}^{I}(a^{I},a^{III})\int x'^{III}\sin.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t\,dt$$
$$+2nf^{I}\mu^{I}\chi^{IV}\hat{\Psi}^{I}(a^{I},a^{IV})\int x'^{IV}\sin.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t\,dt$$

$$+2nf^{I}\mu^{I}\chi^{II}\hat{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{II})\int y'^{II}\cos.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t\,dt$$
$$+2nf^{I}\mu^{I}\chi^{III}\hat{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{III})\int y'^{III}\cos.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t\,dt$$
$$+2nf^{I}\mu^{I}\chi^{IV}\hat{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{IV})\int y'^{IV}\cos.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t\,dt = 0 \ldots (L)$$

A l'égard de l'équation (K) on trouvera qu'elle se réduit de même à celle-ci:

$$\frac{d^2z'^{I}}{dt^2} + N^{I2}z^{I}$$
$$-nf^{I}\chi^{II}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{I}(a^{I},a^{II})\,z^{II}\cos.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t$$
$$-nf^{I}\chi^{III}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{I}(a^{I},a^{III})\,z^{III}\cos.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t$$
$$-nf^{I}\chi^{IV}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{I}(a^{I},a^{IV})\,z^{IV}\cos.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t = 0 \ldots\ldots (N)$$

X C.

Comme notre deſſein n'eſt pas d'avoir égard dans les valeurs de x, y & z aux termes de l'ordre n, mais ſeulement à ceux qui ont des coefficiens finis; nous pourrons négliger, dans les équations (L) & (N) tous les termes qui ſe trouveront affectés de n^2, parce que ces termes ſeront encore de l'ordre n après l'intégration.

Or les équations (G) & (H) donnent, en rejettant les termes affectés de n, $\frac{d^2x^{\cdot I}}{dt^2} + M^{I2}x^{\cdot I} = 0$, & $\frac{dy^{\cdot I}}{dt} + 2\mu^I x^{\cdot I} = 0$; d'où l'on tire $\frac{dy^{\cdot I}}{dt} - \frac{2\mu^I}{M^{I2}} \times \frac{d^2x^{\cdot I}}{dt^2} = 0$, & intégrant $y^{\cdot I} - \frac{2\mu^I}{M^{I2}} \times \frac{dx^{\cdot I}}{dt} = 0$; il ne faut point ici de conſtante, ce qui eſt évident par la nature de nos formules; on trouvera de même $y^{\cdot II} - \frac{2\mu^{II}}{M^{2II}} \times \frac{dx^{\cdot II}}{dt} = 0$, $y^{\cdot III} - \frac{2\mu^{III}}{M^{III2}} \times \frac{dx^{\cdot III}}{dt} = 0$, & $y^{\cdot IV} - \frac{2\mu^{IV}}{M^{IV2}} \times \frac{dx^{\cdot IV}}{dt} = 0$; donc ſubſtituant ces valeurs de $y^{\cdot II}$, $y^{\cdot III}$, y^{IV} dans l'équation (L) de l'article précédent, on changera les termes

$$nf^I \chi^{II} \breve{\Gamma}^I (a^I, a^{II})\, y^{\cdot II} \sin.(\mu^{II} - \mu^I)\, t$$
$$+ nf^I \chi^{III} \breve{\Gamma}^I (a^I, a^{III})\, y^{\cdot III} \sin.(\mu^{III} - \mu^I)\, t$$
$$+ nf^I \chi^{IV} \breve{\Gamma}^I (a^I, a^{IV})\, y^{\cdot IV} \sin.(\mu^{IV} - \mu^I)\, t \text{ en ceux-ci}$$

$$2nf^I \chi^{II} \frac{\mu^{II}}{M^{II}} \breve{\Gamma}^I (a^I, a^{II}) \frac{dx^{\cdot II}}{dt} \sin.(\mu^{II} - \mu^I)\, t$$
$$+ 2nf^I \chi^{III} \frac{\mu^{III}}{M^{III}} \breve{\Gamma}^I (a^I, a^{III}) \frac{dx^{\cdot III}}{dt} \sin.(\mu^{III} - \mu^I)\, t$$
$$+ 2nf^I \chi^{IV} \frac{\mu^{IV}}{M^{IV2}} \breve{\Gamma}^I (a^I, a^{IV}) \frac{dx^{\cdot IV}}{dt} \sin.(\mu^{IV} - \mu^I)\, t$$

& les termes:

$$2nf^I \mu^I \chi^{II} \hat{\Gamma}^I (a^I, a^{II}) \int y^{\cdot II} \cos.(\mu^{II} - \mu^I)\, t\, dt$$

$+ 2nf^{I}\mu^{I}\chi^{III}\hat{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{III})\int y^{\cdot III}\,cof.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t\,dt$

$+ 2nf^{I}\mu^{I}\chi^{IV}\hat{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{IV})\int y^{\cdot IV}\,cof.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t\,dt$

en ceux-ci :

$4nf^{I}\mu^{I}\chi^{II}\frac{\mu^{II}}{M^{II_2}}\hat{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{II})\int\frac{dx^{\cdot II}}{dt}\,cof.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t\,dt$

$+ 4nf^{I}\mu^{I}\chi^{III}\frac{\mu^{III}}{M^{III_2}}\hat{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{III})\int\frac{dx^{\cdot III}}{dt}\,cof.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t\,dt$

$+ 4nf^{I}\mu^{I}\chi^{IV}\frac{\mu^{IV}}{M^{IV_2}}\hat{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{IV})\int\frac{dx^{\cdot IV}}{dt}\,cof.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t\,dt$;

que l'on peut encore changer en ceux-ci :]

$4nf^{I}\mu^{I}\chi^{II}\frac{\mu^{II}}{M^{II_2}}\hat{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{II})\,x^{\cdot II}\,cof.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t$

$+ 4nf^{I}\mu^{I}\chi^{III}\frac{\mu^{III}}{M^{III_2}}\hat{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{III})\,x^{\cdot III}\,cof.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t$

$+ 4nf^{I}\mu^{I}\chi^{IV}\frac{\mu^{IV}}{M^{IV_2}}\hat{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{IV})\,x^{\cdot IV}\,cof.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t$

$+4nf^{I}\mu^{I}\chi^{II}\frac{\mu^{II}(\mu^{II}-\mu^{I})}{M^{II_2}}\hat{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{II})\int x^{\cdot II}\,sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t\,dt$

$+4nf^{I}\mu^{I}\chi^{III}\frac{\mu^{III}(\mu^{III}-\mu^{I})}{M^{III_2}}\hat{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{III})\int x^{\cdot III}\,sin.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t\,dt$

$+4nf^{I}\mu^{I}\chi^{IV}\frac{\mu^{IV}(\mu^{IV}-\mu^{I})}{M^{IV_2}}\hat{\Gamma}^{I}(a^{I},a^{IV})\int x^{\cdot IV}\,sin.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t\,dt$

Par ce moyen, l'équation (L) ne contiendra plus que des termes de la forme de $x^{\cdot II}\,cof.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t$, de $\frac{dx^{\cdot II}}{dt}\,sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t$, & de $\int x^{\cdot II}\,sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t\,dt$.

Je reprends maintenant l'équation $\frac{d^2x^{\cdot I}}{dt^2}+M^{I_2}x^{\cdot I}=0$, laquelle étant rapportée au second satellite, devient $\frac{dx^{\cdot II}}{dt^2}+M^{II_2}x^{\cdot II}=0$; je multiplie cette dernière par $sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t\,dt$; je l'integre, j'ai : $\int\frac{d^2x^{\cdot II}}{dt^2}\,sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t\,dt$ $+M^{II_2}\int x^{\cdot II}\,sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t\,dt=0$; je change l'ex-

preſſion $\int \frac{d^2x^{II}}{dt^2} \sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t\,dt$ en ſon équivalente

$$\frac{dx^{II}}{dt}\sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t-(\mu^{II}-\mu^{I})\,x^{II}\cos.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t$$
$$-(\mu^{II}-\mu^{I})^2\int x^{II}\sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t\,dt,$$

& il me vient l'équation :

$$\frac{dx^{II}}{at}\sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t-(\mu^{II}-\mu^{I})x^{II}\cos.(\mu^{II}-\mu^{I})t+\big(M^{III2}$$
$$-(\mu^{II}-\mu^{I})^2\big)\int x^{II}\sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t\,dt=0\,;$$

d'où je tire :

$$\int x^{II}\sin.(\mu^{II}-\mu^{I})t\,dt=\frac{(\mu^{II}-\mu^{I})x^{II}\cos.(\mu^{II}-\mu^{I})t-\frac{dx^{II}}{dt}\sin.(\mu^{III}-\mu^{I})t}{M^{III2}-(\mu^{II}-\mu^{I})^2}$$

Je trouve de la même manière,

$$\int x^{III}\sin.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t\,dt=\frac{(\mu^{III}-\mu^{I})x^{III}\cos.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t-\frac{dx^{III}}{t}\sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t}{M^{III2}-(\mu^{III}-\mu^{I})^2}$$

$$\int x^{IV}\sin.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t\,dt=\frac{(\mu^{IV}-\mu^{I})x^{IV}\cos.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t-\frac{dx^{IV}}{dt}\sin.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t}{M^{IV2}-(\mu^{IV}-\mu^{I})^2}$$

On fera toutes ces ſubſtitutions dans l'équation (L), moyennant quoi elle n'aura plus que des termes de la forme de $x^{II}\cos.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t$, & $\frac{dx^{II}}{dt}\sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t$.

XCI.

Donc ſi on fait, pour abréger :

$$\mathring{\Psi}\,I(a^{I},a^{II})=\breve{\Psi}\,I(a^{I},a^{II})-4\frac{\mu^{I}\mu^{II}}{M^{III2}}\hat{\Gamma}\,I(a^{I},a^{II})-\Big(2\hat{\Psi}\,I(a^{I},a^{II})$$
$$+4\frac{\mu^{II}(\mu^{II}-\mu^{I})}{M^{III2}}\hat{\Gamma}\,I(a^{I},a^{II})\Big)\frac{\mu^{I}(\mu^{II}-\mu^{I})}{M^{III2}-(\mu^{II}-\mu^{I})^2}$$

$$\mathring{\Psi}\,I(a^{I},a^{III})=\mathring{\Psi}\,I(a^{I},a^{III})-4\frac{\mu^{I}\mu^{III}}{M^{III2}}\hat{\Gamma}\,I(a^{I},a^{III})-\Big(2\hat{\Psi}\,I$$
$$(a^{I},a^{III})+4\frac{\mu^{III}(\mu^{III}-\mu^{I})}{M^{III2}}\hat{\Gamma}\,I(a^{I},a^{III})\Big)\frac{\mu^{I}(\mu^{III}-\mu^{I})}{M^{III2}-(\mu^{III}-\mu^{I})^2}$$

$$\mathring{\Psi}\,I(a^{I},a^{IV})=\mathring{\Psi}\,I(a^{I},a^{IV})-4\frac{\mu^{I}\mu^{IV}}{M^{IV2}}\hat{\Gamma}\,I(a^{I},a^{IV})-\Big(2\hat{\Psi}\,I$$
$$(a^{I},$$

$$(a^{I}, a^{IV}) + 4\frac{\mu^{IV}(\mu^{IV}-\mu^{I})}{M^{IV_2}}\hat{\Gamma}^{I}(a^{I}, a^{IV})\Big)\frac{\mu^{I}(\mu^{IV}-\mu^{I})}{M^{IV_2}-(\mu^{IV}-\mu^{I})^2}$$

& de plus

$$\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I}, a^{II}) = \frac{-2\mu^{II}}{M^{II_2}}\breve{\Gamma}^{I}(a^{I}, a^{II}) + \Big(2\hat{\Psi}^{I}(a^{I}, a^{II}) + 4\frac{\mu^{II}(\mu^{II}-\mu^{I})}{M^{II_2}}\hat{\Gamma}^{I}(a^{I}, a^{II})\Big)\frac{\mu^{I}}{M^{II_2}-(\mu^{II}-\mu^{I})^2}$$

$$\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I}, a^{III}) = \frac{-2\mu^{III}}{M^{III_2}}\breve{\Gamma}^{I}(a^{I}, a^{III}) + \Big(2\hat{\Psi}^{I}(a^{I}, a^{III}) + 4\frac{\mu^{III}(\mu^{III}-\mu^{I})}{M^{III_2}}\hat{\Gamma}^{I}(a^{I}, a^{III})\Big)\frac{\mu^{I}}{M^{III_2}-(\mu^{III}-\mu^{I})^2}$$

$$\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I}, a^{IV}) = \frac{-2\mu^{IV}}{M^{IV_2}}\breve{\Gamma}^{I}(a^{I}, a^{IV}) + \Big(2\hat{\Psi}^{I}(a^{I}, a^{IV}) + 4\frac{\mu^{IV}(\mu^{IV}-\mu^{I})}{M^{IV_2}}\hat{\Gamma}^{I}(a^{I}, a^{IV})\Big)\frac{\mu^{I}}{M^{IV_2}-(\mu^{IV}-\mu^{I})^2}$$

On aura, pour le premier satellite, l'équation:

$$\frac{d^2x^{I}}{dt^2} + M^{I_2}x^{I}$$
$$- nf^{I}\chi^{II}\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{I}, a^{II})\,x^{II}\,cos.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t$$
$$- nf^{I}\chi^{II}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I}, a^{II})\frac{dx^{II}}{dt}\,sin.(\mu^{II}-\mu^{I})\,t$$
$$- nf^{I}\chi^{III}\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{I}, a^{III})\,x^{III}\,cos.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t$$
$$- nf^{I}\chi^{III}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I}, a^{III})\frac{dx^{III}}{dt}\,sin.(\mu^{III}-\mu^{I})\,t$$
$$- nf^{I}\chi^{IV}\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{I}, a^{IV})\,x^{IV}\,cos.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t$$
$$- nf^{I}\chi^{IV}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I}, a^{IV})\frac{dx^{IV}}{dt}\,sin.(\mu^{IV}-\mu^{I})\,t$$
$$= 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (M\,I)$$

Et de même pour les trois autres satellites:

$$\frac{d^2x^{II}}{dt^2} + M^{II_2}x^{II}$$
$$- nf^{II}\chi^{I}\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{II}, a^{I})\,x^{I}\,cos.(\mu^{I}-\mu^{II})\,t$$
$$- nf^{II}\chi^{I}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{II}, a^{I})\frac{dx^{I}}{dt}\,sin.(\mu^{I}-\mu^{II})\,t$$

$$- nf^{II}\chi^{III}\overset{\circ}{\Psi}{}^{1}(a^{II},a^{III})\,x^{,III}\,cos.(\mu^{III}-\mu^{II})\,t$$
$$- nf^{II}\chi^{III}\overset{\circ}{\Pi}{}^{1}(a^{II},a^{III})\,\frac{dx^{,III}}{dt}\,sin.(\mu^{III}-\mu^{II})\,t$$
$$- nf^{II}\chi^{IV}\overset{\circ}{\Psi}{}^{1}(a^{II},a^{IV})\,x^{,IV}\,cos.(\mu^{IV}-\mu^{II})\,t$$
$$- nf^{II}\chi^{IV}\overset{\circ}{\Pi}{}^{1}(a^{II},a^{IV})\,\frac{dx^{,IV}}{dt}\,sin.(\mu^{IV}-\mu^{II})\,t$$
$$= 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (M2)$$

$$\frac{d^2x^{,III}}{dt^2} + M^{III2}\,x^{,III}$$
$$- nf^{III}\chi^{I}\overset{\circ}{\Psi}{}^{1}(a^{III},a^{I})\,x^{,I}\,cos.(\mu^{I}-\mu^{III})\,t$$
$$- nf^{III}\chi^{I}\overset{\circ}{\Pi}{}^{1}(a^{III},a^{I})\,\frac{dx^{,I}}{dt}\,sin.(\mu^{I}-\mu^{III})\,t$$
$$- nf^{III}\chi^{II}\overset{\circ}{\Psi}{}^{1}(a^{III},a^{II})\,x^{,II}\,cos.(\mu^{II}-\mu^{III})\,t$$
$$- nf^{III}\chi^{II}\overset{\circ}{\Pi}{}^{1}(a^{III},a^{II})\,\frac{dx^{,II}}{dt}\,sin.(\mu^{II}-\mu^{III})\,t$$
$$- nf^{IV}\chi^{IV}\overset{\circ}{\Psi}{}^{1}(a^{III},a^{IV})\,x^{,IV}\,cos.(\mu^{IV}-\mu^{III})\,t$$
$$- nf^{III}\chi^{IV}\overset{\circ}{\Pi}{}^{1}(a^{III},a^{IV})\,\frac{dx^{,IV}}{dt}\,sin.(\mu^{IV}-\mu^{III})\,t$$
$$= 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (M3)$$

$$\frac{d^2x^{,IV}}{dt^2} + M^{IV2}\,x^{,IV}$$
$$- nf^{IV}\chi^{I}\overset{\circ}{\Psi}{}^{1}(a^{IV},a^{I})\,x^{,I}\,cos.(\mu^{I}-\mu^{IV})\,t$$
$$- nf^{IV}\chi^{I}\overset{\circ}{\Pi}{}^{1}(a^{IV},a^{I})\,\frac{dx^{,I}}{dt}\,sin.(\mu^{I}-\mu^{IV})\,t$$
$$- nf^{IV}\chi^{II}\overset{\circ}{\Psi}{}^{1}(a^{IV},a^{II})\,x^{,II}\,cos.(\mu^{II}-\mu^{IV})\,t$$
$$- nf^{IV}\chi^{II}\overset{\circ}{\Pi}{}^{1}(a^{IV},a^{II})\,\frac{dx^{,II}}{dt}\,sin.(\mu^{II}-\mu^{IV})\,t$$
$$- nf^{IV}\chi^{III}\overset{\circ}{\Psi}{}^{1}(a^{IV},a^{III})\,x^{,III}\,cos.(\mu^{III}-\mu^{IV})\,t$$
$$- nf^{IV}\chi^{III}\overset{\circ}{\Pi}{}^{1}(a^{IV},a^{III})\,\frac{dx^{,III}}{dt}\,sin.(\mu^{III}-\mu^{IV})\,t$$
$$= 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (M4)$$

Pareillement on aura, par rappport aux variables z, ces quatre équations: (art. LXXXIX).

$$\frac{d^2 z^{\mathrm{I}}}{dt^2} + N^{\mathrm{I}2}\, z^{\mathrm{I}}$$
$$- nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{II}}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mathrm{I}}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\, z^{\mathrm{II}} \cos.(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})\, t$$
$$- nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{III}}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mathrm{I}}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})\, z^{\mathrm{III}} \cos.(\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})\, t$$
$$- nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{IV}}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mathrm{I}}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})\, z^{\mathrm{IV}} \cos.(\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}}) = 0 \ldots (N1)$$

$$\frac{d^2 z^{\mathrm{II}}}{dt^2} + N^{\mathrm{II}2}\, z^{\mathrm{II}}$$
$$- nf^{\mathrm{II}}\chi^{\mathrm{I}}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mathrm{I}}(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}})\, z^{\mathrm{I}} \cos.(\mu^{\mathrm{I}} - \mu^{\mathrm{II}})\, t$$
$$- nf^{\mathrm{II}}\chi^{\mathrm{III}}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mathrm{I}}(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}})\, z^{\mathrm{III}} \cos.(\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{II}})\, t$$
$$- nf^{\mathrm{II}}\chi^{\mathrm{IV}}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mathrm{I}}(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{IV}})\, z^{\mathrm{IV}} \cos.(\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{II}})\, t = 0 \ldots (N2)$$

$$\frac{d^2 z^{\mathrm{III}}}{dt^2} + N^{\mathrm{III}2}\, z^{\mathrm{III}}$$
$$- nf^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{I}}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mathrm{I}}(a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{I}})\, z^{\mathrm{I}} \cos.(\mu^{\mathrm{I}} - \mu^{\mathrm{III}})\, t$$
$$- nf^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{II}}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mathrm{I}}(a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{II}})\, z^{\mathrm{II}} \cos.(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{III}})\, t$$
$$- nf^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{IV}}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mathrm{I}}(a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{IV}})\, z^{\mathrm{IV}} \cos.(\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{III}})\, t = 0 \ldots (N3)$$

$$\frac{d^2 z^{\mathrm{III}}}{dt^2} + N^{\mathrm{IV}2}\, z^{\mathrm{IV}}$$
$$- nf^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{I}}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mathrm{I}}(a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{I}})\, z^{\mathrm{I}} \cos.(\mu^{\mathrm{I}} - \mu^{\mathrm{IV}})\, t$$
$$- nf^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{II}}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mathrm{I}}(a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{II}})\, z^{\mathrm{II}} \cos.(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{IV}})\, t$$
$$- nf^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{III}}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mathrm{I}}(a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{III}})\, z^{\mathrm{III}} \cos.(\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{IV}})\, t = 0 \ldots (N4)$$

§. 3.

Où l'on donne une nouvelle méthode pour intégrer les équations précédentes.

XCII.

Je fais

$$x^{\mathrm{II}} \cos.(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})\, t = P, \quad x^{\mathrm{II}} \sin.(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})\, t = p$$
$$x^{\mathrm{III}} \cos.(\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})\, t = Q, \quad x^{\mathrm{III}} \sin.(\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})\, t = q$$

$x^{\cdot IV} \cos.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t = R$, $x^{\cdot IV} \sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t = r$

d'où je tire

$$\frac{dx^{\cdot II}}{dt} \sin.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t = \frac{dp}{dt} - (\mu^{II} - \mu^{I})\, P$$

$$\frac{dx^{\cdot III}}{dt} \sin.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t = \frac{dq}{dt} - (\mu^{III} - \mu^{I})\, Q$$

$$\frac{dx^{\cdot IV}}{dt} \sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t = \frac{dr}{dt} - (\mu^{IV} - \mu^{I})\, R$$

Je substitue ces valeurs dans l'équation ($M1$), ce qui la change en celle-ci :

$$\frac{d^2 x^{\cdot I}}{dt^2} + M^{I2}\, x^{\cdot I}$$
$$- nf^{I} \chi^{II} \left(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{I}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^{I})\, \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I}, a^{II}) \right) P$$
$$- nf^{I} \chi^{II}\, \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I}, a^{II})\, \frac{dp}{dt}$$
$$- nf^{I} \chi^{III} \left(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{I}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^{I})\, \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I}, a^{III}) \right) Q$$
$$- nf^{I} \chi^{III}\, \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I}, a^{III})\, \frac{dq}{dt}$$
$$- nf^{I} \chi^{IV} \left(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{I}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^{I})\, \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I}, a^{IV}) \right) R$$
$$- nf^{I} \chi^{IV}\, \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I}, a^{IV})\, \frac{dr}{dt} = 0.$$

C'est l'équation qu'il s'agit maintenant d'intégrer ; en regardant les quantités P, Q, R, p, q, r, chacune comme une variable particulière. Pour y parvenir, voici comment je m'y prens.

XCIII.

Je reprens les formules :

$$\frac{dx^{\cdot II}}{dt} \sin.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t = \frac{dp}{dt} - (\mu^{II} - \mu^{I})\, P$$

$$\frac{dx^{\cdot III}}{dt} \sin.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t = \frac{dq}{dt} - (\mu^{III} - \mu^{I})\, Q$$

$$\frac{dx^{\cdot IV}}{dt} \sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t = \frac{dr}{dt} - (\mu^{IV} - \mu^{I})\, R$$

& je trouve de même :

$$\frac{dx^{II}}{dt}\cos.(\mu^{II}-\mu^{I})t=\frac{dP}{dt}+(\mu^{II}-\mu^{I})p$$

$$\frac{dx^{III}}{dt}\cos.(\mu^{III}-\mu^{I})t=\frac{dQ}{dt}+(\mu^{III}-\mu^{I})q\cdot$$

$$\frac{dx^{IV}}{dt}\cos.(\mu^{IV}-\mu^{I})t=\frac{dR}{dt}+(\mu^{IV}-\mu^{I})r;$$

De là je tire, par la différentiation, les formules suivantes :

$$\frac{d^2x^{II}}{dt^2}\sin.(\mu^{II}-\mu^{I})t=\frac{d^2p}{dt^2}-2(\mu^{II}-\mu^{I})\frac{dP}{dt}-(\mu^{II}-\mu^{I})^2p$$

$$\frac{d^2x^{II}}{dt^2}\cos.(\mu^{II}-\mu^{I})t=\frac{d^2P}{dt^2}+2(\mu^{II}-\mu^{I})\frac{dp}{dt}-(\mu^{II}-\mu^{I})^2P$$

$$\frac{d^2x^{III}}{dt^2}\sin.(\mu^{III}-\mu^{I})t=\frac{d^2p}{dt^2}-2(\mu^{III}-\mu^{I})\frac{dQ}{dt}-(\mu^{III}-\mu^{I})^2q$$

$$\frac{d^2x^{III}}{dt^2}\cos.(\mu^{III}-\mu^{I})t=\frac{d^2Q}{dt^2}+2(\mu^{III}-\mu^{I})\frac{dq}{dt}-(\mu^{III}-\mu^{I})^2Q$$

$$\frac{d^2x^{IV}}{dt^2}\sin.(\mu^{IV}-\mu^{I})t=\frac{d^2r}{dt^2}-2(\mu^{IV}-\mu^{I})\frac{dR}{dt}-(\mu^{IV}-\mu^{I})^2r$$

$$\frac{d^2x^{IV}}{dt^2}\cos.(\mu^{IV}-\mu^{I})t=\frac{d^2R}{dt^2}+2(\mu^{IV}-\mu^{I})\frac{dr}{dt}-(\mu^{IV}-\mu^{I})^2R$$

Cela posé, je multiplie d'abord l'équation ($M2$) par $\sin.(\mu^{II}-\mu^{I})t$, j'ai :

$$\frac{d^2x^{II}}{dt^2}\sin.(\mu^{II}-\mu^{I})t+M^{II}{}_2\,x^{II}\sin.(\mu^{II}-\mu^{I})t$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{I}\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{II},a^{I})x^{I}\sin.2(\mu^{II}-\mu^{I})t$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{I}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{II},a^{I})\frac{dx^{I}}{dt}(-1+\cos.2(\mu^{II}-\mu^{I})t)$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{III}\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{II},a^{III})x^{III}(\sin.(\mu^{III}-\mu^{I})t$$
$$-\sin.(\mu^{III}-2\mu^{II}+\mu^{I})t)$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{III}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{II},a^{III})\frac{dx^{III}}{dt}(-\cos.(\mu^{III}-\mu^{I})t$$
$$+\cos.(\mu^{III}-2\mu^{II}+\mu^{I})t)$$

$$-\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Psi}{}^{I} (a^{II}, a^{IV})\, x^{\cdot IV} \big(\sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t$$
$$- \sin.(\mu^{IV} - 2\mu^{II} + \mu^{I})\, t \big)$$

$$-\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{II}, a^{IV}) \frac{dx^{\cdot IV}}{dt} \big(- \cos.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t$$
$$+ \cos.(\mu^{IV} - 2\mu^{II} + \mu^{I})\, t \big) = 0.$$

Je ne conserve dans cette équation que les termes analogues à ceux de l'équation ($M1$), c'est-à dire, les termes, qui en faisant pour $x^{\cdot I}$, $x^{\cdot II}$, &c. les substitutions de l'article LXXXVII, en donneroient d'autres, où le coefficient de t seroit presque égal à μ^{I}, & qui sont les seuls auxquels nous devions avoir égard dans l'intégration de l'équation de l'article XCII.

J'aurai donc simplement :

$$\frac{d^2 x^{\cdot}}{dt^2} \sin.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t + M^{II_2} x^{\cdot II} \sin.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t$$
$$+ \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{I} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{II}, a^{I}) \frac{dx^{\cdot I}}{dt}$$

$$-\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Psi}{}^{I} (a^{II}, a^{III})\, x^{\cdot III} \sin.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t$$
$$+ \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{II}, a^{III}) \frac{dx^{\cdot III}}{dt} \cos.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t$$

$$-\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Psi}{}^{I} (a^{II}, a^{IV})\, x^{\cdot IV} \sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t$$
$$+ \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{II}, a^{IV}) \frac{dx^{\cdot IV}}{dt} \cos.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t = 0.$$

Je substitue au lieu de $\frac{d^2 x^{\cdot}}{dt^2} \sin.(\mu^{II} - \mu^{I})t$, $x^{\cdot II} \cos.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t$ &c. leurs valeurs en P, p, &c. j'ai

(1.°)

$$\frac{dp^2}{dt^2} - 2(\mu^{II} - \mu^{I}) \frac{dP}{dt} \big(M^{II_2} - (\mu^{II} - \mu^{I})^2 \big) p$$
$$+ \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{I} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{II}, a^{I}) \frac{dx^{\cdot I}}{dt}$$

$$-\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{III} \left(\overset{\circ}{\Psi} 1 (a^{II}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{III}) \right) q$$
$$+\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{III}) \frac{dQ}{dt}$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \left(\overset{\circ}{\Psi} 1 (a^{II}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{IV}) \right) r$$
$$+\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{IV}) \frac{dR}{dt} = 0.$$

Je multiplie en second lieu la même équation ($M2$) par $cos.(\mu^{II} - \mu^{I}) t$ j'ai:

$$\frac{d^2 x^{II}}{dt^2} cos.(\mu^{II} - \mu^{I}) t + M^{II}{}_2 x^{II} cos.(\mu^{II} - \mu^{I}) t$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{I} \overset{\circ}{\Psi} 1 (a^{II}, a^{I}) x^{I} \left(1 + cos.2 (\mu^{II} - \mu^{I}) t \right)$$
$$+\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{I} \overset{\circ}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{I}) \frac{dx^{I}}{dt} sin.2(\mu^{II} - \mu^{I}) t.$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Psi} 1 (a^{II}, a^{III}) x^{III} \left(cos.(\mu^{III} - \mu^{I}) t \right.$$
$$\left. + cos.(\mu^{III} - 2\mu^{II} + \mu^{I}) t \right)$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{III}) \frac{dx^{III}}{dt} \left(sin.(\mu^{III} - \mu^{I}) t \right.$$
$$\left. + sin.(\mu^{III} - 2\mu^{II} + \mu^{I}) t \right)$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{IV}) x^{IV} \left(sin.(\mu^{IV} - \mu^{I}) t \right.$$
$$\left. + cos.(\mu^{IV} - 2\mu^{II} + \mu^{I}) t \right)$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{IV}) \frac{dx^{IV}}{dt} \left(sin.(\mu^{IV} - \mu^{I}) t \right.$$
$$\left. + sin.(\mu^{IV} - 2\mu^{II} + \mu^{I}) t \right) = 0.$$

équation que je réduis, par la raison que j'ai dite tantôt, à celle-ci:

$$\frac{d^2 x^{II}}{dt} cos.(\mu^{II} - \mu^{I}) t + M^{II}{}_2 x^{II} cos.(\mu^{II} - \mu^{I}) t$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{I} \overset{\circ}{\Psi} 1 (a^{II}, a^{I}) x^{I}$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Psi} 1 (a^{II}, a^{III}) x^{III} cos.(\mu^{III} - \mu^{I}) t$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{III}) \frac{dx^{III}}{dt} sin.(\mu^{III} - \mu^{I}) t$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Psi} 1 (a^{II}, a^{IV}) x^{IV} cos.(\mu^{IV} - \mu^{I}) t$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{IV}) \frac{dx^{IV}}{dt} sin.(\mu^{IV} - \mu^{I}) t = 0.$$

laquelle me donne, après les substitutions :

$$(2.^{o})$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} + 2(\mu^{II} - \mu^{I})\frac{dp}{dt} + (M^{III_2} - (\mu^{II} - \mu^{I})^2)P$$
$$- \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{I} \overset{o}{\Psi} 1 (a^{II}, a^{I})\, x^{I}$$
$$- \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{III} (\overset{o}{\Psi} 1 (a^{II}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^{I}) \overset{o}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{III}))Q$$
$$- \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{III} \overset{o}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{III}) \frac{dq}{dt}$$
$$- \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} (\overset{o}{\Psi} 1 (a^{II}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^{I}) \overset{o}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{III}))R$$
$$- \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \overset{o}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{IV}) \frac{dr}{dt} = 0.$$

En troisième lieu, je multiplie l'équation $(M3)$ par $sin.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t$; j'aurai, après les réductions & les substitutions,

$$(3.^{o})$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} - 2(\mu^{III} - \mu^{I})\frac{dQ}{dt} + (M^{III_2} - (\mu^{III} - \mu^{I})^2)q$$
$$+ \tfrac{n}{2} f^{III} \chi^{I} \overset{o}{\Pi} 1 (a^{III}, a^{I}) \frac{dx^{I}}{dt}$$
$$- \tfrac{n}{2} f^{III} \chi^{II} (\overset{o}{\Psi} 1 (a^{III}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^{I}) \overset{o}{\Pi} 1 (a^{III}, a^{II}))p$$
$$+ \tfrac{n}{2} f^{III} \chi^{II} \overset{o}{\Pi} 1 (a^{III}, a^{II}) \frac{dP}{dt}$$
$$- \tfrac{n}{2} f^{III} \chi^{IV} (\overset{o}{\Psi} 1 (a^{III}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^{I}) \overset{o}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{IV}))r$$
$$+ \tfrac{n}{2} f^{III} \chi^{IV} \overset{o}{\Pi} 1 (a^{III}, a^{IV}) \frac{dR}{dt} = 0.$$

En quatrième lieu, je multiplie la même équation par $cos.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t$, & je trouve

$$(4.^{o})$$

$$\frac{dQ}{dt^2} + 2(\mu^{III} - \mu^{I})\frac{dq}{dt} + (M^{III_2} - (\mu^{III} - \mu^{I})^2)Q$$
$$- \tfrac{n}{2} f^{III} \chi^{I} \overset{o}{\Psi} 1 (a^{III}, a^{I})\, x^{I}$$

$$-\tfrac{n}{2} f^{III} \chi^{II} \left(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{III}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{III}, a^{II}) \right) P$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{III} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{III}, a^{II}) \frac{dp}{dt}$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{III} \chi^{IV} \left(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{III}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{III}, a^{IV}) \right) R$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{III} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{III}, a^{IV}) \frac{dr}{dt} = 0.$$

En cinquième lieu, je multiplie l'équation ($M4$) par $\sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t$, j'ai

($5.^{o}$)

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - 2(\mu^{IV} - \mu^{I}) \frac{dR}{dt} + \left(M^{IV_2} - (\mu^{IV} - \mu^{I})^2 \right) r$$
$$+\tfrac{n}{2} f^{IV} \chi^{I} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{IV}, a^{I}) \frac{dx^{I}}{dt}$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{IV} \chi^{II} \left(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{IV}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{IV}, a^{II}) \right) p$$
$$+\tfrac{n}{2} f^{IV} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{IV}, a^{II}) \frac{dP}{dt}$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{IV} \chi^{III} \left(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{IV}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{IV}, a^{III}) \right) q$$
$$+\tfrac{n}{2} f^{IV} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{IV}, a^{III}) \frac{dQ}{dt} = 0.$$

En sixième & dernier lieu, je multiplie la même équation par $\cos.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t$, & je trouve

($6.^{o}$)

$$\frac{d^2 R}{dt} + 2(\mu^{IV} - \mu^{I}) \frac{dr}{dt} + \left(M^{IV_2} - (\mu^{IV} - \mu^{I})^2 \right) R$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{IV} \chi^{I} \overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{IV}, a^{I})\, x^{I}$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{IV} \chi^{II} \left(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{IV}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{IV}, a^{II}) \right) P$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{IV} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{IV}, a^{II}) \frac{dp}{dt}$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{IV} \chi^{III} \left(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{IV}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{IV}, a^{III}) \right) Q$$
$$-\tfrac{n}{2} f^{IV} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{IV}, a^{III}) \frac{dq}{dt} = 0.$$

Voila, comme l'on voit, six équations différentielles de la même nature que l'équation de l'article XCII, & qui étant combinées avec cette dernière équation, suffiront pour déterminer les sept variables x^{I}, P, p, Q, q, R, r.

XCIV.

Pour cet effet, je multiplie l'équation de l'article XCII par $e^{V^{\text{I}}t}dt$, l'équation (1.°) de l'article précédent par $\alpha^{\text{I}}e^{V^{\text{I}}t}dt$, l'équation (2.°) par $A^{\text{I}}e^{V^{\text{I}}t}dt$, l'équation (3.°) par $\beta^{\text{I}}e^{V^{\text{I}}t}dt$, l'équation (4.°) par $B^{\text{I}}e^{V^{\text{I}}t}dt$, l'équation (5.°) par $\gamma^{\text{I}}e^{V^{\text{I}}t}dt$, l'équation (6.°) par $C^{\text{I}}e^{V^{\text{I}}t}dt$ (α^{I}, β^{I}, γ^{I}, A^{I}, B^{I}, C^{I} & V^{I} sont des constantes indéterminées) & après en avoir fait une somme, j'en prends l'intégrale, j'ai

$$\int\left(\frac{d^2x^{\text{I}}}{dt^2}+\alpha^{\text{I}}\frac{d^2p}{dt^2}+A^{\text{I}}\frac{d^2P}{dt^2}+\beta^{\text{I}}\frac{d^2q}{dt^2}+B^{\text{I}}\frac{d^2Q}{dt^2}+\gamma^{\text{I}}\frac{d^2R}{dt^2}+C^{\text{I}}\frac{d^2r}{dt^2}\right)e^{V^{\text{I}}t}dt$$

$$+\int\left\{\tfrac{n}{2}\left(\alpha^{\text{I}}f^{\text{II}}\chi^{\text{I}}\overset{\circ}{\Pi}{}^{\text{I}}(a^{\text{II}},a^{\text{I}})+\beta^{\text{I}}f^{\text{III}}\chi^{\text{I}}\overset{\circ}{\Pi}{}^{\text{I}}(a^{\text{III}},a^{\text{I}})+\gamma^{\text{I}}f^{\text{IV}}\chi^{\text{I}}\overset{\circ}{\Pi}{}^{\text{I}}(a^{\text{IV}},a^{\text{I}})\right)\frac{dx^{\text{I}}}{dt}\right.$$

$$+\left(-nf^{\text{I}}\chi^{\text{II}}\overset{\circ}{\Pi}{}^{\text{I}}(a^{\text{I}},a^{\text{II}})+2A^{\text{I}}(\mu^{\text{II}}-\mu^{\text{I}})\right.$$
$$\left.-\tfrac{n}{2}B^{\text{I}}f^{\text{III}}\chi^{\text{II}}\overset{\circ}{\Pi}{}^{\text{I}}(a^{\text{III}},a^{\text{II}})-\tfrac{n}{2}C^{\text{I}}f^{\text{IV}}\chi^{\text{II}}\overset{\circ}{\Pi}{}^{\text{I}}(a^{\text{IV}},a^{\text{II}})\right)\frac{dp}{dt}$$

$$+\left(-2\alpha(\mu^{\text{II}}-\mu^{\text{I}})+\tfrac{n}{2}\beta^{\text{I}}f^{\text{III}}\chi^{\text{II}}\overset{\circ}{\Pi}{}^{\text{I}}(a^{\text{III}},a^{\text{II}})\right.$$
$$\left.+\tfrac{n}{2}2^{\text{I}}f^{\text{IV}}\chi^{\text{II}}\overset{\circ}{\Pi}{}^{\text{I}}(a^{\text{IV}},a^{\text{II}})\right)\frac{dP}{dt}$$

$$+\left(-nf^{\text{I}}\chi^{\text{III}}\overset{\circ}{\Pi}{}^{\text{I}}(a^{\text{I}},a^{\text{III}})-\tfrac{n}{2}A^{\text{I}}f^{\text{II}}\chi^{\text{III}}\overset{\circ}{\Pi}{}^{\text{I}}(a^{\text{II}},a^{\text{III}})\right.$$
$$\left.2B^{\text{I}}(\mu^{\text{III}}-\mu^{\text{I}})-\tfrac{n}{2}C^{\text{I}}f^{\text{IV}}\chi^{\text{III}}\overset{\circ}{\Pi}{}^{\text{I}}(a^{\text{IV}},a^{\text{III}})\right)\frac{dq}{dt}$$

$$+\left(\tfrac{n}{2}\alpha^{I} f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{II}, a^{III}) - 2\beta^{I}(\mu^{III} - \mu^{I})\right.$$
$$\left. + \tfrac{n}{2}\gamma^{I} f^{IV} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{IV}, a^{III})\right) \frac{dQ}{dt}$$

$$+\left(-nf^{I}\chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{I}, a^{IV}) - \tfrac{n}{2} A^{I} f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{II}, a^{IV})\right.$$
$$\left. - \tfrac{n}{2} B^{I} f^{III} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{III}, a^{IV}) + 2C^{I}(\mu^{IV} - \mu^{I})\right) \frac{dr}{dt}$$

$$+\left(\tfrac{n}{2}\alpha^{I} f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{II}, a^{IV}) + \tfrac{n}{2}\beta^{I} f^{III} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{III}, a^{IV})\right.$$
$$\left. + 2\gamma^{I}(\mu^{IV} - \mu^{I})\right) \frac{dR}{dt} \Big\} e^{Vt} dt$$

$$+\int \Big\{ \Big(M^{I_2} - \tfrac{n}{2} A^{I} f^{II} \chi^{I} \overset{\circ}{\Psi} I\,(a^{II}, a^{I}) - \tfrac{n}{2} B^{I} f^{III} \chi^{I} \overset{\circ}{\Psi} I\,(a^{III}, a^{I})$$
$$- \tfrac{n}{2} C^{I} f^{IV} \chi^{I} \overset{\circ}{\Psi} I\,(a^{IV}, a^{I})\Big) x^{I}$$

$$+\Big(\alpha^{I}\big(M^{II_2} - (\mu^{II} - \mu^{I})^2\big) - \tfrac{n}{2}\beta^{I} f^{III} \chi^{II}\Big(\overset{\circ}{\Psi} I\,(a^{III}, a^{II})$$
$$- (\mu^{II} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{III}, a^{II})\Big) - \tfrac{n}{2}\gamma^{I} f^{IV} \chi^{II} \overset{\circ}{\Psi} I\,(a^{IV}, a^{II})$$
$$- (\mu^{II} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{IV}, a^{II})\Big)\Big) p$$

$$+\Big(-nf^{I}\chi^{II}\Big(\overset{\circ}{\Psi} I\,(a^{I}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{I}, a^{II})\Big)$$
$$+ A^{I} M^{II_2} - (\mu^{II} - \mu^{I})^2\big) - \tfrac{n}{2} B^{I} f^{III} \chi^{II}\Big(\overset{\circ}{\Psi} I\,(a^{III}, a^{II})$$
$$- (\mu^{II} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{III}, a^{II})\Big) - \tfrac{n}{2} C^{I} f^{IV} \chi^{II}\Big(\overset{\circ}{\Psi} I\,(a^{IV}, a^{II})$$
$$- (\mu^{II} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{IV}, a^{II})\Big)\Big) P$$

$$+\Big(-\tfrac{n}{2}\alpha f^{II} \chi^{III}\Big(\overset{\circ}{\Psi} I\,(a^{II}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{II}, a^{III})\Big)$$
$$+\beta^{I}\big(M^{III_2} - (\mu^{III} - \mu^{I})^2\big) - \tfrac{n}{2}\gamma^{I} f^{IV} \chi^{III}\Big(\overset{\circ}{\Psi} I\,(a^{IV}, a^{III})$$
$$- (\mu^{IV} - \mu^{II}) \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{IV}, a^{III})\Big)\Big) q$$

$$+\Big(-nf^{I}\chi^{III} \overset{\circ}{\Psi} I\,(a^{I}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{I}, a^{III})\Big)$$
$$- \tfrac{n}{2} A^{I} f^{II} \chi^{III}\Big(\overset{\circ}{\Psi} I\,(a^{II}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{II}, a^{III})\Big)$$
$$+ B^{I}\big(M^{III_2} - (\mu^{III} - \mu^{I})^2\big) - \tfrac{n}{2} C^{I} f^{IV} \chi^{III} \overset{\circ}{\Psi} I\,(a^{IV}, a^{III})$$
$$- (\mu^{III} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{IV}, a^{III})\Big)\Big) Q$$

$$+\Big(-\tfrac{n}{2}\alpha^{I} f^{II} \chi^{IV}\Big(\overset{\circ}{\Psi} I\,(a^{II}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{II}, a^{IV})\Big)$$
$$- \tfrac{n}{2}\beta^{I} f^{III} \chi^{IV}\Big(\overset{\circ}{\Psi} I\,(a^{III}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I\,(a^{III}, a^{IV})\Big)$$
$$+\gamma^{I}\big(M^{IV_2} - (\mu^{IV} - \mu^{I})^2\big)\Big) r$$

$$+\Big(-nf^{I}\chi^{IV}\big(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{I},a^{IV})-(\mu^{IV}-\mu^{I})\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I},a^{IV})\big)$$
$$-\tfrac{n}{2}A^{I}f^{II}\chi^{IV}\big(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{II},a^{IV})-(\mu^{IV}-\mu^{I})\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{II},a^{IV})\big)$$
$$-\tfrac{n}{2}B^{I}f^{III}\chi^{IV}\big(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{III},a^{IV})-(\mu^{IV}-\mu^{I})\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{III},a^{IV})$$
$$+C^{I}\big(M^{IV_2}-(\mu^{IV}-\mu^{I})^{2}\big)\Big)R\int e^{V^{I}t}dt$$
$$=\textit{constante.}$$

XCV.

Cela fait, je transforme les expreſſions intégrales $\int\frac{d^{2}x^{I}}{dt^{2}}e^{V^{I}t}dt$, $\int\frac{d^{2}p}{dt^{2}}e^{V^{I}t}dt$, &c. en leurs équivalentes $\Big(\frac{dx^{I}}{dt}-V^{I}x^{I}\Big)e^{V^{I}t}+V^{I_2}\int x^{I}e^{V^{I}t}dt$, $\Big(\frac{dp}{dt}-V^{I}p\Big)e^{V^{I}t}$ $+V^{I_2}\int pe^{V^{I}t}dt$, &c. De même je change les expreſſions $\int\frac{dx^{I}}{dt}e^{V^{I}t}dt$, $\int\frac{dp}{dt}e^{V^{I}t}dt$, &c. en celles-ci: $x^{I}e^{V^{I}t}$ $-V^{I}\int x^{I}e^{V^{I}t}dt$, $pe^{V^{I}t}-V^{I}\int pe^{V^{I}t}dt$, &c.

Par ce moyen, l'équation ſe trouve compoſée de deux parties; l'une finie, & l'autre indéfinie, laquelle renferme les quantités intégrales $\int xe^{V^{I}t}dt$, $\int pe^{V^{I}t}dt$, $\int Pe^{V^{I}t}dt$, $\int qe^{V^{I}t}dt$, $\int Qe^{V^{I}t}dt$, $\int re^{V^{I}t}dt$, $\int Re^{V^{I}t}dt$.

Je fais les coefficiens de ces quantités chacun égal à zéro, ce qui me donne ſept équations, entre les ſept inconnues α^{I}, β^{I}, γ^{I}, A^{I}, B^{I}, & C^{I}; ſavoir

(1.°)

$$V^{I_2}-\tfrac{n}{2}\big(\alpha^{I}f^{II}\chi^{I}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{II},a^{I})+\beta^{I}f^{III}\chi^{I}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{III},a^{I})$$
$$+\gamma f^{IV}\chi^{I}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{IV},a^{I})V^{I}+M^{I_2}-\tfrac{n}{2}A^{I}f^{II}\chi^{I}\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{II},a^{I})$$
$$-\tfrac{n}{2}B^{I}f^{III}\chi^{I}\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{III},a^{I})-\tfrac{n}{2}C^{I}f^{IV}\chi^{I}\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{IV},a^{I})=0.$$

(2.°)

$$\alpha^{I} V^{I_2} + \left(n f^{I} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{I}, a^{II}) - 2A^{I} (\mu^{II} - \mu^{I}) + \tfrac{n}{2} B^{I} f^{III} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{III}, a^{II}) + \tfrac{n}{2} C^{I} f^{IV} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{II}) \right) V^{I} + \alpha^{I} \left(M^{III_2} - (\mu^{II} - \mu^{I})^2 \right) - \tfrac{n}{2} \beta^{I} f^{III} \chi^{II} \left(\overset{\circ}{\Psi} I (a^{III}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{III}, a^{II}) \right) - \tfrac{n}{2} \gamma^{I} f^{IV} \chi^{II} \left(\overset{\circ}{\Psi} I (a^{IV}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{II}) \right) = 0.$$

(3.°)

$$A^{I} V^{I_2} - \left(- 2\alpha^{I} (\mu^{II} - \mu^{I}) + \tfrac{n}{2} \beta^{I} f^{III} \chi^{II} \left(\overset{\circ}{\Pi} I (a^{III}, a^{II}) + \tfrac{n}{2} \gamma^{I} f^{IV} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{II}) \right) V^{I} - n f^{I} \chi^{II} \left(\overset{\circ}{\Psi} I (a^{I}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{I}, a^{II}) \right) + A^{I} \left(M^{III_2} - (\mu^{II} - \mu^{I})^2 \right) - \tfrac{n}{2} \beta^{I} f^{III} \chi^{II} \left(\overset{\circ}{\Psi} I (a^{III}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{III}, a^{II}) \right) - \tfrac{n}{2} C^{I} f^{IV} \chi^{II} \left(\overset{\circ}{\Psi} I (a^{IV}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{II}) \right) = 0.$$

(4.°)

$$B^{I} V^{I_2} + \left(n f^{I} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{I}, a^{III}) + \tfrac{n}{2} A^{I} f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{II}, a^{III}) - 2B^{I} (\mu^{III} - \mu^{I}) + \tfrac{n}{2} C^{I} f^{IV} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{III}) \right) V^{I} - \tfrac{n}{2} \alpha f^{II} \chi^{III} \left(\overset{\circ}{\Psi} I (a^{II}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{II}, a^{III}) \right) + \beta^{I} \left(M^{III_2} - (\mu^{III} - \mu^{I})^2 \right) - \tfrac{n}{2} \gamma^{I} f^{IV} \chi^{III} \left(\overset{\circ}{\Psi} I (a^{IV}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{III}) \right) = 0.$$

(5.°)

$$B^{I} V^{I_2} - \left(\tfrac{n}{2} \alpha^{I} f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{II}, a^{III}) - 2\beta^{I} (\mu^{III} - \mu^{I}) + \tfrac{n}{2} \gamma^{I} f^{IV} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{III}) \right) V^{I} - n f^{I} \chi^{III} \left(\overset{\circ}{\Psi} I (a^{I}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{I}, a^{III}) - \tfrac{n}{2} A^{I} f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Psi} I (a^{II}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{II}, a^{III}) + B^{I} \left(M^{III_2} - (\mu^{III} - \mu^{I})^2 \right) - \tfrac{n}{2} C^{I} f^{IV} \chi^{III} \left(\overset{\circ}{\Psi} I (a^{IV}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{III}) \right) = 0.$$

(6.°)

$$\gamma^{I} V^{I_2} + \left(n f^{I} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{I}, a^{IV}) + \tfrac{n}{2} A^{I} f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{II}, a^{IV}) \right.$$
$$+ \tfrac{n}{2} B^{I} f^{III} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{III}, a^{IV}) - 2 C^{I} (\mu^{IV} - \mu^{I}) \Big) V^{I}$$
$$- \tfrac{n}{2} \alpha^{I} f^{II} \chi^{IV} \left(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I} (a^{II}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{II}, a^{IV}) \right.$$
$$- \tfrac{n}{2} \beta^{I} f^{III} \chi^{IV} \left(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I} (a^{III}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{III}, a^{IV}) \right)$$
$$+ \gamma^{I} \left(M^{IV_2} - (\mu^{IV} - \mu^{I})^2 \right) = 0.$$

(7.°)

$$C^{I} V^{I_2} - \left(\tfrac{n}{2} \alpha^{I} f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{II}, a^{IV}) + \tfrac{n}{2} \beta^{I} f^{III} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{III}, a^{IV}) \right.$$
$$- 2 \gamma^{I} (\mu^{IV} - \mu^{I}) \Big) V^{I} - \tfrac{n}{2} f^{I} \chi^{IV} \left(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I} (a^{I}, a^{IV}) \right.$$
$$- (\mu^{IV} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{I}, a^{IV}) - \tfrac{n}{2} A^{I} f^{II} \chi^{IV} \left(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I} (a^{II}, a^{IV}) \right.$$
$$- (\mu^{IV} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{II}, a^{IV}) \Big) - \tfrac{n}{2} B^{I} f^{III} \chi^{IV} \left(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I} (a^{III}, a^{IV}) \right.$$
$$- (\mu^{IV} - \mu^{I}) \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{III}, a^{IV}) \Big) + C^{I} \left(M^{IV_2} - (\mu^{IV} - \mu^{I})^2 \right)$$
$$= 0.$$

Enſuite j'ai l'équation intégrale,

$$\left(\frac{dx^{I}}{dt} + \alpha^{I} \frac{dp}{dt} + A^{I} \frac{dP}{dt} + \beta^{I} \frac{dq}{dt} + B^{I} \frac{dQ}{dt} + \gamma^{I} \frac{dr}{dt} + C^{I} \frac{dR}{dt} \right.$$
$$+ \left(- V^{I} + \tfrac{n}{2} \alpha^{I} f^{II} \chi^{I} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{II}, a^{I}) + \tfrac{n}{2} \beta^{I} f^{III} \chi^{I} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{III}, a^{I}) \right.$$
$$+ \tfrac{n}{2} \gamma^{I} f^{IV} \chi^{I} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{IV}, a^{I}) \Big) x^{I}$$
$$+ \left(- \alpha^{I} V^{I} - n f^{I} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{I}, a^{II}) + 2 A^{I} (\mu^{II} - \mu^{I}) \right.$$
$$- \tfrac{n}{2} B^{I} f^{III} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{III}, a^{II}) - \tfrac{n}{2} C^{I} f^{IV} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{IV}, a^{II}) \Big) p$$
$$+ \left(- A^{I} V^{I} - 2 \alpha (\mu^{II} - \mu^{I}) + \tfrac{n}{2} \beta^{I} f^{III} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{III}, a^{II}) \right.$$
$$+ \tfrac{n}{2} \gamma^{I} f^{IV} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{IV}, a^{II}) \Big) P$$
$$+ \left(- \beta^{I} V^{I} - n f^{I} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{I}, a^{III}) - \tfrac{n}{2} A^{I} f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{II}, a^{III}) \right.$$
$$2 B^{I} (\mu^{III} - \mu^{I}) - \tfrac{n}{2} C^{I} f^{IV} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{IV}, a^{III}) \Big) q$$
$$+ \left(- B^{I} V^{I} + \tfrac{n}{2} \alpha^{I} f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{II}, a^{III}) - 2 \beta^{I} (\mu^{III} - \mu^{I}) \right.$$
$$+ \tfrac{n}{2} \gamma^{I} f^{IV} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi}{}^{I} (a^{IV}, a^{III}) \Big) Q$$

$$+\Big(-\gamma^{I}V^{I}-nf^{I}\chi^{IV}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I},a^{IV})-\tfrac{n}{2}A^{I}f^{II}\chi^{IV}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I},a^{IV})$$
$$-\tfrac{n}{2}B^{I}f^{III}\chi^{IV}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{III},a^{IV})+2C^{I}(\mu^{IV}-\mu^{I})\Big)r$$
$$+\Big(-C^{I}V^{I}+\tfrac{n}{2}\alpha^{I}f^{II}\chi^{IV}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{II},a^{IV})$$
$$+\tfrac{n}{2}\beta^{I}f^{III}\chi^{IV}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{III},a^{IV})+2\gamma^{I}(\mu^{IV}-\mu^{I})\Big)R\Big)e^{V^{I}t}$$
$$=\textit{conſtante}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(P)$$

XCVI.

Qu'on multiplie l'équation (2.°) par $\pm\sqrt{-1}$, & qu'on y ajoute l'équation (3.°), on aura

$$\Big(M^{II2}-(\mu^{II}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})^{2}\Big)(A^{I}\pm\alpha^{I}\sqrt{-1})$$
$$-nf^{I}\chi^{II}\Big(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{I},a^{II})-(\mu^{II}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I},a^{II})\Big)$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{III}\chi^{II}\Big(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{III},a^{II})-(\mu^{II}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{III},a^{II})\Big)$$
$$(B^{I}\pm\beta^{I}\sqrt{-1})$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{IV}\chi^{II}\Big(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{IV},a^{II})-(\mu^{II}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})$$
$$\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{IV},a^{II})\Big)(C^{I}\pm\gamma^{I}\sqrt{-1})$$
$$=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(Q)$$

De même, en multipliant l'équation (4.°) par $\pm\sqrt{-1}$, & y ajoutant l'équation (5.°), on aura

$$\Big(M^{III2}-(\mu^{III}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})^{2}\Big)(B^{I}\pm\beta^{I}\sqrt{-1})$$
$$-nf^{I}\chi^{III}\Big(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{I},a^{III})-(\mu^{III}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})\Big)\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I},a^{III})$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{III}\Big(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{II},a^{III})-(\mu^{III}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})$$
$$\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{II},a^{III})\Big)(A^{I}\pm\alpha^{I}\sqrt{-1})$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{IV}\chi^{III}\Big(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{IV},a^{III})-(\mu^{III}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})$$
$$\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{IV},a^{III})\Big)(C^{I}\pm\gamma^{I}\sqrt{-1})$$
$$=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(R)$$

Enfin multipliant l'équation (6.°) par $\pm\sqrt{-1}$, & y ajoutant l'équation (7.°), on aura

$$\Big(M^{IV2}-(\mu^{IV}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})^{2}\Big)(C^{I}\pm\gamma^{I}\sqrt{-1})$$

$$-nf^{I}\chi^{IV}\left(\overset{0}{\Psi}1(a^{I},a^{IV})-(\mu^{IV}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})\overset{0}{\Pi}1(a^{I},a^{IV})\right)$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{IV}\left(\overset{0}{\Psi}1(a^{II},a^{IV})-(\mu^{IV}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})\right.$$
$$\left.\overset{0}{\Pi}1(a^{II},a^{IV})\right)(A^{I}\pm\alpha^{I}\sqrt{-1})$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{III}\chi^{IV}\left(\overset{0}{\Psi}1(a^{III},a^{IV})-(\mu^{IV}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})\right.$$
$$\left.\overset{0}{\Pi}1(a^{III},a^{IV})\right)(B^{I}\pm\beta^{I}\sqrt{-1})$$
$$=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (S)$$

Chacune de ces trois équations en vaut deux, comme l'on voit, à cause de l'ambiguité du ſigne de $\sqrt{-1}$.

Maintenant il eſt viſible par l'équation (1.°), que ſi n étoit $=0$: on auroit: $V^{I2}+M^{I2}=0$, c'eſt-à-dire (à cauſe de $M^{I2}=\mu^{I2}(1-n\mathcal{C}^{I})$, art. LXXIX) $V^{I2}+\mu^{I2}=0$, & $V^{I2}=-\mu^{I2}$.

Suppoſons donc en général .... $V^{I2}=-\mu^{I2}(1-nv^{I})$; & l'équation dont nous parlons ſe changera en celle-ci:

$$\mu^{I2}(v^{I}-\mathcal{C}^{I})-\tfrac{1}{2}f^{II}\chi^{I}\left(\overset{0}{\Psi}1(a^{II},a^{I})A^{I}+\overset{0}{\Pi}1(a^{II},a^{I})\alpha^{I}V^{I}\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}f^{III}\chi^{I}\left(\overset{0}{\Psi}1(a^{III},a^{I})B^{I}+\overset{0}{\Pi}1(a^{III},a^{I})\beta^{I}V^{I}\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}f^{IV}\chi^{I}\left(\overset{0}{\Psi}1(a^{IV},a^{I})C^{I}+\overset{0}{\Pi}1(a^{IV},a^{I})b^{I}V^{I}\right)$$
$$=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (T)$$

XCVII.

L'équation $V^{I2}=-\mu^{I2}(1-nv^{I})$ donne $V^{I}=\mu^{I}(1-\tfrac{n}{2}v^{I})\sqrt{-1}$; donc $V^{I}\sqrt{-1}=-\mu^{I}(1-\tfrac{1}{2}nv^{I})$; donc ſubſtituant cette valeur dans l'équation (Q), auſſi bien que celle de M^{II2} qui eſt $\mu^{II2}(1-n\mathcal{C}^{II})$ (art. XXIX), on aura:

$$\left(\mu^{II2}(1-n\mathcal{C}^{II})-\left(\mu^{II}-\mu^{I}\mp\mu^{I}(1-\tfrac{1}{2}nv^{I})\right)^{2}\right)(A^{I}\pm\alpha^{I}\sqrt{-1})$$
$$-nf^{I}\chi^{II}\left(\overset{0}{\Psi}1(a^{I},a^{II})-\left(\mu^{II}-\mu^{I}\mp\mu^{I}(1-\tfrac{1}{2}nv^{I})\right)\overset{0}{\Pi}1(a^{I},a^{II})\right)$$
$$-$$

$$-\tfrac{1}{2}nf^{III}\chi^{II}\Big(\overset{\circ}{\Psi}1(a^{III},a^{II})-(\mu^{II}-\mu^{I}\mp\mu^{I}(1-\tfrac{1}{2}nv^{I}))$$
$$\overset{\circ}{\Pi}1(a^{III},a^{II})\Big)(B^{I}\pm\beta^{I}\sqrt{-1})$$

$$-\tfrac{1}{2}nf^{IV}\chi^{II}\Big(\overset{\circ}{\Psi}1(a^{IV},a^{II})-(\mu^{II}-\mu^{I}\mp\mu^{I}(1-\tfrac{1}{2}nv^{I}))$$
$$\overset{\circ}{\Pi}1(a^{IV},a^{II})\Big)(C^{I}\pm\gamma^{I}\sqrt{-1})=0.$$

Donc 1.° ſi on prend le ſigne ſupérieur, & qu'on néglige les termes affectés de n, on aura $(\mu^{II2}-(\mu^{II}-2\mu^{I})^{2})$ $(A^{I}+\alpha^{I}\sqrt{-1})=0$; ce qui donne $A^{I}+\alpha^{I}\sqrt{-1}=0$, & $\alpha^{I}\sqrt{-1}=-A^{I}$.

2.° Si on prend le ſigne inférieur, & qu'après avoir ôté ce qui ſe détruit, on diviſe toute l'équation par n, on aura, en négligeant toujours les termes affectés de n,

$$\mu^{II2}\Big(\frac{\mu^{I}}{\mu^{II}}v^{I}-\mathfrak{G}^{II}\Big)(A^{I}-\alpha^{I}\sqrt{-1})-f^{I}\chi^{II}\Big(\overset{\circ}{\Psi}1(a^{I},a^{II})$$
$$-\mu^{II}\overset{\circ}{\Pi}1(a^{I},a^{II})\Big)$$
$$-\tfrac{1}{2}f^{III}\chi^{II}\Big(\overset{\circ}{\Psi}1(a^{III},a^{II})-\mu^{II}\overset{\circ}{\Pi}1(a^{III},a^{II})\Big)(B^{I}-\beta^{I}\sqrt{-1})$$
$$-\tfrac{1}{2}f^{IV}\chi^{II}\Big(\overset{\circ}{\Psi}1(a^{IV},a^{II})-\mu^{I}\overset{\circ}{\Pi}1(a^{IV},a^{II})\Big)(C^{I}-\gamma^{I}\sqrt{-1})$$
$$=0\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(V)$$

On tirera de même de l'équation (R)

$\beta^{I}\sqrt{-1}=-B^{I}$, &

$$\mu^{III2}\Big(\frac{\mu^{I}}{\mu^{III}}v^{I}-\mathfrak{G}^{III}\Big)(B^{I}-\beta^{I}\sqrt{-1})-f^{I}\chi^{III}\Big(\overset{\circ}{\Psi}1(a^{I},a^{III})$$
$$-\mu^{III}\overset{\circ}{\Pi}1(a^{I},a^{III})\Big)$$
$$-\tfrac{1}{2}f^{II}\chi^{III}\Big(\overset{\circ}{\Psi}1(a^{II},a^{III})-\mu^{III}\overset{\circ}{\Pi}1(a^{II},a^{III})\Big)(A^{I}-\alpha^{I}\sqrt{-1})$$
$$-\tfrac{1}{2}f^{IV}\chi^{III}\Big(\overset{\circ}{\Psi}1(a^{IV},a^{III})-\mu^{III}\overset{\circ}{\Pi}1(a^{IV},a^{III})\Big)(C^{I}-\gamma^{I}\sqrt{-1})$$
$$=0\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(U)$$

Et de l'équation (S)

$\gamma^{I}\sqrt{-1}=-C^{I}$, &

$$\mu^{IV2}\left(\frac{\rho}{\mu^{IV}}v^{I}-\mathfrak{C}^{IV}\right)(C^{I}-\gamma^{I}\sqrt{-1})-f^{I}\chi^{IV}\left(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{I},a^{IV})\right.$$
$$\left.-\mu^{IV}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I},a^{IV})\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}f^{II}\chi^{IV}\left(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{II},a^{IV})-\mu^{IV}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{II},a^{IV})\right)(A^{I}-\alpha^{I}\sqrt{-1})$$
$$-\tfrac{1}{2}f^{III}\chi^{IV}\left(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{III},a^{IV})-\mu^{IV}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{III},a^{IV})\right)(B^{I}-\beta^{I}\sqrt{-1})$$
$$=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathbb{W})$$

XCVIII.

Soit fait pour plus de ſimplicité,

$$(1,2)=\left(\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{I},a^{II})-\mu^{II}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I},a^{II})\right.$$
$$(1,3)=\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{I},a^{III})-\mu^{III}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{I},a^{III})$$
$$(2,1)=\overset{\circ}{\Psi}{}^{I}(a^{II},a^{I})-\mu^{I}\overset{\circ}{\Pi}{}^{I}(a^{II},a^{I}),\text{ \& ainſi des autres.}$$

Soit de plus . . . . . $\rho=\mu^{I}v^{I}$

On aura, en faiſant ces ſubſtitutions dans les équations (V), (U), (W), & mettant à la place de $\alpha^{I}\sqrt{-1}$, $\beta^{I}\sqrt{-1}$, $\gamma^{I}\sqrt{-1}$, leurs valeurs $-A^{I}$, $-B^{I}$, $-C^{I}$, les équations ſuivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&2\mu^{II2}\left(\frac{\rho}{\mu^{III}}-\mathfrak{C}^{II}\right)A^{I}-f^{I}\chi^{II}(1,2)-f^{III}\chi^{II}(3,2)B^{I}-f^{IV}\chi^{II}(4,2)C^{I}=0\\
&2\mu^{III2}\left(\frac{\rho}{\mu^{III}}-\mathfrak{C}^{III}\right)B^{I}-f^{I}\chi^{III}(1,3)-f^{II}\chi^{III}(2,3)A^{I}-f^{IV}\chi^{III}(4,3)C^{I}=0\\
&2\mu^{IV2}\left(\frac{\rho}{\mu^{IV}}-\mathfrak{C}^{IV}\right)C^{I}-f^{I}\chi^{IV}(1,4)-f^{II}\chi^{IV}(2,4)A^{I}-f^{III}\chi^{IV}(3,4)B^{I}=0
\end{aligned}\right\}(X)$$

D'où l'on tirera facilement les valeurs de A^{I}, B^{I}, C^{I}.

Or, en négligeant les termes affectés de n, on a $V^{I}=\mu^{I}\sqrt{-1}$ (art. préc.); donc puiſque $\alpha^{I}=-\frac{A^{I}}{\sqrt{-1}}$ on aura $\alpha^{I}V^{I}=-\mu^{I}A^{I}$; & de même $\beta^{I}V^{I}=-\mu^{I}B^{I}$, $\gamma^{I}V^{I}=-\mu^{I}C^{I}$. Donc l'équation (T) de l'article XCVI deviendra, après toutes les ſubſtitutions,

$$2\mu^{I2}\left(\frac{\rho}{\mu^{I}}-\mathcal{C}^{I}\right)-f^{II}\chi^{I}(2,1)A^{I}-f^{III}\chi^{I}(3,1)B^{I}$$
$$-f^{IV}\chi^{I}(4,1)C^{I}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(Y);$$

c'eſt l'équation qui donnera la valeur de ρ.

XCIX.

Soit, pour abréger, $K^{I}=2\frac{\frac{\rho}{\mu^{I}}-\mathcal{C}^{I}}{\chi^{I}}$, $K^{II}=2\frac{\frac{\rho}{\mu^{II}}-\mathcal{C}^{II}}{\chi^{II}}$ & ainſi des autres; les équations (X) donneront, après avoir mis au lieu de f^{I}, f^{II}, &c. leurs valeurs approchées μ^{I2}, μ^{II2}, &c. (art. XLV).

$$A^{I}=\big((1,2)K^{III}K^{IV}-(1,2)(3,4)(4,3)+(1,3)(3,2)K^{IV}$$
$$+(1,3)(3,4)(4,2)+(1,4)(3,2)(4,3)$$
$$+(1,4)(4,2)K^{III}\big)\frac{\mu^{I2}}{\mu^{II2}}$$

$$B^{I}=\big((1,3)K^{II}K^{IV}+(1,4)(4,3)K^{II}+(1,2)(2,3)K^{IV}$$
$$+(1,4)(2,3)(4,2)+(1,2)(2,4)(4,3)$$
$$-(1,3)(2,4)(4,2)\big)\frac{\mu^{I2}}{\mu^{III2}}$$

$$C^{I}=\big((1,4)K^{II}K^{III}+(1,3)(3,4)K^{II}-(1,4)(2,3)(3,2)$$
$$+(1,2)(2,3)(3,4)+(1,3)(2,4)(3,2)$$
$$+(1,2)(2,4)K^{III}\big)\frac{\mu^{I2}}{\mu^{IV2}}$$

Chacune de ces quantités étant diviſée par

$$K^{II}K^{III}K^{IV}-(3,4)(4,3)K^{II}-(2,3)(3,2)K^{IV}$$
$$-(2,3)(3,4)(4,2)-(2,4)(3,2)(4,3)$$
$$-(2,4)(4,2)K^{III}$$

Ces valeurs étant enſuite ſubſtituées dans l'équation (Y), on aura, après les réductions:

$$K^{I}K^{II}K^{III}K^{IV}-(3,4)(4,3)K^{I}K^{II}-(2,4)(4,2)K^{I}K^{III}$$
$$-(2,3)(3,2)K^{I}K^{IV}$$

$$-(4,1)(1,4)K^{II}K^{III}-(3,1)(1,3)K^{II}K^{IV}$$
$$-(2,1)(1,2)K^{III}K^{IV}$$
$$-\big((2,3)(3,4)(4,2)+(2,4)(3,2)(4,3)\big)K^{I}$$
$$-\big((3,1)(1,4)(4,3)+(4,1)(1,3)(3,4)\big)K^{II}$$
$$-\big((2,1)(1,4)(4,2)+(4,1)(1,2)(2,4)\big)K^{III}$$
$$-\big((2,1)(1,3)(3,2)+(3,1)(1,2)(2,3)\big)K^{IV}$$
$$+(2,1)(1,2)(3,4)(4,3)-(2,1)(1,3)(3,4)(4,2)$$
$$-(2,1)(1,4)(3,2)(4,3)-(3,1)(1,4)(2,3)(4,2)$$
$$-(3,1)(1,2)(2,4)(4,3)+(3,1)(1,3)(2,4)(4,2)$$
$$+(4,1)(1,4)(2,3)(3,2)-(4,1)(1,2)(2,3)(3,4)$$
$$-(4,1)(1,3)(2,4)(3,2)=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (Z)$$

Équation qui, en remettant au lieu de K^{I}, K^{II}, leurs valeurs, & ordonnant les termes par rapport à ρ, montera au quatrième degré, & donnera par conſéquent quatre valeurs de ρ, que nous dénoterons par $\rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$, $\rho 4$.

C.

Les calculs que nous venons de faire dans ce paragraphe n'appartiennent proprement qu'au premier ſatellite; mais il eſt aiſé de les appliquer à chacun des trois autres, ſuivant les remarques faites ailleurs. En effet pour les appliquer, par exemple au ſecond ſatellite, il n'y aura qu'à marquer de deux traits toutes les lettres qui ne ſont marquées que d'un ſeul, & réciproquement ôter un trait à celles qui en ont deux, & ainſi de ſuite : ainſi dans l'équation (Z), il ne faudra qu'échanger entr'elles les lettres K^{I}, K^{II}, & les nombres 1, 2. Or on verra aiſément que cette permutation ne produira aucun changement dans l'équation; d'où il s'enſuit que les valeurs de ρ ſeront les mêmes pour le ſecond ſatellite que pour le premier. On en dira autat par rapport au troiſième & au quatrième, deſorte que l'équation (Z) ſervira pour tous

les quatre satellites, & c'est ce qui fait que cette équation monte au quatrième degré.

CI.

Reprenons maintenant l'équation (P) de l'article XCV, & substituons-y, au lieu de α^{I}, β^{I}, γ^{I}, leurs valeurs $A^{I}\sqrt{-1}$, $B^{I}\sqrt{-1}$, $C^{I}\sqrt{-1}$, (art. XCVII), & au lieu de V^{I} sa valeur $\mu^{I}(1-\frac{1}{2}nv^{I})\sqrt{-1}$, (art. XCVII), c'est-à-dire, à cause de $\mu^{I}v^{I}=\rho$ (art. XCVIII), $(\mu^{I}-\frac{n}{2}\rho)\sqrt{-1}$, on aura, en négligeant pour tout les termes affectés de n, excepté dans $e^{V^{I}t}$:

$$\left(\frac{dx^{I}}{dt}+A^{I}\left(\frac{dP}{dt}+\frac{dp}{dt}\sqrt{-1}\right)+B^{I}\left(\frac{dQ}{dt}+\frac{dq}{dt}\sqrt{-1}\right)\right.$$
$$+C^{I}\left(\frac{dR}{dt}+\frac{dr}{dt}\sqrt{-1}\right)-\mu^{I}x^{\prime I}\sqrt{-1}$$
$$+A^{I}(2\mu^{II}-\mu^{I})(p-P\sqrt{-1})+B^{I}(2\mu^{III}-\mu^{I})(q-Q\sqrt{-1})$$
$$\left.+C^{I}(2\mu^{IV}-\mu^{I})(r-R\sqrt{-1})\right)e^{(\mu^{I}-\frac{1}{2}n\rho)t\sqrt{-1}}=\text{constante.}$$

C'est-à-dire, en mettant au lieu de $e^{(\mu^{I}-\frac{1}{2}n\rho)t\sqrt{-1}}$ sa valeur $\cos.(\mu^{I}-\frac{1}{2}n\rho)t+\sin.(\mu^{I}-\frac{1}{2}n\rho)t.\sqrt{-1}$,

$$\left(\frac{dx^{I}}{dt}+A^{I}\left(\frac{dP}{dt}+(2\mu^{II}-\mu^{I})p\right)+B^{I}\left(\frac{dQ}{dt}+(2\mu^{III}-\mu^{I})q\right)\right.$$
$$\left.+C^{I}\left(\frac{dR}{dt}+(2\mu^{IV}-\mu^{I})r\right)\right)\cos.(\mu^{I}-\tfrac{n}{2}\rho^{I})t+$$

$$\left(\mu^{I}x^{\prime I}-A^{I}\left(\frac{dp}{dt}-(2\mu^{II}-\mu^{I})P\right)-B^{I}\left(\frac{dq}{dt}-(2\mu^{III}-\mu^{I})Q\right)\right.$$
$$\left.-C^{I}\left(\frac{dr}{dt}-(2\mu^{IV}-\mu^{I})R\right)\right)\sin.(\mu^{I}-\tfrac{n}{2}\rho^{I})t+$$

$$\left(\frac{dx^{I}}{dt}+A^{I}\left(\frac{dP}{dt}+(2\mu^{II}-\mu^{I})p\right)+B^{I}\left(\frac{dQ}{dt}+(2\mu^{III}-\mu^{I})q\right)\right.$$
$$\left.+C^{I}\left(\frac{dR}{dt}+(2\mu^{IV}-\mu^{I})r\right)\sin.(\mu^{I}-\tfrac{n}{2}\rho)t.\sqrt{-1}-\right.$$

$$\left(\mu^{I}x^{\cdot I} - A^{I}\left(\frac{dp}{dt} - (2\mu^{II} - \mu^{I})P\right) - B^{I}\left(\frac{dq}{dt} - (2\mu^{III} - \mu^{I})Q\right)\right.$$
$$\left. - C^{I}\left(\frac{dr}{dt} - (2\mu^{IV} - \mu^{I})R\right)\right) cof.(\mu^{I} - \tfrac{n}{2}\rho)\,t\sqrt{-1}$$
$$= \text{constante.}$$

équation qui, à cause du radical $\sqrt{-1}$, lequel peut avoir indifféremment les signes + ou —, se decompose en ces deux-ci.

$$\left(\frac{dx^{\cdot I}}{dt} + A^{I}\left(\frac{dP}{dt} + (2\mu^{II} - \mu^{I})p\right) + B^{I}\left(\frac{dQ}{dt} + (2\mu^{III} - \mu^{I})q\right)\right.$$
$$\left. + C^{I}\left(\frac{dR}{dt} + (2\mu^{IV} - \mu^{I})q\right)\right) cof.(\mu^{I} - \tfrac{n}{2}\rho)\,t +$$
$$\left(\mu^{I}x^{\cdot I} - A^{I}\left(\frac{dp}{dt} - (2\mu^{II} - \mu^{I})P\right) - B^{I}\left(\frac{dq}{dt} - (2\mu^{III} - \mu^{I})Q\right)\right.$$
$$\left. - C^{I}\left(\frac{dr}{dt} - (2\mu^{IV} - \mu^{I})R\right)\right) sin.(\mu^{I} - \tfrac{n}{2}\rho)\,t = D^{I} \ldots (\alpha)$$

&

$$\left(\frac{dx^{\cdot I}}{dt} + A^{I}\left(\frac{dP}{dt} + (2\mu^{II} - \mu^{I})p\right) + B^{I}\left(\frac{dQ}{dt} + (\mu^{III} - \mu^{I})q\right)\right.$$
$$\left. + C^{I}\left(\frac{dR}{dt} + (2\mu^{IV} - \mu^{I})r\right)\right) sin.(\mu^{I} - \tfrac{n}{2}\rho)\,t -$$
$$\left(\mu^{I}x^{\cdot I} - A^{I}\left(\frac{dp}{dt} - (2\mu^{II} - \mu^{I})P\right) - B^{I}\left(\frac{dq}{dt} - (2\mu^{III} - \mu^{I})Q\right)\right.$$
$$\left. - C^{I}\left(\frac{dr}{dt} - (\mu^{IV} - \mu^{I})R\right)\right) cos(\mu^{I} - \tfrac{n}{2}\rho)\,t = E^{I} \ldots . (\beta)$$

D^{I} & E^{I} étant deux constantes arbitraires que nous déterminerons dans un moment.

On aura donc par là

$$\mu^{I}x^{\cdot I} - A^{I}\left(\frac{dp}{dt} - (2\mu^{II} - \mu^{I})P\right) - B^{I}\left(\frac{dq}{dt} - (2\mu^{III} - \mu^{I})Q\right)$$
$$- C^{I}\left(\frac{dr}{dt} - (2\mu^{IV} - \mu^{I})R\right) = D^{I}\,sin.(\mu^{I} - \tfrac{n}{2}\rho)\,t$$
$$- E^{I}\,cos.(\mu^{I} - \tfrac{n}{2}\rho)\,t \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (\gamma)$$

Équation qui suffira pour trouver la valeur de $x^{\cdot I}$, comme on le verra ci-après.

CII.

Soit, lorſque $t = 0$,

$x^{I} = X^{I}$, $x^{II} = X^{II}$, $x^{III} = X^{III}$, $x^{IV} = X^{IV}$, &

$\frac{dx^{I}}{dt} = Y^{I}$, $\frac{dx^{II}}{dt} = Y^{III}$, $\frac{dx^{III}}{dt} = Y^{III}$, $\frac{dx^{IV}}{dt} = Y^{IV}$;

On aura (art. XCII), $P = X^{II}$, $Q = X^{III}$, $R = X^{IV}$, $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$.

Enſuite $\frac{dP}{dt} = Y^{II}$, $\frac{dQ}{dt} = Y^{III}$, $\frac{dR}{dt} = Y^{IV}$,

$\frac{dp}{dt} = (\mu^{II} - \mu^{I}) X^{II}$, $\frac{dq}{dt} = (\mu^{III} - \mu^{I}) X^{III}$,

$\frac{dr}{dt} = (\mu^{IV} - \mu^{I}) X^{IV}$.

Donc ſubſtituant ces valeurs dans les équations (α) & (β), & faiſant $t = 0$, on aura:

$D^{I} = Y^{I} + A^{I} Y^{II} + B^{I} Y^{III} + C^{I} Y^{IV}$, &

$E^{I} = -(\mu^{I} X^{I} + A^{I} \mu^{II} X^{II} + B^{I} \mu^{III} X^{III} + C^{I} \mu^{IV} X^{IV})$

CIII.

Soit maintenant, pour abréger,

$\frac{dp}{dt} - (2\mu^{II} - \mu^{I}) P = (P)$, $\frac{dp}{dt} - (2\mu^{III} - \mu^{I}) Q = (Q)$

& $\frac{dr}{dt} - (2\mu^{IV} - \mu^{I}) R = (R)$,

L'équation (γ) deviendra:

$\mu^{I} x^{I} - A^{I} (P) - B^{I} (Q) - C^{I} (R) = D^{I} \sin.(\mu^{I} - \frac{n}{2}\rho) t$
$- E^{I} \cos.(\mu^{I} - \frac{n}{2}\rho) t$

Subſtituons ſucceſſivement, dans cette équation, au lieu de ρ, ſes quatre valeurs $\rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$, $\rho 4$ (art. XCIX), on aura:

$$\mu^{I} x'^{I} - A^{I}1(P) - B^{I}1(Q) - C^{I}1(R) = D^{I}1 \sin.(\mu^{I} - \tfrac{\pi}{2}\rho 1)\, t - E^{I}1 \cos.(\mu^{I} - \tfrac{\pi}{2}\rho 1)\, t$$

$$\mu^{I} x'^{I} - A^{I}2(P) - B^{I}2(Q) - C^{I}2(R) = D^{I}2 \sin.(\mu^{I} - \tfrac{\pi}{2}\rho 2)\, t - E^{I}2 \cos.(\mu^{I} - \tfrac{\pi}{2}\rho 2)\, t$$

$$\mu^{I} x'^{I} - A^{I}3(P) - B^{I}3(Q) - C^{I}3(R) = D^{I}3 \sin.(\mu^{I} - \tfrac{\pi}{2}\rho 3)\, t - E^{I}3 \cos.(\mu^{I} - \tfrac{\pi}{2}\rho 3)\, t$$

$$\mu^{I} x'^{I} - A^{I}4(P) - B^{I}4(Q) - C^{I}4(R) = D^{I}4 \sin.(\mu^{I} - \tfrac{\pi}{2}\rho 4)\, t - E^{I}4 \cos.(\mu^{I} - \tfrac{\pi}{2}\rho 4)\, t$$

($A^{I}1$, $B^{I}1$, $C^{I}1$, $D^{I}1$, $E^{I}1$, $A^{I}2$, $B^{I}2$, $C^{I}2$, $D^{I}2$, $E^{I}2$, &c. étant ce que deviennent les quantités A^{I}, B^{I}, C^{I}, D^{I}, E^{I}, lorſque ρ devient $\rho 1$, $\rho 2$, &c.)

Donc éliminant de ces quatre équations les trois inconnues (P), (Q), (R) on aura la valeurs de x'^{I}.

CIV.

Pour cet effet, je multiplie la ſeconde équation par α^{I}, la troiſième par β^{I}, la quatrième par γ^{I} (α^{I}, β^{I}, γ^{I} étant de nouvelles indéterminées); après quoi je les ajoute toutes quatre enſemble, & je fais évanouir ſéparément chacun des coefficiens de (P), (Q), (R) j'ai

$$\left.\begin{aligned} A^{I}1 + \alpha^{I} A^{I}2 + \beta^{I} A^{I}3 + \gamma^{I} A^{I}4 &= 0 \\ B^{I}1 + \alpha^{I} B^{I}2 + \beta^{I} B^{I}3 + \gamma^{I} B^{I}4 &= 0 \\ C^{I}1 + \alpha^{I} C^{I}2 + \beta^{I} C^{I}3 + \gamma^{I} C^{I}4 &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (\delta)$$

&

$$x'^{I} = \frac{D^{I}}{\mu^{I}(1 + \alpha^{I} + \beta^{I} + \gamma^{I})} \sin.(\mu^{I} - \tfrac{\pi}{2}\rho 1)\, t - \frac{E^{I}1}{\mu^{I}(1 + \alpha^{I} + \beta^{I} + \gamma^{I})} \cos.(\mu^{I} - \tfrac{\pi}{2}\rho 1)\, t + \frac{\alpha^{I} D^{I}2}{\mu^{I}(1 + \alpha^{I} + \beta^{I} + \gamma^{I})} \sin.(\mu^{I} - \tfrac{\pi}{2}\rho 2)\, t$$

$$- \frac{\alpha^I E^I 2}{\mu^I (1+\alpha^I+\beta^I+\gamma^I)} \cos.(\mu^I - \tfrac{n}{2}\rho 2)\, t$$

$$+ \frac{\beta^I D^I 3}{\mu^I (1+\alpha^I+\beta^I+\gamma^I)} \sin.(\mu^I - \tfrac{n}{2}\rho 3)\, t$$

$$- \frac{\beta^I E^I 3}{\mu^I (1+\alpha^I+\beta^I+\gamma^I)} \cos.(\mu^I - \tfrac{n}{2}\rho 2)\, t$$

$$+ \frac{\gamma^I D^I 4}{\mu^I (1+\alpha^I+\beta^I+\gamma^I)} \sin.(\mu^I - \tfrac{n}{2}\rho 4)\, t$$

$$- \frac{\beta^I E^I 4}{\mu^I (1+\alpha^I+\beta^I+\gamma^I)} \sin.(\mu^I - \tfrac{n}{2}\rho 4)\, t$$

C V.

On peut simplifier cette expression de x^I, en supposant en général $D^I = -\delta^I \sin.\omega^I$, $E^I = -\delta^I \cos.\omega^I$; ce qui donne $\delta^I = \sqrt{D^{I2} + E^{I2}}$, & $tang.\omega^I = \frac{D^I}{E^I}$, savoir :

$$\delta^I = \sqrt{(F^I + A^I F^{II} + B^I F^{III} + C^I F^{IV})^2 + (\mu^I X^I + A^I \mu^{II} X^{II} + B^I \mu^{III} X^{III} + C^I \mu^{IV} X^{IV})^2}$$

$$\& \; tang.\omega^I = -\frac{F^I + A^I F^{II} + B^I F^{III} + C^I F^{IV}}{\mu^I X^I + A^I \mu^{II} X^{II} + B^I \mu^{III} X^{III} + C^I \mu^{IV} X^{IV}}$$

Par ce moyen, on aura :

$$D^I \sin.(\mu^I - \tfrac{n}{2}\rho)\, t - E^I \cos.(\mu^I - \tfrac{n}{2}\rho)\, t = \delta^I \cos.\left((\mu^I - \tfrac{n}{2}\rho)\, t + \omega^I\right),$$

& de là :

$$D^I 1 \sin.(\mu^I - \tfrac{n}{2}\rho 1)\, t - E^I 1 \cos.(\mu^I - \tfrac{n}{2}\rho 1)\, t = \delta^I 1 \cos.\left((\mu^I - \tfrac{n}{2}\rho 1)\, t + \omega 1^I\right)$$

$$D^I 2 \sin.(\mu^I - \tfrac{n}{2}\rho 1)\, t - E^I 1 \cos.(\mu^I - \tfrac{n}{2}\rho 2)\, t = \delta^I 2 \cos.\left((\mu^I - \tfrac{n}{2}\rho 2)\, t + \omega^I 2\right),$$ & ainsi de suite.

Donc si on fait, pour plus de simplicité,

$$\varepsilon^I 1 = \frac{\delta^I 1}{\mu^I (1+\alpha^I+\beta^I+\gamma^I)}, \quad \varepsilon^I 2 = \frac{\alpha^I \delta^I 2}{\mu^I (1+\alpha^I+\beta^I+\gamma^I)}$$

$$\varepsilon^I 3 = \frac{\beta^I \delta^I 1}{\mu^I (1+\alpha^I+\beta^I+\gamma^I)}, \quad \varepsilon^I 4 = \frac{\gamma^I \delta^I 4}{\mu^I (1+\alpha^I+\beta^I+\gamma^I)}$$

On aura

$$x^{\prime\mathrm{I}} = \varepsilon^{\mathrm{I}}1 \cos.\left(\left(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 1\right)t + \omega^{\mathrm{I}}1\right) + \varepsilon^{\mathrm{I}}2 \cos.\left(\left(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 2\right)t + \omega^{\mathrm{I}}2\right)t + \varepsilon^{\mathrm{I}}3 \cos.\left(\left(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 3\right)t + \omega^{\mathrm{I}}3\right) + \varepsilon^{\mathrm{I}}4 \cos.\left(\left(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 4\right)t + \omega^{\mathrm{I}}4\right)t.$$

CVI.

SCHOLIE. A l'égard des valeurs de $\alpha^{\mathrm{I}}, \beta^{\mathrm{I}}, \gamma^{\mathrm{I}}$, on les trouvera aiſément par réſolution des équations (♪); mais on pourroit encore ſe ſervir d'une autre méthode aſſez ſimple, que j'expoſerai ici en peu de mots.

Qu'on multiplie la ſeconde de ces équations par b, & la troiſième par c (b & c étant deux indéterminées) & qu'on les ajoute toutes enſemble, on aura

$$A^{\mathrm{I}}1 + bB^{\mathrm{I}}1 + cC^{\mathrm{I}}1 + (A^{\mathrm{I}}2 + bB^{\mathrm{I}}2 + cC^{\mathrm{I}}2)\alpha^{\mathrm{I}} + (A^{\mathrm{I}}3 + bB^{\mathrm{I}}3 + cC^{\mathrm{I}}3)\beta^{\mathrm{I}} + (A^{\mathrm{I}}4 + bB^{\mathrm{I}}4 + cC^{\mathrm{I}}4)\gamma^{\mathrm{I}} = 0.$$

Or, pour avoir la valeur de α^{I}, on fera,

$$A^{\mathrm{I}}3 + bB^{\mathrm{I}}3 + cC^{\mathrm{I}}3 = 0 \quad \& \quad A^{\mathrm{I}}4 + bB^{\mathrm{I}}4 + cC^{\mathrm{I}}4 = 0;$$

& l'on aura

$$\alpha^{\mathrm{I}} = -\frac{A^{\mathrm{I}}1 + bB^{\mathrm{I}}1 + cC^{\mathrm{I}}1}{A^{\mathrm{I}}2 + bB^{\mathrm{I}}2 + cC^{\mathrm{I}}2}.$$

Les quantités b & c doivent donc être telles que l'on ait $A^{\mathrm{I}} + bB^{\mathrm{I}} + cC^{\mathrm{I}} = 0$, en mettant ſucceſſivement au lieu de ρ, $\rho 3$ & $\rho 4$;

Or l'équation $A^{\mathrm{I}} + bB^{\mathrm{I}} + cC^{\mathrm{I}} = 0$. ſi l'on y ſubſtitue les valeurs de A^{I}, B^{I}, C^{I} (art. XCIX) & qu'on l'ordonne par rapport à ρ, ſera de cette forme $\rho^2 - M\rho + N = 0$, dont les racines devront être $\rho 3$ & $\rho 4$; c'eſt pourquoi l'on aura $M = \rho 3 + \rho 4$, & $N = \rho 3\rho 4$, d'où l'on tirera b & c; on trouvera de la même manière les valeurs de β^{I} & de γ^{I}.

CVII.

Ayant trouvé la valeur de $x^{\cdot I}$, on trouvera celle de $y^{\cdot I}$ par l'équation (H) de l'article LXXVI;

On aura donc, en négligeant les termes affectés de x.

$$y = -2\varepsilon^{I}1\,\sin.\left((\mu^{I}-\tfrac{n}{2}\rho 1)t+\omega^{I}1\right)-2\varepsilon^{I}2\,\sin.\left((\mu^{I}-\tfrac{n}{2}\rho 2)t+\omega^{I}2\right)-2\varepsilon^{I}3\,\sin.\left((\mu^{I}-\tfrac{n}{2}\rho 3)t+\omega^{I}3\right)-2\varepsilon^{I}4\times\sin.\left((\mu^{I}-\tfrac{n}{2}\rho 4)t+\omega^{I}4\right).$$

CVIII.

On aura des expreſſions ſemblables pour les valeurs de $x^{\cdot II}$, $y^{\cdot II}$, &c. Voyez la remarque de l'article C.

CIX.

Pour peu qu'on examine ces valeurs de $x^{\cdot}$ & de $y^{\cdot}$ on verra aiſément qu'elles renferment, pour ainſi dire, quatre équations du centre priſes dans des ellipſes mobiles, dont les excentricités ſeroient $n\varepsilon 1$, $n\varepsilon 2$, $n\varepsilon 3$, $n\varepsilon 4$, & les anomalies moyennes $(\mu-\frac{n}{2}\rho 1)t+\omega^{I}$, $(\mu-\frac{n}{2}\rho 2)t+\omega 2$, $(\mu-\frac{n}{2}\rho 3)t+\omega 3$, $(\mu-\frac{n}{2}\rho 4)t+\omega 4$; d'où l'on voit que les mouvemens de ces anomalies ſeront au mouvement moyen du ſatellite comme $1-\frac{n}{2}.\frac{\rho 1}{\mu}$, $1-\frac{n}{2}.\frac{\rho 2}{\mu}$, $1-\frac{n}{2}.\frac{\rho 3}{\mu}$, & $1-\frac{n}{2}.\frac{f4}{\mu}$ à 1; par conſéquent les apſides avanceront de $\frac{n}{2}.\frac{\rho 1}{\mu}360°$, $\frac{n}{2}.\frac{\rho 2}{\mu}360°$, $\frac{n}{2}.\frac{\rho 3}{\mu}360°$, $\frac{n}{2}.\frac{\rho 4}{\mu}360°$ à chaque révolution du ſatellite.

On pourroit, par la méthode de l'article III, réduire ces quatre équations à une ſeule, dans laquelle l'excentricité ſeroit variable, & le mouvement des apſides non

uniforme ; mais je crois qu'il eſt plus commode de les laiſſer ſous leur forme naturelle.

C X.

On ſuivra une méthode analogue pour trouver la valeur de z^{I}, au moyen des équations (N1), (N2), &c. de l'article XCI. Mais ſans entrer dans de nouveaux calculs à cet égard, il ſuffira de remarquer que les équations dont nous parlons peuvent ſe déduire des équations (M1), (M2) &c en changeant x' en z, M en N, Ψ en Γ, & ſuppoſant nulles toutes les quantités marquées par la lettre $\overset{\circ}{\Pi}$; d'où il s'enſuit.

1.° Que ſi l'on fait (art. XCVIII)

$(1,2) = \overset{\sigma}{\Gamma}{}^{I}(a^{I}, a^{II})$

$(1,3) = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{I}(a^{I}, a^{III})$

$(2,1) = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{I}(a^{II}, a^{I})$ &c.

Enſuite

$$K^{I} = -2\frac{\frac{\sigma}{\mu^{I}} - \pi^{I}}{\chi^{I}},\quad K^{II} = -2\frac{\frac{\sigma}{\mu^{I}} - \pi^{II}}{\chi^{II}}\ \&c.$$

On aura pour A^{I}, B^{I}, C^{I} les mêmes expreſſions que dans l'article XCIX, & la valeur de σ devra ſe déterminer au moyen de l'équation (Z).

2.° Que ſi on ſuppoſe, lorſque $t = 0$,

$z^{I} = Z^{I}$, $z^{II} = Z^{II}$, $z^{III} = Z^{III}$, $z^{IV} = Z^{IV}$

$\frac{dz^{I}}{dt} = V^{I}$, $\frac{dz^{II}}{dt} = V^{II}$, $\frac{dz^{III}}{dt} = V^{III}$, $\frac{dz^{IV}}{dt} = V^{IV}$

& qu'on faſſe

$$x^{I} = \sqrt{(V^{I} + A^{I}V^{II} + B^{I}V^{III} + C^{I}V^{IV})^{2}\mu^{I}Z^{I} + A^{I}\mu^{II}Z^{II} + B^{I}\mu^{III}Z^{III} + C^{I}\mu^{IV}Z^{IV}},$$

$$\textit{cotang.}\ \pi^{I} = \frac{V^{I} + A^{I}V^{II} + B^{I}V^{III} + C^{I}V^{IV}}{\mu^{I}Z^{I} + A^{I}\mu^{II}Z^{II} + B^{I}\mu^{III}Z^{III} + C^{I}\mu^{IV}Z^{IV}}$$

Enſuite

$$\lambda^{I}1 = \frac{\chi^{I}}{\mu^{I}(1+\alpha^{I}+\beta^{I}+\gamma^{I})}, \quad \lambda^{I}2 = \frac{\alpha^{I}\chi^{I}2}{\mu^{I}(1+\alpha^{I}+\beta^{I}+\gamma^{I})}$$

$$\lambda^{I}3 = \frac{\beta^{I}\chi^{I}3}{\mu^{I}(1+\alpha^{I}+\beta^{I}+\gamma^{I})}, \quad \lambda^{I}4 = \frac{\gamma^{I}\chi^{I}4}{\mu^{I}(1+\alpha^{I}+\beta^{I}+\gamma^{I})}$$

Les quantités, α^{I}, β^{I}, γ^{I} étant déterminées par les équations (♌) de l'article CIV, on aura :

$$z^{I} = \lambda^{I}1 \sin.\left((\mu^{I}+\tfrac{n}{2}\sigma 1)t+\eta^{I}1\right)+\lambda^{I}2 \sin.\left((\mu^{I}+\tfrac{n}{2}\sigma 2)t+\eta^{I}2\right)$$
$$+\lambda^{I}3 \sin\left((\mu^{I}+\tfrac{n}{2}\sigma 3)t+\eta^{I}3\right)+\lambda^{I}4 \sin.\left((\mu^{I}+\tfrac{n}{2}\sigma 4)t+\eta^{I}4\right)$$

& ainſi des autres quantités z^{II}, z^{III}, z^{IV}, &c.

CXI.

Cette expreſſion de z^{I} eſt compoſée, comme l'on voit, de quatre termes, chacun analogue à l'expreſſion de z^{I}, trouvée dans l'article XL, laquelle donne un plan mobile dont l'inclinaiſon eſt conſtante ; donc pour trouver la poſition de l'orbite d'un Satellite quelconque, il n'y aura qu'à imaginer quatre plans paſſant par le centre de Jupiter, dont le premier ſe meuve ſur celui de l'orbite de cette Planète, en gardant toujours avec lui la même inclinaiſon ; le ſecond ſe meuve de la même manière ſur le premier ; le troiſième ſur le ſecond, & enfin le quatrième qui ſera celui de l'orbite du Satellite, ſe meuve pareillement ſur le troiſième. Ainſi les quantités $n\lambda 1$, $n\lambda 2$, $n\lambda 3$, $n\lambda 4$, ſeront les tangentes des inclinaiſons du premier plan ſur celui de Jupiter, du ſecond ſur le premier, du troiſième ſur le ſecond, & du quatrième ſur le troiſième, & les angles $(\mu+\frac{n}{2}\sigma 1)t+\eta 1$, $(\mu+\frac{n}{2}\sigma 2)t+\eta 2$, $(\mu+\frac{n}{2}\sigma 3)t+\eta 3$ $(\mu+\frac{n}{2}\sigma 4)t+\eta 4$; ſeront les diſtances du ſatellite aux nœuds du premier plan avec celui de ☍, du ſecond avec le premier, du troiſième avec le ſecond, & du quatrième avec le troiſième ; d'où l'on voit que les nœuds de ces quatre plans rétrograderont pendant une révolution du

satellite de $\frac{n}{2}.\frac{\sigma^1}{\mu}360°$, $\frac{n}{2}.\frac{\sigma^2}{\mu}360°$, $\frac{n}{2}.\frac{\sigma^3}{\mu}360°$, $\frac{n}{2}.\frac{\sigma^4}{\mu}360°$.

Si on vouloit connoître directement la position du plan de l'orbite du Satellite, par rapport à celui de l'orbite de Jupiter, on y parviendroit par la méthode de l'article III; car nommant $n\tau$ la tangente de l'inclinaison, & Ψ la distance du Satellite au nœud ascendant, on auroit $n\tau = \sqrt{n^2z^2 + \frac{n^2 d\zeta^2}{d\varphi^2}}$, & $tang.\Psi = \frac{n\zeta d\varphi}{nd\zeta}$, savoir, à cause de $\varphi = \mu t + ny$, $\tau = \sqrt{z^2 + \frac{d\zeta^2}{\mu^2 dt^2}}$ & $tang.\Psi = \frac{n\zeta dt}{d\zeta}$ d'où l'on tire, par les logarithmes,

$$\Psi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(l\left(\frac{d\zeta}{\mu dt} + z\sqrt{-1}\right) - l\left(\frac{d\zeta}{\mu dt} + z\sqrt{-1}\right)\right)$$

expression dans laquelle les imaginaires se détruiront mutuellement, mais qu'il sera difficile, peut-être impossible de réduire à une forme finie. Ainsi je crois qu'il vaudra mieux s'en tenir à la formule de l'article CIX.

CXII.

Telles sont les premières valeurs des variables x', y', z dans lesquelles on a négligé les quantités de l'ordre de n. Si on veut y avoir égard, il n'y a qu'à substituer ces mêmes valeurs dans les équations de l'article LXXVI, & les intégrer ensuite par la méthode ordinaire (art. XXXIV).

Nous n'entrerons point dans ce détail qui n'a d'autre difficulté que la longueur du calcul, & qui d'ailleurs ne paroît guères nécessaire dans la théorie des Satellites.

Il y a cependant encore quelques termes des équations (G), & (K), (art. LXXVI) auxquels il ne seroit peut être pas inutile d'avoir égard; ce sont ceux qui viennent de l'action du Soleil, & qui renferment les quantités $x^{,1}$, $y^{,1}$, z^1, multipliés par $cos.2(m-\mu^1)t$, ou par $sin.2(m-\mu^1)t$;

car en substituant au lieu de ces quantités, leurs valeurs trouvées ci-dessus, on aura, a cause de m très-petit (article XLVIII), des termes qui augmenteront beaucoup par l'intégration, & qui appartiendront aussi en quelque manière à la première approximation; je dis *en quelque manière*, parce que ces termes, quoique fort augmentés par l'intégration, se trouveront encore assez petits par rapport à ceux que nous avons trouvés jusqu'ici.

En effet les termes dont il s'agit étant tous multipliés par $n\,K = \frac{m^2}{\mu^2}$ (Art. XLIX) & devant être divisés par des quantités de l'ordre de m & de n, seront encore après l'intégration de l'ordre de m & par conséquent très-petits. C'est-là la raison pour laquelle nous n'avons point eu d'égard à ces sortes de termes dans les calculs précédens; d'autant plus que notre objet principal est de déterminer les inégalités des Satellites causées par leur action mutuelle, conformément au Programme de l'Académie. Je pourrai peut-être dans une autre occasion reprendre plus au long ces recherches.

CXIII.

REMARQUE I. Nous avons vu que les quantités p & σ dépendent de deux équations du quatrième degré (art. XCIX). Or, il peut arriver deux cas, qu'il est bon d'examiner. Le premier est celui où ces équations auroient des racines égales; le second, celui où elles auroient des racines imaginaires.

Voyons donc ce qu'il faudra faire dans ces deux cas.

1°. Supposons que deux quelconques des valeurs de p soient égales entr'elles, par exemple $p4 = p3$ On fera $p4 = p3 + i$, i étant une quantité évanouissante, & l'on aura (article XCIX).

$A'4 = A'3 + Fi$, $B'4 = B'3 + Gi$, $C'4 = C'3 + Hi$
G, G, H étant les coëficiens de $d\rho 3$ dans les différentielles de $A'3, B'3, C'3$.

Donc les équations (♂) de l'article CIV deviendront, en faisant $\beta' + \gamma' = b$, & $\gamma' i = c$,

$A'1 + a'A'2 + bA'3 + cF = 0$
$B'1 + a'B'2 + bB'3 + cG = 0$
$C1 + a'C'2 + bC'3 + cH = 0$

d'où l'on tirera a', b, & c.

On aura de même (article CIV)

$\delta'4 = \delta'3 + \Delta i$, & $\omega'4 = \omega'3 + \Omega i$

Δ, & Ω étant pareillement les coëficiens de $d\rho 3$ dans la différentiation de $\delta'3$, & $\omega'3$.

Donc $cof.((\mu' - \frac{n}{2}\rho 4)t + \omega^I 4) = cof.((\mu^I - \frac{n}{2}\rho 3)t + \omega^I 3) + i(\frac{n}{2}t - \Omega) sin.((\mu^I - \frac{n}{2}\rho 3)t + \omega^I 3)$.

Donc les termes $\varepsilon^I 3\ cof.((\mu^I - \frac{n}{2}\rho 3)t + \omega^I 3) + \varepsilon^I 4\ cof.((\mu^I - \frac{n}{2}\rho 4)t + \omega^I 4)$ de la valeur de x^I (art. CIV) se changeront en $(\varepsilon^I 3 + \varepsilon^I 4)\ cof.((\mu^I - \frac{n}{2}\rho 3)t + \omega^I 3) + \varepsilon^I 4\, i(\frac{n}{2}t - \Omega) sin.((\mu^I - \frac{n}{2}\rho 3)t + \omega^I 3)$.

$$\text{Or } \varepsilon^I 3 + \varepsilon^I 4 = \frac{(\beta^I + \gamma^I)\delta^I 3 + \Delta\gamma^I i}{\mu^I(1 + \alpha^I + \beta^I + \gamma^I)} = \frac{b\delta^I 3 + c\Delta}{\mu^I(1 + \alpha^I + b)}$$

$$\& \ \varepsilon^I 4\, i = \frac{\delta^I 4\gamma^I i}{\mu^I(1 + \alpha^I + \beta^I + \gamma^I)} = \frac{c\delta^I 3}{\mu^I(1 + \alpha^I + b)}.$$

Donc la valeur de $x^{\cdot I}$ deviendra

$$x^{\cdot I} = \varepsilon^I 1\ cof.((\mu^I - \tfrac{n}{2}\rho 1)t + \omega^I 1) + \varepsilon^I 2\ cof.((\mu^I - \tfrac{n}{2}\rho 2)t + \omega^I 2) + \frac{b\delta^I 3 + c\Delta}{\mu^I(1 + \alpha^I + b)}\ cof.((\mu^I - \tfrac{n}{2}\rho 3)t + \omega^I 3) + \frac{c\delta^I 3}{\mu^I(1 + \alpha^I + b)}(\tfrac{n}{2}t - \Omega) sin.((\mu^I - \tfrac{n}{2}\rho 3)t + \omega^I 3).$$

Par

Par conſéquent celle de $y^{\cdot I}$ ſera (art. XC) en négligeant les termes de l'ordre de $ny^{\cdot I} = -2\varepsilon^I 1 \, \textit{ſin.}\,((\mu^I - \frac{r}{2}\rho 1)t + \omega^I 1) - 2\varepsilon^I 2 \, \textit{ſin.}\,((\mu^I - \frac{r}{2}\rho 2)t + \omega^I 2)$

$$- 2\frac{b\delta^I 3 + C\Delta}{\mu^I(1+\alpha^1+b)} \, \textit{ſin.}\,((\mu^I - \tfrac{r}{2}\rho 3)t + \omega^I 3)$$

$$- 2\frac{C\delta^I 3}{\mu^I(1+\alpha^1+b)}(\tfrac{r}{2}t + \delta) \, \textit{cof.}\,((\mu^I - \tfrac{r}{2}\rho 3)t + \omega^I 3).$$

De-là on voit que les valeurs de $x^{\cdot}$, & de $y^{\cdot}$ contiendront dans ce cas un terme multiplié par l'angle t, lequel donnera par conſéquent une équation, dont la valeur ira toujours en augmentant.

On réſoudra de la même manière le cas de trois racines égales, & l'on trouvera pour lors dans les valeurs de $x^{\cdot}$, & de $y^{\cdot}$ des termes qui contiendront l'angle t avec ſon quarré t^2. Et ainſi de ſuite, s'il y avoit quatre racines égales.

2°. Soient maintenant $\rho 3$, & $\rho 4$ imaginaires, on les mettra d'abord (ce qui eſt toujours poſſible comme l'on ſait) ſous cette forme $\rho 3 = p + q\sqrt{-1}$, & $\rho 4 = p - q\sqrt{-1}$, p, & q étant des quantités réelles; moyennant quoi les quantités $A^I 3$, $B^I 3$, $C^I 3$, $A^I 4$, $B^I 4$, $C^I 4$ ſe rameneront à la forme ſuivante,

$$A^I 3 = P + Q\sqrt{-1}, \; A^I 4 = P - Q\sqrt{-1}$$
$$B^I 3 = R + S\sqrt{-1}, \; B^I 4 = R - S\sqrt{-1}$$
$$C^I 3 = T + V\sqrt{-1}, \; C^I 4 = T - V\sqrt{-1}$$

Faiſant ces ſubſtitutions dans les équations (♂) & ſuppoſant $\beta^I + \gamma^I = 2b$, $\beta^I = 2c\sqrt{-1}$, les imaginaires diſparoîtront, de ſorte qu'on aura pour α, b, c des valeurs réelles; donc les quantités β^I, γ^I ſeront encore de cette forme $\beta^I = b + c\sqrt{-1}\, b - c\sqrt{-1}$.

De plus, on verra par l'art. CII, que les quantités $D^I 3$, $E^I 3$, $D^I 4$, $E^I 4$ feront auſſi de la forme :

$$D^I 3 = F + G\sqrt{-1},\ D^I 4 = F - G\sqrt{-1},$$

$$E^I 3 = F + G\sqrt{-1},\ E^I 4 = F - G\sqrt{-1},$$

Donc on aura auſſi

$$\frac{\beta^I D^I 3}{\mu^I(1+\alpha'+\beta^I+\gamma^I)} = H + L\sqrt{-1},\ \frac{\gamma^I D^I 4}{\mu^I(1+\alpha'+\beta^I+\gamma^I)} = H - L\sqrt{-1}$$

$$\frac{\beta^I E^I 3}{\mu(1+\alpha'+\beta^I+\gamma^I)} = H + L\sqrt{-1};$$

$$\frac{\gamma^I E^I 4}{\mu^I(1+\alpha'+\beta^I+\gamma^I)} = h - l\sqrt{-1}.$$

Or $\mathit{fin}.(\mu^I - \frac{\pi}{2}(p \pm q\sqrt{-1}))t = \mathit{fin}.(\mu^I - \frac{\pi}{2}p)(t\chi \mathit{cof}.\frac{\pi}{2}(qt\sqrt{-1}) \mp \mathit{cof}.(\mu^I - \frac{\pi}{2}p)\, t \chi \mathit{fin}.\frac{\pi}{2}(qt\sqrt{-1})$, & de même $\mathit{cof}.(\mu^I - \frac{\pi}{2}(p \pm q\sqrt{-1}))t = \mathit{cof}.(\mu^I - \frac{\pi}{2}pt)\chi \mathit{cof}.\frac{\pi}{2}(qt\sqrt{-1}) \pm \mathit{fin}.(\mu^I - \frac{\pi}{2}p)\, t \chi \mathit{fin}.\frac{\pi}{2}(qt\sqrt{-1})$.

Donc les termes

$$\frac{\beta^I D^I 3}{\mu^I(1+\alpha'+\beta^I+\gamma^I)} \mathit{fin}.(\mu^I - \tfrac{\pi}{2}p3)t - \frac{\beta^I F^I 3}{\mu^I(1+\alpha'+\beta^I+\gamma^I}$$

$$\mathit{cof}.(\mu^I - \tfrac{\pi}{2}p3)t\ \frac{\gamma^I D^I 4}{\mu^I(1+\alpha'+\beta^I\gamma^I)}\ \mathit{fin}.(\mu^I - \tfrac{\pi}{2}p4)t$$

$$- \frac{\gamma^I E^I 4}{\mu^I(1+\alpha'+\beta^I+\gamma^I)}\ \mathit{cof}.(\mu^I - \tfrac{\pi}{2}p4)t$$

la valeur de $x^{\cdot I}$ (art. CIII) ſe changeront en

$$2(H\mathit{fin}.(\mu^I - \tfrac{\pi}{2}p)t - h\,\mathit{cof}.(\mu^I - \tfrac{\pi}{2}p)t)\mathit{cof}.\tfrac{\pi}{2}(qt\sqrt{-1} -$$

$$2(L\,\mathit{cof}.(\mu^I - \tfrac{\pi}{2}p)t + l\,\mathit{fin}.(\mu^I - \tfrac{\pi}{2}p)t)\mathit{fin}.\tfrac{\pi}{2}(qt\sqrt{-1})\chi\sqrt{-1})$$

c'eſt-à-dire, en mettant au lieu de $\mathit{cof}.\frac{\pi}{2}(qt\sqrt{-1})$ leurs valeurs exponentielles $\frac{e^{-\frac{\pi}{2}qt\sqrt{-1}} + e^{\frac{\pi}{2}qt\sqrt{-1}}}{2}$, $\frac{e^{-\frac{\pi}{2}qt\sqrt{-1}} - e^{\frac{\pi}{2}qt\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$;

$e^{\frac{r}{2}qt}((H-l)\,sin.(\mu^{I}-\frac{r}{2}p)t+(L+h)\,cos.(\mu^{I}-\frac{r}{2}p)t)+$
$e^{\frac{r}{2}qt}((H+l)\,sin.(\mu^{I}-\frac{r}{2}p)t-(L-h)\,cos.(\mu^{I}-\frac{r}{2}p)t)$

expreſſions qui peuvent encore ſe changer en celles-ci :

$\breve{\varepsilon}\,e^{\frac{r}{2}qt}\,cos.((\mu^{I}-\frac{r}{2}p)t+\breve{\omega},+\breve{\varepsilon}\,e^{-\frac{r}{2}qt}\,cos.((\mu^{I}-\frac{r}{2}p)t+\breve{\omega})$

en faiſant $H-l=-\breve{\varepsilon}\,sin.\,\breve{\omega}$, $L+h=\breve{\varepsilon}\,cos.\,\breve{\omega}$, $H+l=-\breve{\varepsilon}\,sin.\,\breve{\omega}$, $h-L=\breve{\varepsilon}\,cos\hat{\omega}$.

On mettra donc ces termes au lieu des termes $\varepsilon^{I}3\,cos.((\mu^{I}-\frac{r}{2}p3)t+\omega'3)+\varepsilon^{I}4\,cos.((\mu^{I}-\frac{r}{2}p4)t+\omega'4)$ de la valeur de $x.^{I}$ de l'article CIV, & l'on aura $x.^{I}=\varepsilon^{I}1\,cos.((\mu^{I}-\frac{r}{2}p1)t+\omega^{I}1)+\varepsilon^{I}2\,cos.((\mu^{I}-\frac{r}{2}p2)t+\omega^{I}2)+\breve{\varepsilon}\,e^{\frac{r}{2}qt}\,cos.((\mu^{I}-\frac{r}{2}p)t+\breve{\omega})+\breve{\varepsilon}\,e^{-\frac{r}{2}qt}\,cos.((\mu^{I}-\frac{r}{2}p)t+\breve{\omega})$, d'où l'on tire (article XC)

$y.^{I}=-2\,\varepsilon^{I}1\,sin.((\mu^{I}-\frac{r}{2}p1)t+\omega^{I}1)-2\,\varepsilon^{I}2\,sin.((\mu^{I}-\frac{r}{2}p2)t+\omega^{I}2)-2\breve{\varepsilon}\,e^{\frac{r}{2}qt}\,sin.((\mu^{I}-\frac{r}{2}p)t+\breve{\omega})-2\hat{\varepsilon}\,e^{-\frac{r}{2}qt}\,sin.((\mu^{I}-\frac{r}{2}p)t+\hat{\omega})$

Ainſi, dans ce cas, les valeurs de $x.$, & de y contiendront deux termes ; l'un multiplié par $e^{\frac{r}{2}qt}$, & l'autre par $e^{-\frac{r}{2}qt}$, leſquels donneront dans le mouvement des Satellites deux équations, dont l'une ira toujours en augmentant, & l'autre ira en diminuant.

Si les valeurs de p étoient toutes quatre imaginaires, on feroit ſur les deux premiers termes de l'expreſſion de $x.$ (article CIII) les mêmes raiſonnemens & les mêmes ré-

ductions que nous nous venons de faire sur les deux autres.

On en dira autant des valeurs de z lesquelles sont entiérement analogues à celles de x (article CIX) ; de sorte que, si l'équation en σ avoit des racines égales ou imaginaires, les latitudes des Satellites se trouveroient sujettes à des variations qui augmenteroient de plus en plus.

CXIV.

REMARQUE II. A l'égard des quantités $\varepsilon^{I}1$, $\varepsilon^{I}2$ &c. $\omega^{I}1$, $\omega^{I}2$ &c. $\varepsilon^{II}1$, $\varepsilon^{II}2$ &c. &c. il faudra les déterminer par le moyen des observations; mais il y a là-dessus une remarque importante à faire; c'est que, comme il n'y a proprement que les huit quantités X^{I}, Y^{I}, X^{II}, Y^{II}, X^{III}, Y^{III}, X^{IV}, Y^{IV} qui soient absolument arbitraires (article CII) & que les quantités, dont dont nous parlons, soient au nombre de 32, on aura 24 conditions à vérifier.

Il en est de même des quantités $\lambda^{I}1$, $\lambda^{I}2$, &c. $\eta^{I}1$, $\eta^{I}2$ &c. $\lambda^{I}1$, $\lambda^{I}2$, &c. $\eta^{II}1$. $\eta^{II}2$ &c. &c. (art. CX).

CXV.

SCHOLIE. Nous avons déja donné les valeurs de $\mathfrak{C}^{I}$, $\mathfrak{C}^{II}$, $\mathfrak{C}^{III}$, $\mathfrak{C}^{IV}$, (art. LXXXII) aussi bien que celles de π^{I}, π^{II}, π^{III}, π^{IV}, (art. LXXXVI).

Ainsi pour avoir les valeurs de ρ, & de σ il ne s'agira plus que de trouver les valeurs numériques des coëficiens de l'équation (Z) (article XCIX) dans les deux cas (article XCVIII, CIX.

PREMIER CAS.

Suivant les formules de l'art. XCVIII, on a

$(1,2) = \overset{o}{\Psi} 1\,(a^{I}, a^{II}) - \mu^{II} \overset{o}{\Pi} 1\,(a^{I}, a^{II})$

donc, faisant les substitutions de l'art. XCI, & mettant par tout μ^{II} au lieu de M^{II}, on aura

$$(1,2) = \breve{\Psi} 1\,(a^{I}, a^{II}) + 2\breve{\Gamma} 1\,(a^{I}, a^{II}) - 4\frac{\mu^{I}}{\mu^{II}}\hat{\Gamma} 1\,(a^{I}, a^{II})$$

$$- \left(2\hat{\Psi} 1\,(a^{I}, a^{II}) + 4\frac{\mu^{II}-\mu^{I}}{\mu^{II}}\hat{\Gamma} 1\,(a^{I}, a^{II})\right)\frac{\mu^{I}(2\mu^{II}-\mu^{I})}{\mu^{II}-(\mu^{II}-\mu^{I})^{2}}$$

ce qui se réduit à :

$$(1,2) = \breve{\Psi} 1\,(a^{I}, a^{II}) + 2\breve{\Gamma} 1\,(a^{I}, a^{II}) - 2\hat{\Psi} 1\,(a^{I}, a^{II}) - 4\hat{\Gamma} 1\,(a^{I}, a^{II}).$$

On trouvera de même :

$$(1,3) = \breve{\Psi} 1\,(a^{I}, a^{III}) + 2\hat{\Gamma} 1\,(a^{I}, a^{III}) - 2\hat{\Psi} 1\,(a^{I}, a^{III}) - 4\hat{\Gamma} 1\,(a^{I}, a^{III});$$

$$(2,1) = \breve{\Psi} 1\,(a^{II}, a^{I}) + 2\hat{\Gamma} 1\,(a^{II}, a^{II}) - 2\breve{\Psi} 1\,(a^{II}, a^{II}) - 4\hat{\Gamma} 1\,(a^{II}, a^{I})$$ & ainsi des autres.

Or, nous avons déja donné les valeurs des quantités $\breve{\Gamma} 1$, & $\hat{\Gamma} 1$ (art. XLVII); il ne reste plus qu'à chercher celles de $\breve{\Psi} 1$, & de $\hat{\Psi} 1$.

Pour cela, il faut auparavant chercher les valeurs des quantités Ψ, $\Psi 1$, & $\Psi 2$. Or, en faisant $q = \frac{a^{I}}{a^{II}}$ on trouve (art. XXII), à cause de $\Lambda\,(a^{I}, a^{II}) = a^{II-5}\,(A)$, $\Lambda 1\,(a^{I}, a^{II}) = a^{II-5}\,(B)$ &c. (art. LXXX),

$$\Psi\,(a^{I}, a^{II}) = \frac{q(B) - 2(A)}{2a^{II\,3}}$$

$$\Psi 1\,(a^{I}, a^{II}) = \frac{q(C) - 2(B) + 2q(A)}{2a^{II\,3}}$$

$$\Psi 2\,(a^{I}, a^{II}) = \frac{q(D) - 2(C) + q(B)}{2a^{II\,3}}$$

&t de même, à cauſe de $\Lambda(a^{II}, a^{I},) = \Lambda(a^{I}, a^{II})$ &c.,

$$\Psi(a^{II}, a^{I}) = \frac{q(B) - 2q^{2}(A)}{2a^{II}}$$

$$\Psi 1(a^{II}, a^{I}) = \frac{q(C) - 2q^{2}(B) + 2q(A)}{2a^{II}}$$

$$\Psi 2(a^{II}, a^{I}) = \frac{q(D) - 2q^{2}(C) + q(B)}{2a^{II}}$$

Donc (art. LXXX)

$$\Psi(a^{I}, a^{II}) = \Pi(a^{II}, a^{I})$$

$$\Psi 1(a^{I}, a^{II}) = \Pi 1(a^{II}, a^{I})$$

&c :

$$\Psi(a^{II}, a^{I}) = \Pi(a^{I}, a^{II})$$

$$\Psi 1(a^{II}, a^{I}) = \Pi 1(a^{I}, a^{II})$$

&c :

c'eſt à-dire que les quantités Ψ ſont les réciproques des quantités Π.

On aura doc (art. XXIV)

$$\breve{\Psi} 1(a^{I}, a^{II}) = 3\frac{q^{2}Q2 - 2q^{3}Q1 + 2q^{2}Q}{2} + \frac{q^{2}C + 2q^{2}A}{2} + 2q^{2}$$

expreſſion qui ſervira auſſi pour les quantités analogues: $\breve{\Psi} 1(a^{I}, a^{III})$, $\breve{\Psi} 1(a^{II}, a^{III})$ &c, en faiſant ſucceſſivement

$$q = \frac{a^{I}}{a^{III}}, q = \frac{a^{II}}{a^{III}} \text{ &c.}$$

Enſuite on aura, pour les quantités réciproques,

$$\breve{\Psi} 1(a^{II}, a^{I}) = 3\frac{qP2 - 2P1 + 2qP}{2} + \frac{qC + 2qA}{2} + \frac{2}{q^{2}}$$

& ainſi des autres.

Pareillement on trouvera (art. XXV).

$$\hat{\Psi}\,\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = 3\,\frac{q^2 Q_2 - 2q^2 Q}{2} + \hat{\Gamma}\,\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) - 3q^2$$

&

$$\hat{\Psi}\,\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}}) = 3\,\frac{q\,Q_2 - 2q\,Q}{2} + \hat{\Gamma}\,\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}}) - \frac{3}{q^2}$$

& ainſi des autres.

De là on tire, en employant les valeurs de la table de l'art. LXXXI,

	$(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$	$(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})$	$(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})$	$(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}})$	$(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{IV}})$	$(a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{IV}})$
$\check{\Psi}\,\mathrm{I}$	—1,708	—0,181	—0,008	—1,733	—0,132	—0,887
$\hat{\Psi}\,\mathrm{I}$	0,366	0,068	0,003	0,153	0,036	0,214
	$(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}})$	$(a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{I}})$	$(a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{I}})$	$(a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{II}})$	$(a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{II}})$	$(a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{III}})$
$\check{\Psi}\,\mathrm{I}$	1,203	11,699	29,330	1,580	14,871	3,489
$\hat{\Psi}\,\mathrm{I}$	—6,181	—13,371	—40,052	—6,500	—16,188	—7,089

enſuite.

(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
—1,578	—0,213	—0,004	—1,155	—0,162	—0,765
(2,1)	(3,1)	(4,1)	(3,2)	(4,2)	(4,3)
—2,365	—0,363	—10,040	—1,414	—0,289	—1,331

Donc l'équation (Z) de l'art. XCIX, deviendra

$K^{I} K^{II} K^{III} K^{IV} - 2,532\, K^{I} K^{II} - 0,468\, K^{I} K^{III} - 1,633\, K^{I} K^{IV} - 0,040\, K^{II} K^{III} - 0,077\, K^{II} K^{IV} - 3,732\, K^{III} K^{IV} + 1,013\, K^{I} + 1,641\, K^{II} + 2,593\, K^{III} + 1,373\, K^{IV} - 5,599 = 0 \ldots . (\epsilon)$

où il n'y aura plus qu'à ſubſtituer au lieu de $K^{I}, K^{II}, K^{III} K^{IV}$, leurs valeurs

$$2\,\frac{\frac{\varepsilon}{\mu^{I}} - \epsilon^{I}}{\chi^{I}},\quad 2\,\frac{\frac{\varepsilon}{\mu^{II}} - \epsilon^{II}}{\chi^{II}},\quad 2\,\frac{\frac{\varepsilon}{\mu^{III}} - \epsilon^{III}}{\chi^{III}},\quad 2\,\frac{\frac{\varepsilon}{\mu^{IV}} - \epsilon^{IV}}{\chi^{IV}}$$

SECOND CAS.

On aura ici (art. CIX)

$(1,2) = \Gamma^{\circ} 1\,(a^{I}, a^{II})$, $(1,3) = \Gamma^{\circ} 1\,(a^{I}, a^{III})$ &c :

$(2,1) = \Gamma^{\circ} 1\,(a^{II}, a^{I})$ &c.

Donc faiſant ſucceſſivement $q = \frac{a^{I}}{a^{II}}$, $= \frac{a^{I}}{a^{III}}$ &c, on aura (art. XXXII, & XLIII)

$$(1,2) = q^{2} B,\ (1,3) = q^{2} B \text{ &c},$$

enſuite

$$(2,1) = q B,\ (3,1) = q B \text{ &c}.$$

Donc, en employant les valeurs de B données dans l'art. XLVII, on trouvera,

(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
−1,963	−0,252	−0,037	−1,884	−0,174	−1,151
(2,1)	(3,1)	(4,1)	(3,2)	(4,2)	(4,3)
−3,116	−0,640	−0,166	−3,011	−0,489	−2,025

Et

Et l'équation (Z) se changera en celle-ci :

$$K^{I}K^{II}K^{III}K^{IV} - 2,331\,K^{I}K^{II} - 0,085\,K^{I}K^{III} - 5,675\,K^{I}K^{IV} - 0,006\,K^{II}K^{III} - 0,161\,K^{II}K^{IV} - 6,120\,K^{III}K^{IV} + 2,124\,K^{I} + 0,096\,K^{II} + 0,114\,K^{III} + 4,738\,K^{IV} + 11,972 = 0 \ldots (\zeta)$$

dans laquelle

$$K^{I} = 2\frac{\frac{\sigma}{\mu^{I}} - \rho^{I}}{\chi^{I}}, K^{II} = 2\frac{\frac{\sigma}{\mu^{II}} - \rho^{II}}{\chi^{II}}, K^{III} = 2\frac{\frac{\sigma}{\mu^{III}} - \rho^{III}}{\chi^{III}}, K^{IV} = 2\frac{\frac{\sigma}{\mu^{IV}} - \rho^{IV}}{\chi^{IV}}$$

Il resteroit maintenant à tirer de ces équations les valeurs de ρ, & σ d'où dépendent les principales inégalités de l'équation du centre, & de la latitude des satellites de Jupiter ; mais comme nous touchons au terme fixé par l'Académie pour l'admission des Piéces, nous nous contenterons ici d'avoir donné la méthode & les principes nécessaires pour déterminer ces sortes d'inégalités, & nous remettrons ce travail à un autre tems, où nous nous proposons de suivre, & de discuter avec attention ces points importans de la théorie des satellites.

§. 4.

Sur les inégalités des satellites de Jupiter qui dépendent de la période de 12 ans.

CXVI.

Les tables du premier & du second satellite ne renferment que les équations qui dépendent de l'anomalie de Jupiter avec celles qui dépendent de la période de 4371 dont nous avons parlé au long dans le §5 du Chapi-

tre précédent ; cependant, il eſt facile de ſe convaincre ; & M. Wargentin l'avoue lui-même dans les diſſertations qu'il a miſes à la tête des obſervations de ces deux ſatellites, (Mém. de la Soc. d'Upſal, années 1742 & 1743) que les équations attribuées à l'inégalité du mouvement de Jupiter ne s'accordent pas entièrement avec l'équation du centre de cette Planette ; d'où il s'enſuit qu'il doit y avoir dans le mouvement de ces deux ſatellites des inégalités particulières qui ayant des périodes à très peu-près égales à la révolution de Jupiter ſe trouvent pour ainſi dire fondues dans la grande inégalité qui vient de l'excentricité de cette Planette, c'eſt ce que la théorie confirme d'ailleurs ; car on a vu que les équations du centre des ſatellites doivent renfermer quatre termes tels que $2n\varepsilon \, \mathit{ſin}\, ((\mu - \frac{n}{2}\rho)t + \omega)$ (art. CVII) ; or, dans le tems des éclipſes on a $u - v = 180°$ à très-peu près (art. LV) ; donc $u = \mu t = 180° + v$ donc $\mathit{ſin}.\,((\mu - \frac{1}{2}n\rho)t + \omega) = \mathit{ſin}.\,((1 - \frac{n\rho}{2\mu})(180° + v) + \omega) = -\mathit{ſin}.\,((1 - \frac{n\rho}{2\mu})v + \omega - \frac{n\rho}{2\mu}\,180°)$; d'où l'on voit que les équations provenantes de ces termes auront des périodes égales à la révolution de Jupiter, plus à $\frac{n\rho}{2\mu}$ de cette révolution.

Au reſte, on ne doit pas ſe flatter de pouvoir jamais déterminer ces ſortes d'inégalités par la ſimple théorie ; car les valeurs de ρ (art. CXV) dépendent des quantités χ, c'eſt-à-dire des maſſes des ſatellites, dont la plûpart ſont encore inconnues : Ainſi, ce n'eſt que par des obſervations multipliées & réitérées qu'on peut eſpérer de perfectionner à cet égard la théorie des deux premiers ſatellites.

CXVII.

On a apperçu de pareilles inégalités dans le mouvement du troisième & du quatrième satellite ; ce sont celles qui dans les tables de M. Wargentin répondent aux argumens E, & G.

En consultant ces tables, (voyez les tables des satellites imprimées parmi celles des planettes de M. Hallei) on trouve 1° que le nombre E acheve huit périodes exactes dans l'intervalle de cent années juliennes ; d'où il s'ensuit que chaque période est de douze ans & demi. 2° Que dans le même espace de tems le nombre G acheve $8\frac{244}{1000}$ périodes ; ce qui donne 12, 130 ans pour la durée de chaque période ; mais ce dernier élément a été réformé dans les nouvelles tables du quatrième satellite imprimées à la fin de la connoissance des mouvemens céleſtes pour l'année prochaine : suivant ces tables, le nombre C qui fait ici le même effet que le nombre G dans les premières, acheve $8\frac{254}{1000}$ périodes en cent années juliennes ; d'où l'on tire pour la durée de chaque période 12, 115 ans environ.

Or, si on imagine que chacune de ces deux équations soit représentée par un seul terme tel que $sin.((1-\frac{np}{2\mu})v + \omega - \frac{np}{2\mu}108°)$, (c'est le cas où l'orbite feroit une élipse mobile), on trouvera aisément que la quantité $\frac{np}{2\mu}$ sera pour le troisième satellite, $=\frac{377}{4332}=0{,}0870$, & pour le quatrième $=\frac{103}{4332}=0237$. On pourroit

trouver de même les valeurs des quantités ω qui dépendent des époques des argumens E & C, auſſi bien que les coeficiens $n\varepsilon$ qui expriment les plus grandes équations; mais, pour que toutes ces déterminations fuſſent exactes, il faudroit que les autres termes qui doivent entrer dans les équations du centre fuſſent nuls, à la fois, ce qui paroît aſſez difficile; d'ailleurs, les incertitudes & les variétés qu'on trouve lorſqu'on compare les obſervations de ces deux ſatellites, & qu'on veut fixer les quantités & les périodes des équations dont nous parlons, donnent tout lieu de croire que ces équations ſont plutôt des réſultats de différentes équations particulières qui ayant à-peu-près les mêmes périodes ſe confondent enſemble, comme nous l'avons déja obſervé par rapport aux deux premiers ſatellites.

CXVIII.

Je finirai ces remarques par donner un léger eſſai de calcul ſur les valeurs des quantités ρ, & pour plus de ſimplicité, je ſuppoſerai que les maſſes du premier & du quatrième ſatellite ſoient conſidérablement plus petites que celles du ſecond & du troiſième; hypothèſe qui n'a d'ailleurs rien de choquant.

Donc puiſque χ^{I} & χ^{IV} ſont des quantités fort petites, K^{I} & K^{IV} ſeront fort grandes, par conſéquent l'équation (ε) de l'article ſe réduira à très-peu-près à celle-ci $K^{I}\,K^{II}\,K^{III}\,K^{IV} - 1,633\,K^{I}\,K^{IV} = 0$, d'où l'on tire $K^{I} = 0$, ou bien $K^{IV} = 0$, ou bien $K^{II}\,K^{III} - 1,633 = 0$.

On aura de plus par les formules de l'art. LXXXVI $n\chi^{I}$, $n\chi^{II}$ &c. au lieu de $\frac{\mathfrak{C}^{I}}{\mathfrak{T}}$, $\frac{\mathfrak{C}^{II}}{\mathfrak{T}}$ &c. & ne conſervant

que les termes qui renferment χ^{II} & χ^{III}, on aura, dis je:

$\mathfrak{C}^{I} = 0,982\,\chi^{II} + 0,124\,\chi^{III}$, $\mathfrak{C}^{II} = 0,940\,\chi^{III}$, $\mathfrak{C}^{III} = 1,467\,\chi^{II}$, $\mathfrak{C}^{IV} = 0,260\,\chi^{II} + 1,139\,\chi^{III}$.

Donc puisque $K^{I} = 2\,\frac{\frac{\rho}{\mu^{I}} - \mathfrak{C}^{I}}{\chi^{I}}$, $K^{II} = 2\,\frac{\frac{\rho}{\mu^{II}} - \mathfrak{C}^{II}}{\chi^{II}}$ &c.

on a, pour les quatre valeurs de ρ, les équations suivantes

$$\frac{\rho}{\mu^{I}} - 0,982\,\chi^{II} - 0,124\,\chi^{III} = 0$$

$$\frac{\rho}{\mu^{IV}} - 0,260\,\chi^{II} - 1,139\,\chi^{III} = 0$$

$$\frac{\frac{\rho}{\mu^{II}} - 0,940\,\chi^{II}}{\chi^{II}} \times \frac{\frac{\rho}{\mu^{III}} - 1,467\,\chi^{II}}{\chi^{III}} - 0,408 = 0.$$

d'où l'on tire à-peu-près:

$$\rho = 0,731\,\mu^{III}\,\chi^{II} + 0,470\,\mu^{II}\,\chi^{III} \pm \sqrt{(0,731\,\mu^{III}\,\chi^{II} - 0,470\,\mu^{II}\,\chi^{III})^{2} + 0,408\,\mu^{II}\,\mu^{III}\,\chi^{II}\,\chi^{III}}.$$

Ainsi l'on aura les quatre valeurs de ρ, qui donneront pour chaque satellite quatre équations, dont les périodes seront de $1 + \frac{n\rho}{2\mu}$ rev. de Jupiter.

§. 5.

Des durées des éclipses des satellites de Jupiter.

CXIX.

La durée d'une éclipse dépend de quatre élémens; de la largeur de l'ombre de Jupiter, de la vîtesse du satellite,

de sa latitude, & de l'inclinaison de sa route, laquelle peut être prise pour rectiligne pendant tout le temps de l'éclipse.

Soit donc α l'angle que le demi diamètre de la section de l'ombre sous-tend au centre de Jupiter; cet angle est donné par les observations pour chacun des quatre satellites.

Supposons de plus que φ dénote la longitude du satellite, & p la tangente de sa latitude, au moment de la conjonction.

Enfin soit $\varphi - \Psi$ la longitude du satellite au moment de son entrée dans l'ombre; desorte que Ψ exprime l'angle qu'il parcourt sur le plan de Jupiter depuis l'immersion jusqu'à la conjonction.

On aura, pour la valeur de p qui y répond, $p - \frac{dp}{d\varphi}\Psi$ à peu près.

Cela posé: supposons, pour plus d'exactitude, que la section de l'ombre soit une élipse semblable à celle des méridiens de Jupiter, il est visible qu'on aura: demi-grand axe de l'élipse . . . . . $\nu\alpha$

demi-petit axe . . . . . $\nu\alpha(1 - E)$

(E étant l'élipticité comme dans l'art. XVI);

abscisse prise depuis le centre . . . $\nu\Psi$

appliquée correspondante . . . . . $\nu(p - \frac{dp}{d\varphi}\Psi)$

Donc, par la nature de l'élipse,

$$\alpha^2 - \Psi^2 : (p - \frac{dp}{d\varphi}\Psi)^2 = 1 : (1 - E)^2,$$

équation d'où l'on tirera $\downarrow$.

On aura donc $\alpha^2(1 - E)^2 - \downarrow^2(1 - E)^2 = p^2 - 2\frac{pdp}{d\varphi}\downarrow + \frac{dp^2}{d\varphi^2}\downarrow^2$; d'où l'on tire après les réductions

$$\downarrow = \frac{\frac{pdp}{d\varphi} \pm (1-E)\sqrt{\alpha^2\left(\overline{1-E}^2 + \frac{dp^2}{d\varphi^2}\right) - p^2}}{(1-E)^2 + \frac{d^2}{d\varphi^2}}$$

Le ſigne + donne la valeur $\downarrow$ pour l'immerſion, comme nous l'avons ſuppoſé, & le ſigne — donne au contraire la valeur de $\downarrow$ pour l'émerſion.

CXX.

Subſtituons maintenant $\mu t + ny$ au lieu de φ, nz au lieu de p, & de même $n\delta$ au lieu de α (car il eſt évident que la quantité α doit être du même ordre que la quantité p); on aura en ne négligeant que les termes affectés de n^3:

$$\downarrow = \pm \frac{n}{1-E}\sqrt{\delta^2(1-E)^2 - \zeta^2} + \frac{n^2}{(1-E)^2}\cdot\frac{\zeta d\zeta}{\mu dt}$$

CXXI.

Pour convertir cette expreſſion en tems, on la diviſera par la vîteſſe angulaire qui eſt $\frac{d\varphi}{dt} = \mu + n\frac{dy}{dt}$; ce qui donnera en négligeant toujours les n^3 ×

$$\pm \frac{n}{\mu(1-E)}\sqrt{\delta^2(1-E)^2 - \zeta^2} + \frac{n^2}{\mu(1-E)^2} \times \left(\frac{\zeta d\zeta}{\mu dt} \mp (1-E)\frac{dy}{\mu dt}\sqrt{\delta^2(1-E)^2 - \zeta^2}\right).$$

Donc l'intervalle entre l'immerſion & la conjonction ſera: $\frac{n}{\mu(1-E)}\sqrt{\delta^2(1-E)^2 - \zeta^2} + \frac{n^2}{\mu(1-E)^2} \times \left(\frac{\zeta d\zeta}{\mu dt} - (1-E)\frac{dy}{\mu dt}\sqrt{\delta^2(1-E)^2 - \zeta^2}\right)$

& l'intervalle entre la conjonction & l'emmerſion ſera :

$$\frac{n}{\mu(1-E)}\sqrt{\delta^2(1-E)^2-\zeta^2}+\frac{n^2}{\mu(1-E)^2}\times\left(\frac{\zeta d\zeta}{\mu dt}+(1-E)\frac{dy}{\mu dt}\sqrt{\delta^2(1-E)^2-\zeta^2}\right).$$

Par conſéquent la demi-durée ſera

$$\frac{n}{\mu(1-E)}\sqrt{\delta^2(1-E)^2-\zeta^2}-\frac{n^2}{\mu(1-E)}\cdot\frac{dy}{\mu at}\sqrt{\delta^2(1-E)^2+\zeta^2}$$

CXXII.

Il paroît que les Aſtronomes ont toujours ſuppoſé juſqu'à préſent, que les durées des éclipſes des ſatellites étoient les mêmes avant, & après la conjonction ; ce qui n'eſt pas vrai à la rigueur, la différence étant de $\frac{n^2}{\mu(1-E)^2}\cdot\frac{\zeta d\zeta}{\mu dt}$, c'eſt-à-dire de $\frac{pdp}{\mu^2(1-E)^2dt}$; d'où l'on voit que ces durées ne peuvent être égales que dans deux cas ; 1° lorſque $p=0$, c'eſt-à-dire que la latitude du ſatellite eſt nulle, & que par conſéquent l'éclipſe eſt centrale ; 2° lorſque $dp=0$, ſavoir lorſque la latitude eſt la plus grande, ou bien que le ſatellite eſt dans les limites.

CXXIII.

Suppoſons maintenant que l'on ait obſervé la demi-durée d'une éclipſe de ſatellite, laquelle ſoit de Δ ſecondes ; on aura en remettant pour $n\delta$, & nz, α & p,

$$\Delta=\frac{1-n\frac{dy}{\mu dt}}{\mu(1-E)}\sqrt{\alpha^2(1-E)^2-p^2}$$

où

où il faudra prendre pour μ, 360° divisés par le temps périodique réduit en secondes ; ou bien on convertira immédiatement la durée Δ en degrés, & l'on aura simplement

$$\Delta = \frac{1 - n\frac{dy}{\mu dt}}{1 - E}\sqrt{a^2(1-E)^2 - p^2}$$

d'où l'on tire

$$p = (1-E)\sqrt{a^2 - \Delta^2\left(1 + 2n\frac{dy}{\mu dt}\right)}.$$

c'est la tangente de la latitude du satellite au moment de la conjonction,

CXXIV.

Ayant ainsi la latitude, & connoissant d'ailleurs le lieu du nœud par les observations des plus grandes durées on trouvera aisément l'inclinaison de l'orbite, il n'y aura pour cela qu'à diviser la tangente de la latitude trouvée par le sinus de l'élongation de Jupiter, vu du Soleil, au nœud du satellite ; le quotient sera la tangente de l'inclinaison de l'orbite.

C'est ainsi que tous les Astronomes en ont usé jusqu'ici pour déterminer la position des plans des orbites des satellites.

Mais si on pouvoit connoître avec assez de précision par la théorie le moment de la conjonction, on pourroit trouver immédiatement l'inclinaison de la route du satellite dans l'ombre par les observations des immersions & des émersions ; car nous avons vu que la différence entre les durées de l'éclipse avant & après la conjonction doit être $= \frac{pdp}{\mu^2(1-E)^2dt}$; donc, divisant cette différence par

$\frac{P}{\mu(1-E)^2}$ on aura $\frac{dn}{\mu dt} = \frac{dp}{d\varphi}$ tangente de l'inclinaison de la route du satellite.

Mais outre que cette méthode exigeroit dans les tables des satellites un degré de précision dont elles sont encore bien éloignées, elle seroit encore le plus souvent impraticable, à cause qu'on ne peut pas toujours observer à la fois les immersions & les émersions.

Je finirai ces recherches par dire un mot des variations qu'on a aperçues jusqu'ici dans les positions des orbites des satellites.

§. 6

Des inclinaisons, & des nœuds des Satellites.

CXXV.

Le premier Satellite est le seul dont l'orbite paroisse à peu près fixe; son inclinaison est selon les tables de 3°, 18′; & le lieu du nœud à 10ˢ, 14°, 30′; du moins les demi-durées observées quadrent assez bien avec ces élémens.

Le nœud du second paroît aussi fixe, mais son inclinaison est sujette à un changement considérable, dont la période est de 31 ans; la plus grande inclinaison est de 3°, 47′, 27″, & la plus petite de 2°, 29′, 2″ de sorte que la variation est de 1°, 18′, 25″ ou bien de 39′, 12″ tantôt en plus, tantôt en moins, ce qui fait environ $\frac{1}{7}$ de l'inclinaison moyenne.

CXXVI.

Un changement si considérable ne sauroit s'expliquer que par les formules de l'art. CIX. En effet, supposons

que la valeur de z^{II} ne renferme que deux termes, ou au moins que les deux autres soient assez petits pour pouvoir être négligés, desorte que l'on ait simplement :

$$z^{II} = \lambda^{II}\,1\ \sin.\left((\mu^{II} + \tfrac{n}{2}\sigma\,1)t + n^{II}\,1\right) + \lambda^{II}\,2\ \sin.\left((\mu^{II} + \tfrac{n}{2}\sigma\,2)t + n^{II}\,2\right).$$

On aura, en nommant $n\tau^{II}$ la tangente de l'inclinaison de l'orbite, & ψ^{II} la distance du satellite au nœud ascendant,

$$\tau^{II} = \sqrt{z^{II\,2} + \frac{dz^{II\,2}}{\mu^{II\,2}\,dt}} \quad \& \quad tang.\,\psi^{II} = \frac{i^{II}\mu^{II}\,dt}{dz^{II}} \text{ (art. CXI)}$$

savoir, en négligeant les termes de l'ordre de n,

$$\tau^{II} = \sqrt{\lambda^{II}\,1^2 + \lambda^{II}\,2^2 + 2\lambda^{II}\,1\lambda^{II}\,2\ cos.\left(\tfrac{n}{2}\sigma\,1 - \sigma\,2, t + n^{II}\,1 - n^{II}\,2\right)}$$

$$\& \quad tang.\,\psi^{II} = \frac{\lambda^{II}\,1\ \sin.\left((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma\,1\,t + n^{II}\,1\right) + \lambda^{II}\,2\ \sin.\left(\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma\,2\,t + n^{II}\,2\right)}{\lambda^{II}\,1\ cos.\left((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma\,1\,t + n^{II}\,1\right) + \lambda^{II}\,2\ cos.\left((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma\,2,t + n^{II}\,2\right)}$$

Donc la plus grande valeur τ^{II} sera $= \lambda^{II}\,1 + \lambda^{II}\,2$, & la plus petite $= \lambda^{II}\,1 - \lambda^{II}\,2$; donc $n\,(\lambda^{II}\,1 + \lambda^{II}\,2) = tang.\,3^\circ\,47'\,27''$, & $n\,(\lambda^{II}\,1 - \lambda^{II}\,2) = tang.\,2^\circ\,29'\,2''$

par conséquent $\frac{\lambda^{II}\,1 + \lambda^{II}\,2}{\lambda^{II}\,1 - \lambda^{II}\,2} = \frac{tang.\,3^\circ\,47'\,27''}{tang.\,2^\circ\,29'\,2''} = 1,527$

d'où l'on tire $\frac{\lambda^{II}\,2}{\lambda^{II}\,1} = \frac{0,527}{2,527} = 0,208 =$ environ $\frac{1}{5}$

Maintenant il est clair que la valeur de τ^{II} redeviendra la même lorsque l'angle $\frac{n}{2}(\sigma\,1 - \sigma\,2)t$ se trouvera augmenté ou diminué de 360° pris une ou plusieurs fois; donc puisque la longitude moyenne du second satellite est exprimée par $\mu^{II}t$, la période de la variation de τ^{II} sera

de $\pm \frac{n}{2\mu^{II}}(\sigma\,1 - \sigma\,2)$ révolutions de ce même satellite.

Or cette période est, selon les observations, de 31 ans,

ce qui répond à peu près à 3189 rev. du second satellite ; donc il faudra que $\pm$

$$\frac{n}{2\mu^{II}}(\sigma 1 - \sigma 2) = \frac{1}{3189} = 0,0003136.$$

CXXVII.

Ayant trouvé $\lambda^{II}\,2 = \frac{1}{5}\lambda^{II}\,1$, on pourra simplifier les expressions de τ^{II}, & de tangente ψ^{II} & l'on aura à très-peu près :

$$\tau^{II} = \lambda^{II}\,1\left(1 + \tfrac{1}{5}\,cos.\left(\tfrac{n}{2}(\sigma 1 - \sigma 2)t + \eta^{II}1 - \eta^{II}2\right)\right)$$

$$\&\ tang.\,\psi^{II} = tang.\left((\mu^{II} + \tfrac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II}1\right) + \tfrac{1}{5} \times \frac{sin.\left((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 2)t + \eta^{II}2\right)}{cos.\left((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II}1\right)}$$

$$- \tfrac{1}{5} \times \frac{cos.\left((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 2)t + \eta^{II}2\right) \times sin.\left((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II}1\right)}{cos.\left((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II}1\right)^2}$$

Soit fait $\psi^{II} = (\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II}1 + q$, q étant une quantité fort petite, on aura, $tang.\,\psi$

$$= tang.\left((\mu^{II} + \tfrac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II}1\right) + \frac{q}{cos.\left((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II}1\right)^2}$$

à peu près ; donc $q = \frac{1}{5}\,sin.\left((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 2)t + \eta^{II}2\right) \times cos.\left((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II}\right) - \frac{1}{5}\,cos.\left((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 2)t + \eta^{II}2\right) \times sin.\left((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II}1\right) = -\frac{1}{5}\,sin.\left(\frac{n}{2}(\sigma 1 - \sigma 2)t + \eta^{II}1 - \eta^{II}2\right)$;

donc $\psi^{II} = (\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II}1 - \frac{1}{5}\,sin.\left(\frac{n}{2}(\sigma 1 - \sigma 2)t + \eta^{II} - \eta^{III}2\right)$.

D'où l'on voit 1° que le mouvement du nœud sera de $\frac{n\sigma 1}{2\mu^{II}}$ par révolution ; 2° que ce mouvement sera sujet à une équation analogue à celle de l'inclinaison, laquelle montera à $\frac{57° 17'}{5} = 11° 27'$.

Ces derniers réſultats ne s'accordent pas à la vérité avec les obſervations des demi-durées, par leſquelles il paroît que les nœuds ſont à très-peu près fixes; mais j'obſerve 1°, que la quantité $\sigma 1$ peut être nulle, auquel cas le nœud n'aura plus qu'un mouvement d'oſcillation. 2° Qu'il eſt impoſſible que l'attraction produiſe un changement dans l'inclinaiſon ſans produire en même-tems un changement analogue dans le lieu du nœud. Voyez plus bas, art. CXXX.

CXXVIII.

Voyons maintenant comment on pourroit ſatisfaire à ces deux conditions, ſavoir $\pm \frac{n}{2\mu^{II}} (\sigma 1 - \sigma 2) = 0$, 0003136, & $\sigma 1 = 0$.

Pour cela, nous conſerverons ici les hypothèſes de l'art. CXVIII, moyennant quoi l'équation (ζ) de l'art. CXV ſe réduira à celle-ci : $K^{I} K^{II} K^{III} K^{IV} - 5,675\, K^{I} K^{IV} = 0$, laquelle donne $K^{I} = 0$, ou bien $K^{IV} = 0$, ou bien $K^{III} K^{IV} - 5,675 = 0$; cette dernière équation ſe réduit à celle-ci :

$$\left(\frac{\sigma}{\mu^{II}} - \pi^{II}\right)\left(\frac{\sigma}{\mu^{III}} - \pi^{III}\right) - \frac{5,675}{4}\chi^{II}\chi^{III} = 0,$$

ou bien $\sigma^2 - (\mu^{II}\pi^{II} + \mu^{III}\pi^{III})\sigma + \mu^{II}\mu^{III}\pi^{II}\pi^{III} - 1,419\,\mu^{II}\mu^{III}\chi^{II}\chi^{III} = 0$.

Or, ſuivant les mêmes hypothèſes, on a $\pi^{II} = 0,942\,\chi^{III}$, & $\pi^{III} = 1,506\,\chi^{II}$ à peu près (art. LXXXVI) donc $\pi^{II}\pi^{III} = 0,942 \times 1,506\,\chi^{II}\chi^{III} = 1,419\,\chi^{II}\chi^{III}$; donc faiſant pour plus de ſimplicité $\chi^{III} = m\,\chi^{II}$, & mettant $0,496\,\mu^{II}$ au lieu de μ^{III}, on aura l'équation :

$$\sigma^2 - (0,942\,m + 0,747)\,\mu^{II}\chi^{II}\sigma = 0;$$

d'où l'on tire

$$\sigma = 0, \& \sigma = (0,942\, m + 0,747)\, \mu^{II} \chi^{II}.$$

Donc on satisfera à nos conditions en prenant pour σ 1 la première de ces deux racines, & pour σ 2 la seconde, & supposant

$\frac{n}{2}(0,942\, m + 0,747)\, \chi^{II} = 0,0003136$, ce qui donne à cause de $n\chi^{II} = \frac{C^{II}}{\pi^2} = 0,00002417$ (art. LXIII) $m = 27$ à très peu près.

Il est vrai que cette détermination ne s'accorde point avec ce que nous avons trouvé dans l'art. LXVIII ; mais cela n'est point surprenant vu le grand nombre des quantités que nous avons négligés dans ce calcul, aussi ne l'ai-je donné ici que comme un essai, me réservant de les reprendre dans quelqu'autre occasion.

CXXIX.

La ppsition de l'orbite du troisième satellite est aussi sujette à des variations fort remarquables ; son inclinaison paroît avoir été la plus petite en 1697, où elle n'étoit que d'environ 3°, & depuis-lors elle a toujours été en augmentant, de sorte qu'en 1763 on l'a trouvée de 3° 27′, ce qui fait 27′ en 66 ans ; & par conséquen environ 26″ par an.

Quoiqu'on ne connoisse pas encore le terme de cette augmentation, il y a cependant tout lieu de croire qu'elle est périodique comme celle du second satellite ; car suivant la comparaison que M. Maraldi a faite d'un très-grand nombre d'observations des demi-durées depuis 1671, jusqu'en 1763 l'inclinaison se trouve à très-peu près la même à intervalles égaux avant & après 1697.

A l'égard du nœud, les tables de M. Wargentin le suppoſent fixe à 10 16° 3′, mais M. Maraldi trouve qu'il doit avoir un mouvement direct d'environ 3′ par an; ſelon ce ſavant Aſtronome il étoit à 10 1° 52′ en 1697, & à 10 17° 9′ en 1763.

Ces variations peuvent s'expliquer de la même manière que celles du ſecond ſatellite, pourvu qu'on ſuppoſe que la période de l'inclinaiſon ſoit beaucoup plus longue; faiſons-la de r révolutions du troiſième ſatellite; il faudra que l'on ait $\pm \frac{n}{2\mu^{III}}(\sigma 1 - \sigma 2) = \frac{1}{r}$; prenons pour $\sigma 1$ la même racine que ci-deſſus, & pour $\sigma 2$ une des deux autres racines, par exemple celle qui réſulte de l'équation $K^{I} = 0$, ſavoir $\sigma 2 = \mu^{I}\tau^{I} = \mu^{I}(0,9881\chi^{II} + 0,1267\chi^{III})$. (art. LXXXVI); mettons au lieu de μ^{I}, $4,044\mu^{II}$, au lieu de χ^{III}, $m\chi^{II}$, & au lieu de $n\chi^{II} = \frac{\mathfrak{C}''}{\mathfrak{T}^2}$ ſa valeur $0,00002417$, on aura $\frac{n\sigma 2}{2\mu^{III}} = 0,00004796 + 0,000006155\,m = \frac{1}{r}$; ſi $m = 10$, on auroit environ $r = 10000$, ce qui donneroit à peu près 195 ans pour la durée de la période.

Maintenant, ſi on dénote par $n\tau^{III}$ la tangente de l'inclinaiſon, & par Ψ^{III} la diſtance au nœud, & qu'on ſuppoſe $\lambda^{III}\,2 = \nu\lambda^{III}\,1$, ν étant une fraction aſſez petite, on aura comme dans l'art. CXXVI,

$$\tau^{III} = \lambda^{III}\,1\,(1 + \nu\,cof.\,(\tfrac{n}{2}(\sigma 1 - \sigma 2)\,t + \eta^{III}\,1 - \eta^{III}\,2)),$$

& $\Psi^{III} = (\mu^{III}\,t + \frac{n}{2}\sigma 1)\,t + \eta^{III}\,1 - \nu\,\mathit{fin.}\,(\frac{n}{2}(\sigma 1 - \sigma 2)\,t + \eta^{III}\,1 - \eta^{III}\,2)$,

ou bien (à cauſe de $\sigma\, 1 = 0$, & de $u^{III}\, t =$ à la longitude moyenne du ſatellite que nous dénoterons par u^{III})

$$\tau^{III} = \lambda^{III}\, 1\, (1 + \nu\, cof. \left(\frac{n\sigma 2}{2\mu^{III}}\, u^{III} - \eta^{III}\, 1 + \eta^{III}\, 2 \right)$$

&

$$u^{III} - \psi^{III} = - \eta^{III}\, 1 - \nu\, \mathit{ſin}. \frac{n\sigma 2}{2\mu^{III}}\, u^{III} - \eta^{III}\, 1 + \eta^{III}\, 2)$$

où $u^{III} - \psi^{III}$ eſt la longitude du nœud.

Suppoſons, ce qui eſt permis, que la longitude moyenne u^{III} ſoit comptée depuis le point, où ſe trouvoit le ſatellite au moment de la plus petite inclinaiſon de ſon orbite, on aura $cof.\, (- \eta^{III}\, 1 + \eta^{III}\, 2) = - 1$, donc $- \eta^{III}\, 1 + \eta^{III} 2 = 180°$; par conſéquent les formules précédentes deviendront :

$$\tau^{III} = \lambda^{III}\, 1\, (1 - \nu\, cof. \frac{n\sigma 2}{2\mu^{III}}\, u^{III})$$

$$u^{III} - \psi^{III} = - \eta^{III}\, 1 + \nu\, \mathit{ſin}. \frac{n\sigma 2}{2\mu^{III}}\, u^{III}.$$

Donc la vîteſſe du nœud ſera à la vîteſſe moyenne du ſatellite comme $\nu\, \frac{n\sigma 2}{2\mu^{III}}\, cof. \frac{n\sigma 2}{2\mu^{III}}\, u^{III}$ à 1 ; d'où l'on voit que le mouvement du nœud ſera direct tant que $cof. \frac{n\sigma 2}{2\mu^{III}}\, u^{III}$ ſera poſitif, c'eſt-à-dire tant que l'inclinaiſon ſera au deſſous de la moyenne.

Au reſte, ſi je donne ici ces formules, ce n'eſt pas que je les regarde comme fort exactes & conformes au mouvement du troiſième ſatellite ; mon objet eſt ſimplement de donner une idée de la manière, dont on pourroit

pourroit rendre raiſon de l'augmentation d'inclinaiſon, & du mouvement direct des nœuds de ce ſatellite ; phénomènes qui paroiſſent aſſez difficiles à expliquer.

CXXX.

Le quatrième ſatellite eſt auſſi dans le même cas que le troiſième à l'égard du mouvement des nœuds. M. Maraldi l'a trouvé d'environ 5′ 33″ par an ſuivant l'ordre des ſignes ; mais M. Wargentin ne le fait que d'environ 4′, 24″ dans ſes nouvelles tables.

Quant à l'inclinaiſon, ils la ſuppoſent conſtante & de 2° 36′ ; mais il y a tout lieu de croire que cette détermination n'eſt pas tout à fait exacte ; car il paroît difficile que les nœuds aient un mouvement direct, tandis que l'inclinaiſon demeure la même. D'ailleurs, M. Wargentin remarque que les nœuds ont du être ſtationaires vers la fin du ſiècle dernier, ce qui prouve, ce me ſemble, qu'ils étoient auparavant retrogrades, & que leur mouvement n'eſt qu'une eſpèce d'oſcillation, comme nous l'avons déja ſuppoſé, à l'égard du troiſième ſatellite ; or, je dis qu'un tel mouvement ne ſçauroit avoir lieu dans le nœud, ſans qu'il ait, dans l'inclinaiſon, une variation analogue ; c'eſt de quoi il eſt facile de ſe convaincre en jettant les yeux ſur la formule $d\lambda\, \mathit{ſin.}\,(\varphi - \varepsilon) = \lambda\, \mathit{coſ.}\,(\varphi - \varepsilon)\, d\varepsilon$ de l'art. III, laquelle exprime la relation qu'il doit avoir en général entre le mouvement du nœud, & la variation de l'inclinaiſon.

Je fais cette remarque, moins pour faire naître des doutes ſur les réſultats de ces deux ſavans Aſtronomes, que pour les engager à ſe rendre de plus en plus attentifs à la détermination d'élémens ſi délicats & ſi difficiles.

Au reſte, quand on ſera bien aſſuré de l'exactitude de ces élémens, on pourra alors ſe ſervir de nos formules pour donner à la théorie du quatrième ſatellite de nouveaux degrés de perfection.

FIN.

DE L'ARRIMAGE
DES VAISSEAUX.

MÉMOIRE pour concourir au prix proposé par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de Paris pour l'année 1765.

MÉMOIRE
SUR L'ARRIMAGE
DES VAISSEAUX.

Amoris patriæ pignus.

IL n'eſt, pour l'arrimage, aucune règle connue. On arrime encore aujourd'hui, comme on faiſoit au milieu du ſiècle dernier. On donne aux vaiſſeaux neufs la quantité de leſt aſſignée aux vaiſſeaux du même rang. On le place également dans tous de la même façon ; & ſi, lorſque l'arrimage eſt fini, le tirant d'eau n'eſt pas tel qu'on l'avoit projetté, on corrige cette différence avec du leſt qui eſt en réſerve, & que l'on tranſporte à une des extrémités, pour rappeller le vaiſſeau

au tirant d'eau que l'on desire. On tâtonne un peu moins à la seconde campagne ; & après plusieurs voyages, on se fait une espèce de règle pour la quantité de lest à mettre, & pour le tirant du vaisseau, en mettant ce lest.

Les Constructeurs un peu instruits, ne se trompent pas sur la quantité du lest à mettre dans les vaisseaux neufs, du moins pour ce qui regarde la hauteur de la batterie, qu'ils se sont proposés de donner. Il leur suffit pour cela de dresser un état exact de tous les poids qui entrent dans la construction & l'armement des vaisseaux ; & cet état ne demande pas de grandes discussions : mais le plus grand nombre d'entr'eux ne m'a pas paru pousser plus loin ses recherches. Il est rare qu'ils déterminent, avec précision, la différence du tirant d'eau, (le vaisseau étant, comme on dit, sur son lest,) & je les ai vu se tromper. Cependant, quoique cette connoissance influe sur le placement des autres matières, autres que le lest, elle est moins importante que l'examen de l'arrimage, par rapport à la stabilité. Cet examen n'est pas plus minutieux que celui des pesanteurs ; & on ne peut procéder à celui-ci, sans rassembler les matériaux nécessaires pour l'autre. Il est vrai que ce n'est pas tant la stabilité que l'on doit chercher que la quantité de cette stabilité, & son influence sur l'allure, le tangage, & le roulis ; mais c'est toujours beaucoup que d'avoir reconnu que le vaisseau portera la voile. Il eut été à desirer qu'on s'en fût occupé dans la construction de tous les vaisseaux, aulieu de comparer simplement à l'œil les vaisseaux à faire aux vaisseaux construits & connus.

Voilà, en gros, quelle est la méthode usitée pour l'arrimage des vaisseaux de guerre. Celle pour les vaisseaux marchands est, à plus forte raison, livrée au tâtonnement.

La destination des Bâtimens de commerce varie à toutes les campagnes, & quelquefois même dans le courant d'un voyage. Ces navires, dont l'objet est de transporter

beaucoup, ſont en général conſtruits pour naviguer avec une petite quantité de leſt, & c'eſt ſelon la légereté ou la peſanteur des marchandiſes qu'ils embarquent, qu'ils mettent, ou ne mettent pas du leſt. Dans le premier cas, ils font un petit retranchement, une eſpèce de foſſe, à l'entour du grand mât; & là, ils entaſſent le leſt qu'ils jugent néceſſaire: dans l'autre, ils matelaſſent la calle avec des matières légeres, telles que les fagots pour élever le centre de gravité de la charge, & rendre les mouvemens du roulis moins rudes.

Dans les navires de commerce, comme dans les vaiſſeaux de guerre, on n'examine qu'à la mer, & pendant le cours de la navigation, l'influence de l'arrimage ſur l'aſſiette du Bâtiment, ſur ſon allure, ſa ſenſibilité au gouvernail, & à tous les mouvemens de converſion.

Un vaiſſeau porte-t-il mal la voile? on met dans la calle les canons les plus élevés.

Sa marche eſt-elle rallentie? on lâche les coins des mâts, les haubans, les étais. On fait pancher les mâts en avant ou en arrière. On tranſporte ſucceſſivement, dans ces deux parties, des poids pour les faire plonger davantage; ainſi, tel vaiſſeau étoit trop ſur l'avant qui marche mieux, cette partie étant moins ſubmergé *& vice verſa* de l'arrière.

Le gouvernail ne ſe fait-il pas aſſez ſentir, comme s'expriment les Marins? on fait encore caller l'arrière.

Mais ce n'eſt pas là ce que demande l'Académie. La deſcription de ces méthodes n'apprend pas grand choſe, & un plus long détail ſeroit inutile. C'eſt la façon la meilleure d'arrimer tous les vaiſſeaux poſſibles, & l'examen particulier de l'arrimage en entier ſur toutes les qualités que l'on exige des vaiſſeaux, qui fait ſans doute l'objet de la queſtion.

Par le mot d'arrimage, on entend non-ſeulement la diſtribution du leſt & des autres matières peſantes, qui

entrent dans la calle des vaiſſeaux ; mais encore le placement des mâts & les proportions des voiles. Ces deux conſidérations menent naturellement à l'examen de la figure des vaiſſeaux, parce que ce n'eſt que relativement à cette figure que la mâture eſt déterminée & l'arrimage diſtribué. Il faudroit donc, afin de donner plus de jour à la ſolution du problême propoſé, entrer dans un examen particulier de la figure des vaiſſeaux ; de-là, & par une ſuite naturelle, il faudroit parler de la mâture, & enſuite de l'arrimage. Ce ſeroit, je penſe, la marche la plus naturelle, pour rendre ce Mémoire utile ; mais, que pourroit-on dire ſur la figure des vaiſſeaux & ſur la mâture, qui n'ait déja été écrit par M. Duhamel, M. Camus, M. Bouguer, M. Euler, M. Bernoully, M. Hugens, M. Pitot, &c. Tous ces Auteurs ne nous ont rien laiſſé à deſirer, & il eſt difficile de ne pas les répéter.

CONSTRUCTION.

L'Architecture navale a fait des progrès ; mais il s'en faut bien qu'elle ſoit parvenue à ce point de perfection, dont elle eſt ſuſceptible. Quelques Conſtructeurs plus inſtruits que leurs dévanciers, ont un peu éclairé, par leurs études, cette partie de la Marine, long-temps livrée à la pure routine ; mais trop timides dans leurs eſſais, & ne conſultant pas aſſez la théorie, qui les rebutoit peut-être par ſa ſéchereſſe, ou les effrayoit par les changemens qu'elle indiquoit à faire à ce que la pratique avoit conſacré, leur travail n'a pas toujours porté le ſceau de la certitude. Ceux qui ont eu le plus de réputation ſe ſont long-temps contentés de calculer le déplacement, & de le comparer, comme on a dit plus haut, à l'état de peſanteur. Quelques-uns ont dreſſé ces états avec beaucoup de préciſion, & entr'autres choſes y ont diſtingué les poids de la partie ſubmergée, d'avec ceux qui ſont hors de l'eau. Voici

quelle étoit la raiſon de cette diſtinction. Ils croyoient par cette comparaiſon juger de la ſtabilité, & cette voie d'aproximation a eu quelque-temps du crédit. Les bons livres que nous avons ſur cette partie, fait tomber cet eſpèce de ſyſtême, dont on ne parle ici, que pour montrer combien on étoit loin il y a vingt ans de ſçavoir calculer la ſtabilité. La marche en eſt aujourd'hui connue de quelques-uns. Ils calculent le centre de gravité de la partie ſubmergée, qu'ils regardent comme homogene; ils déterminent la poſition du métacentre, & comparent ces deux termes à ceux des autres vaiſſeaux. Enfin, pour dernier calcul, ils examinent la pouſſée de l'eau ſur la proue dans la route directe.

Voilà l'état actuel de l'Architecture. Quelques Conſtructeurs étendent davantage ces calculs; mais le plus grand nombre ſe tient au ſimple déplacement, pour ne pas ſe tromper au moins ſur la hauteur de la batterie. Tout le reſte, ils l'arrangent par la voie de la comparaiſon toujours tâtonneuſe & peu ſûre; auſſi courent-ils riſque de ſe tromper, quand ils ont à conſtruire des vaiſſeaux peu connus, comme le ſont ceux à trois ponts.

D'ailleurs, comment examiner & calculer l'arrimage dans tous les ſens, ſi on ne pouſſe pas plus loin les calculs ſur la figure de la coque & ſur la voilure.

Ainſi, après avoir trouvé la hauteur de la batterie, il eſt de la plus grande conſéquence de chercher la ſtabilité, & par conſéquent le centre de gravité du vaiſſeau armé; & alors même, il faut de toute néceſſité ſuppoſer un arrimage quelconque. Cela fait, on paſſe au calcul de la pouſſée de l'eau ſur la proue dans les routes directes & obliques; & par ce calcul, on détermine la poſition & les dimenſions de la mâture, que l'on n'avoit fait encore que ſuppoſer. Ce même calcul, & celui de l'arrimage rectifient les opérations que l'on a commencées ſur cette voilure par rapport à la ſtabilité; & l'on voit (ſi le point véli-

que doit être placé plus haut ou plus bas) ce que l'on gagnoit ou perdoit de ſtabilité. On examine après le choc de l'eau ſur le gouvernail, & l'on juge ſi le vaiſſeau y ſera ſenſible, & s'il aura beſoin d'aider ou d'être aidé par les voiles. Ces opérations finies, il me ſemble que l'on peut paſſer à l'examen du roulis par rapport à la diſtribution de l'arrimage, parce que les mâts & les voiles ſont déterminés d'une façon invariable, & qu'on n'a plus à s'occuper que d'un objet très-ſimple, ne s'agiſſant plus que d'un nouvel arrangement de leſt.

MATURE.

Je viens de dire ſur la mâture tout ce qu'il faut, puiſque j'ai demandé que ſa poſition, ſes dimenſions, & par conſéquent le point vélique fuſſent déterminés. Je n'examinerai pas ici la défectuoſité des règles que l'on a ſuivi & que l'on ſuit encore dans quelques Ports. Il paroîtra toujours inconſéquent de régler la voilure & les agrêts ſur la ſimple largeur, comme ſi deux vaiſſeaux, également larges, devoient porter également la voile, & comme ſi la largeur influoit ſeule ſur la ſtabilité. De-là, tant de changemens dans ces mâtures, après la premiere ou deuxieme campagne des vaiſſeaux. Il eſt pluſieurs de nos frégates de 26 canons de 12, dont les changemens ſur la mâture, ont été pouſſés ſi loin, qu'elles n'ont plus différé (pour cette partie) des frégates de 50 canons. Les calculs l'avoient dit avant de les mettre en mer pour la premiere fois; mais on ne pouvoit concevoir qu'une frégate qui étoit moins large que l'autre, pût porter une auſſi grande mâture; on ne faiſoit pas attention que cette frégate de 26 n'avoit qu'une ſeule batterie, & que la deuxieme batterie de celle de 50 faiſoit perdre, par l'exhauſſement du centre de gravité total, ce que l'autre gagnoit par le rabaiſſement

rabaiſſement de ce centre. Une pratique un peu plus réfléchie auroit du l'apprendre, avant que la théorie décidât ſans replique.

L'eſſai que j'ai fait ſur un vaiſſeau a fait un peu revenir les Eſprits praticiens; mais le préjugé général contre la figure, la voilure & l'arrimage de ce Bâtiment fut pouſſé à l'excès, l'expérience calma les eſprits.

ARRIMAGE.

Tout paroît dit ſur l'arrimage, puiſqu'on ne peut déterminer la figure du vaiſſeau, ſa mâture & ſa voilure, ſans entrer dans le détail de ce qui conſtitue l'arrimage. On peut cependant pouſſer plus loin la diſcuſſion, mais il eſt bien difficile de ne pas ſe répéter. Néanmoins pour dire des choſes utiles, il n'y a qu'à chercher des exemples & analyſer les cas qui ſe rencontrent le plus ſouvent dans les Ports.

Soit un vaiſſeau pris ſur les ennemis, dont on n'a pas eu le temps de reconnoître les qualités, ou dans lequel on en a reconnu de très-mauvaiſes. Ou bien ſoit un de nos vaiſſeaux qui manque des qualités les plus néceſſaires, comme de la hauteur de la batterie, de la ſtabilité, & de la ſenſibilité au gouvernail, & d'être ſujet à manquer dans ſes mouvemens de converſion.

STABILITÉ.

Le plus grand défaut que puiſſe avoir un vaiſſeau, c'eſt, ſans contredit, celui de ne pas porter la voile. Les conſéquences en ſont terribles. Un pareil Bâtiment ne marche pas. S'il eſt affalé ſur une côte, il ne peut s'en élever, parce que c'eſt le cas de faire de la voile, & il ne peut la porter. S'il ſe bat, c'eſt toujours avec déſavantage, même contre un ennemi inférieur, parce que celui-ci le

force de ſe battre au vent, & l'empêche de ſe ſervir de ſa premiere batterie.

Les moyens les plus généraux pour corriger ce défaut, ſont de raſer l'œuvre morte, de ſubſtituer des canons de moindre calibre, de diminuer en tout ſens la voilure, & même de les ſouffler; mais ces moyens, en effaçant une partie des défauts, en font naître d'autres.

1°. Si on raſe l'œuvre morte, un vaiſſeau ennemi de ce rang le domine avec ſa mouſqueterie. 2°. Si on lui ſubſtitue des canons de moindre calibre, il oppoſe des forces inégales à un vaiſſeau de ſon rang qui le combat. 3°. Si on diminue la voilure, on ne gagne du côté de la ſtabilité, qu'en perdant du côté de la vîteſſe, parce que ce Bâtiment peut fort bien avoir une proue de grande réſiſtance, à laquelle la mâture qu'il avoit ci-devant ne ſuffiſoit peut-être pas.

Je crois avoir trouvé un moyen plus ſimple, moins couteux, & qui ne diminueroit en aucune façon la force du vaiſſeau ni ſa vîteſſe. Ce moyen le voici. C'eſt de lui mettre une contrequille de fer, tenue par des étriers. Cette contrequille ſeroit plus ou moins peſante, ſelon qu'on auroit, ou vu, ou calculé, le beſoin qu'en a le vaiſſeau chargé par le vent pour être rappellé à ſa premiere aſſiette.

Le calcul fait ſur un vaiſſeau de ſoixante canons que je ne nommerai pas, parce que l'Académie ne veut pas qu'il ſoit rien dit qui puiſſe déſigner le nom de l'Auteur, & celui fait ſur un vaiſſeau à trois ponts qui ne peut pas porter toute ſon artillerie, m'ont clairement démontré, que dans le premier vaiſſeau une contrequille de cinq pouces un quart d'épaiſſeur, eût ſuffi, & dans l'autre une de neuf & demi: Ces calculs ne ſont pas même minutieux, parce que je ne touchai ni à la coque du vaiſſeau, ni à ſa voilure, ni à ſon artillerie. Je ne fis autre choſe pour ces deux vaiſſeaux, après avoir cherché le centre de gra-

vité du ſyſtême, non compris celui d'une partie des canons de la ſeconde batterie & des gaillards, que de chercher à balancer par la quille de fer que je ne ſuppoſai d'abord que de deux pouces pour le premier vaiſſeau, & de quatre pour le ſecond, la quantité de canons que l'on avoit reconnu excédente & que je pouvois remplacer à meſure que je gagnois de la ſtabilité. Ce moyen applicable dans tous les cas, m'a paru devoir être le premier employé, parce qu'il eſt plus prompt, moins couteux, & qu'il conſerve toute ſon artillerie. Je l'ai tu, juſqu'à préſent, mais j'ai dit que j'avois une propoſition à faire au premier armement du vaiſſeau à trois ponts, dont j'ai parlé ci-deſſus, & que cette propoſition tendoit à conſerver à ce vaiſſeau toute ſon artillerie & toute ſa voilure, je n'y ai pas ajouté les agrêts, parce que j'ai vu ſenſiblement qu'ils pouvoient être réduits, & cette réduction eſt entrée pour quelque choſe dans l'épaiſſeur de la contrequille projettée, qui ſans cela devroit être plus forte. Je n'ajouterai pas que cette contrequille doit être aiguë en avant à cauſe de la réſiſtance du fluide, & quarrée ou obtuſe à l'arrière, ſelon que les vaiſſeaux ont beſoin d'un gouvernail plus ou moins plongeant. Tous ces petits détails vont de ſuite & ſont ſous entendus.

Ce même moyen, je l'appliquerois ſur les vaiſſeaux marchands. Ils ne mettroient plus de leſt quand ils tranſportent des marchandiſes légeres, & cette contrequille ne leur nuiroit pas quand ils ſeroient chargés de munitions peſantes, parce que jamais ces marchandiſes n'emcombrent la cale & il n'y auroit alors qu'à mettre un fardage un peu plus exhauſſé. Dans les deux cas ils iroient mieux au plus près, qualité qui leur manque à tous.

Ce moyen je l'appliquerois également ſur les vaiſſeaux de guerre, qui font de longues miſſions & qui embarquent pour ſept à huit mois de vivres. Cette contrequille

leur tiendroit lieu d'une grande partie de lest, & par-là ils porteroient une plus grande quantité de barriques de farine, de salaison, &c.

Tout cela exige sans doute des calculs particuliers, qui varient selon la force & la figure des vaisseaux; mais ces calculs ne sont pas difficiles, ils ne sont que longs, & avec le secours des formules on peut les réduire à de simples opérations d'Arithmétique.

Voilà pour la stabilité, voyons pour la marche.

MARCHE.

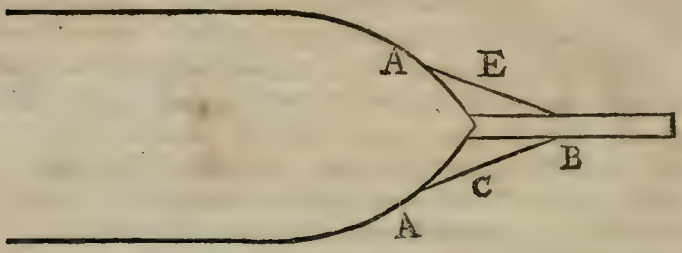
C'est des vaisseaux construits que nous devons parler, & non des vaisseaux à construire, parce que nous avons dit de ces derniers, que c'est dans la composition d'un plan que l'on concilie toutes les qualités, & que celle de l'allure va de pair avec les autres. Nous dirons en passant que si dans les frégates, c'est la qualité premiere, cette même qualité ne doit aller dans les vaisseaux qu'ensuite de la stabilité & de la hauteur de la batterie.

Lorsqu'un vaisseau quelconque a une marche pesante & que l'on cherche les moyens de lui faire acquérir de la vîtesse, il ne faut pas s'arrêter à toutes ces pratiques que le temps & l'ignorance ont consacrées. Il faut l'attaquer avec les calculs & reconnoître d'abord sa stabilité. Si elle est supérieure à l'effort du vent sur les voiles, il ne faut pas pour cela augmenter sa voilure; ce moyen est bon à quelques égards, mais il est dispendieux, & nécessite d'avoir un équipage plus nombreux en raison de l'augmentation de la voilure. Il est mieux de laisser les voiles telles qu'elles sont, mais de faire moins caller le vaisseau, afin de diminuer & son inertie & la poussée de l'eau sur la proue & sur la carène en général. D'assigner de quelle quantité il faut le faire sortir de l'eau, c'est ce que les cal-

culs pourront peut-être déterminer par approximation ; mais ce qui eſt très-néceſſaire, c'eſt de mettre en même-tems une contrequille en bois de même épaiſſeur, que la quantité dont on fera ſortir la carêne de l'eau, pour ne rien perdre de l'avantage du plus près.

Si le vaiſſeau ne marche pas, & que d'ailleurs il ne porte pas bien la voile, il faudra avoir d'abord recours à la contrequille de fer, parce qu'indépendamment qu'elle tient lieu par ſa poſition d'une plus grande quantité de leſt, & que le vaiſſeau doit par conſéquent caller moins, elle tient également lieu de la contrequille en bois, que l'on ſeroit obligé de mettre pour ſe ſoutenir au plus près. Si malgré cette reſſource il ne marchoit pas & ne portoit pas la voile, comme on le deſire, il faudroit alors en venir à la mâture. La figure du vaiſſeau peut préparer les opérations à faire. En général un vaiſſeau aigu de l'avant, n'a pas beſoin d'une mâture ſi élevée. Les frégates en ſont un exemple bien ſenſible. Les voiles les plus élevées tendent plutôt à faire plonger l'avant, qu'à le faire ſiller ; & avec du vent frais, on les voit mieux marcher avec les quatre corps de voiles, qu'avec leurs huniers & les quatre corps de voiles. Les calculs diront mieux & avec préciſion de quelle quantité on doit peut-être rabaiſſer le point vélique, & ſi l'on peut, en le rabaiſſant, conſerver toujours la même ſurface de voiles, en donnant en envergure, ce qu'on ôte en chûte. Si enfin le vaiſſeau ne marchoit pas, malgré ces changemens, & qu'on s'apperçut que ſon peu de vîteſſe procédât de la trop forte impulſion de l'eau ſur la proue, on pourroit bien faire caller un peu plus l'arrière, pour élever l'avant de tout autant ; mais un moyen nouveau, ſeroit de diminuer conſidérablement la pouſſée de l'eau ſur la proue, par le moyen d'une fourrure de ſimple bordage, dont un bout s'appuyeroit contre les bordages du vaiſſeau, &

l'autre contre le taillemer, comme la figure qui ſuit l'indique.



Senſibilité au Gouvernail.

On ſçait, & pluſieurs livres l'ont dit avant nous, quelle eſt la figure qu'il faut donner à la carêne, pour qu'un vaiſſeau ſoit ſenſible à ſon gouvernail, indépendamment des voiles, & la figure particulière de ce même vaiſſeau, pour le rendre vif dans ſes mouvemens, par le ſecours immédiat des voiles; mais je le répete encore, c'eſt d'un vaiſſeau à conſtruire, dont on a parlé, & il n'y a plus rien à dire à ce ſujet. On ne s'occupe dans ce Mémoire que des moyens à donner pour les vaiſſeaux à qui on trouve des défauts; ceux qui cherchent les remèdes à ces défauts, les éviteront, ſans doute, quand ils travailleront à la compoſition d'un plan.

Un vaiſſeau, qui n'eſt pas ſenſible à ſon gouvernail, manque d'abord de vîteſſe; enſuite on doit ſoupçonner que ſon endroit le plus large eſt trop rapproché de l'arrière, & que cet arrière eſt trop nourri.

On a dit plus haut, comment on pouvoit donner de la vîteſſe aux vaiſſeaux; mais on ne peut retrécir un vaiſſeau trop large, ni aiguiſer les lignes d'eau trop renflées

de l'arrière, il faut en venir néceſſairement à faire plonger le vaiſſeau de l'avant & à augmenter cependant l'impulſion des filets d'eau ſur le gouvernail. On le pourra en augmentant un peu ſa largeur, ſans cependant porter cette augmentation trop loin, de peur de fatiguer les ferrures; mais on pourra enfoncer ce gouvernail dans l'eau, & le prolonger de l'épaiſſeur d'une contrequille en bois, qui auroit la forme d'un coin, dont la tête ſeroit du côté du gouvernail, & l'angle ſe termineroit au milieu du vaiſſeau. Par ce moyen l'eau qui courroit le long de cette eſpèce de contrequille piramidale, agiroit avec d'autant plus d'efficacité ſur le gouvernail, qu'elle ne ſeroit pas détournée dans ſa courſe, comme le ſont les lignes d'eau plus élevées, qui ne peuvent ſe rendre au gouvernail, qu'apres avoir paſſé par le milieu, qui les écarte toujours trop de l'axe.

ROULIS.

On ſe plaint moins de la vivacité des roulis, que de leurs fréquences & de leurs longueurs. J'ai vu des vaiſſeaux, qui courant vent arrière & même vent largue, ſe ſubmergeoient périodiquement des deux bords juſqu'à la ſeconde batterie; mais ces vaiſſeaux que j'avois auparavant calculés, avoient leur métacentre bien peu au deſſus du centre de gravité, & leur flotaiſon trop peu ſoutenue ne donnoit pas aſſez de priſe à la pouſſée verticale.

Du leſt de fer placé ſur la carlingue, ou près de la carlingue, auroit ſans doute diminué le roulis, une contrequille de fer, moins peſante encore que ce leſt auroit produit le même effet.

Tout au contraire, quand on ſe plaint de la vivacité des roulis, malgré la légèreté de l'arrimage, je n'y vois

pas d'autre moyen que de placer des poids à la tête des mâts majeurs. Ils feroient l'effet contraire de cette contrequille, parce que dans les deux cas, sans toucher au méta centre, on éleve ou on abaisse le centre de gravité. Je m'en remets toujours aux calculs, pour la quantité du poids à mettre.

TANGAGE.

Un vaisseau tangue, dont l'avant est trop aigu, ou trop plein, ou trop chargé de l'avant. Dans ces trois hypothèses, il faut soulager cette partie, parce que si c'est pour être trop aigu qu'il tangue, il s'enfoncera d'autant moins qu'il sera plus léger; si c'est pour être trop plein, il ne s'enfonce pas tant dans son tangage; mais le mouvement en est d'autant plus rude, & il met en danger la mâture: si c'est pour être trop chargé, il faut retirer autant qu'il est possible les poids vers le milieu.

Si un Vaisseau est trop ardent.

Quand un vaisseau s'élance trop dans la ligne du vent, & que le gouvernail ne le ramene qu'avec peine dans la route indiquée, ou c'est un vice dans la forme du vaisseau, ou c'en est un dans la position des mâts. S'il est dans la forme du vaisseau, qu'il ait, par exemple, l'avant extrêmement taillé, une étrave droite & peu de différence de tirant d'eau; il n'y a pas à balancer, il faut faire plonger l'arrière, & par-là écarter du gouvernail le point de rotation, c'est-à-dire, prolonger le bras du levier auquel le gouvernail est appliqué.

Si ce défaut vient de la voilure, l'expérience y peut quelque chose, mais il vaut encore mieux s'en assurer sur un plan. On verra alors que le grand mât, ou le point vélique

vélique de ce mât, n'eſt pas placé en raiſon de celui du mât de mizaine, & que celui-ci eſt trop en arrière, & l'autre auſſi. On peut corriger ce défaut par le déplacement d'un ſeul mât, dès qu'on connoît la diſtance du point de converſion à un de ces mâts quelconques. Tout le monde ſçait qu'il n'y a plus qu'à diviſer la ſomme de la ſurface des voiles, multipliée par la diſtance à ce point de converſion, par la ſomme de la ſurface des voiles de l'autre mât ; le quotient déterminera la place de ce dernier mât.

Si le Vaiſſeau arrivè trop promptement.

Ce défaut eſt rare, mais il peut ſe trouver. Alors quant à la forme du vaiſſeau, on ſupprime par l'application d'un taille-mer la plus grande partie de l'élancement. On fait plonger un peu plus l'avant par la tranſpoſition du leſt & des autres parties peſantes de l'arrimage ; & ſi on s'apperçoit que ce défaut provient plutôt de la poſition des mâts, on fait les changemens contraires à ceux que nous venons d'indiquer pour un vaiſſeau trop ardent.

Toutes ces obſervations ſont communes à celles qu'on peut faire ſur l'allure du plus près, ſur le vent largue & le vent arrière.

J'aurois pu entrer dans un plus grand détail, & je l'aurois même deſiré, ſi le temps me l'eût permis ; j'aurois voulu ſurtout avoir celui de finir entièrement quelques projets de vaiſſeaux marchands, & démontrer la poſſibilité de partager avec les Hollandois le commerce d'exportation, en donnant à nos vaiſſeaux marchands la forme néceſſaire pour porter beaucoup, & naviguer avec un équipage peu nombreux. Tout conſiſte à les allonger plus qu'ils ne ſont,

& à les retenir considérablement pour diminuer mâture, voilure, agrêts, arcres, & par conséquent l'équipage.

FIN.

RÉPONSE

A LA Queſtion propoſée par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de Paris, pour l'année 1772.

De perfectionner les methodes ſur leſquelles eſt fondée la théorie de la Lune, de fixer par ce moyen celles des équations de ce Satellite, qui ſont encore incertaines, & d'examiner en particulier ſi l'on peut rendre raiſon, par cette théorie de l'équation ſéculaire du mouvement moyen de la Lune.

PAR M. EULER.

NOUVELLES
RECHERCHES
SUR LE VRAI MOUVEMENT
DE LA LUNE.

Où l'on détermine toutes les inégalités auxquelles il eſt aſſujetti.

Hic labor extremus, longarum hæc meta viarum,
hinc jam digreſſi, veſtris appellimus oris.

LA théorie de la Lune étant un objet qui demande les plus longs & pénibles calculs, qui pourroient remplir un Volume tout entier, il me ſera permis de n'en rapporter ici que les points eſſentiels avec les réſultats que j'en ai déduits: je ſupprimerai donc tous les détails que je regarde toujours comme ſuperflus, lorſqu'on a à comparoître devant des Juges auſſi éclairés

que ſont ceux qui compoſent l'Académie Royale des Sciences de Paris. Je prendrai pour baſe le Mémoire qui a été couronné en 1770 ſur cette même queſtion, & je commencerai par y faire quelques réflexions.

II.

D'abord il eſt indubitable que la manière dont cette recherche a été développée dans le ſuſdit Mémoire, par le moyen des trois coordonnées, mérite à bien des égards la préférence ſur toutes les autres méthodes, que les Géomètres ont employées juſqu'ici pour déterminer les inégalités dans le mouvement de la Lune. Cependant je ne me ſervirai ici que l'idée générale, qui y conſtitue le fonds de de la ſolution, ayant trouvé à propos d'y faire pluſieurs changemens, tant à l'égard de la ſituation des trois coordonnées, que dans la réſolution même des équations qui en déterminent les valeurs.

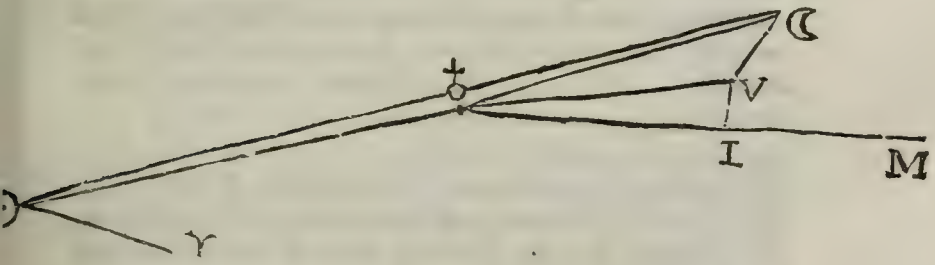
III.

D'ailleurs il s'en faut beaucoup que le développement du calcul, qui eſt rapporté dans ledit Mémoire, ſoit exécuté avec toute la juſteſſe réquiſe, & il paroît que l'Auteur n'a pas eu aſſez de tems, ou peut être de patience pour achever un travail auſſi fatiguant que l'eſt ſurtout le calcul numérique, calcul auquel on ne ſauroit même ſe fier, à moins qu'on ne l'ait réfait à diverſes repriſes, & avec tout le ſoin imaginable.

IV.

Que le plan de la figure repréſente le plan de l'écliptique, où je ſuppoſe le centre du Soleil immobile en ☉,

& pour un tems proposé quelconque le centre de la Terre en ♁, la droite ☉ ♈ marquant le lieu de l'équinoxe du printems. Soit ensuite hors de ce plan, ☾ le centre de la Lune, d'où j'abaisse sur ce plan de l'écliptique la perpendiculaire ☾ *V*, de sorte que la droite ♁ *V* marque la longitude vraie de la Lune, & l'angle ☾ ♁ *V* sa latitude, que je suppose boréale. Je tire ensuite dans le plan de l'écliptique la droite ♁ *M* qui doit indiquer la longitude moyenne de la Lune, sur laquelle j'abaisse enfin de *V* la perpendiculaire *V L*, pour avoir les trois coordonnées orthogonales ♁ *L*, *L V*, & *V* ☾, dont il s'agit de déterminer les valeurs. On voit d'abord que cette disposition est un peu différente de celle qui a été employée dans le Mémoire susmentionné ; mais aussi verra-t-on bientôt que j'en retire l'avantage, que mes formules deviennent par-là plus simples & leurs applications au calcul moins embarrassantes. Cependant la conduite du calcul reste à peu près la même, de sorte qu'il seroit superflu de les déduire de nouveau des premiers principes de la méchanique.



V.

Suivant le Mémoire couronné, les trois coordonnées ont été nommées : ☉ $L = a(1 + x)$, $LV = ay$ & $V\mathbb{C} = az$, où la lettre a marque une certaine distance moyenne de la Lune à la Terre, l'unité exprimant la distance moyenne de la Terre au Soleil. Mais pour rendre le calcul plus aisé, je nommerai ici la

1re. ☉ $L = 1 + x$; 2e. $LV = y$; 3me. $V\mathbb{C} = z$,

& maintenant la distance moyenne de la Terre au Soleil sera exprimée par $\frac{1}{a}$, où il est bon de remarquer que la derniere détermination de la parallaxe du Soleil donne à connoître, que la valeur de cette lettre a est fort à peu près $\frac{1}{390}$ & par conséquent $\frac{1}{a} = 390$.

VI.

Il s'agit donc de trouver les équations différentio différentielles, qui déterminent les valeurs de ces trois coordonnées $1 + x, y, z$, où je suppose qu'on emploie la même méthode qui est détaillée dans le Mémoire déja cité, où il convient de remarquer, que les tems y sont exprimés par le mouvement de l'anomalie moyenne du Soleil, qui y est nommé t, de sorte que sa différentielle dt soit constante. Ensuite il entrera dans ces équations l'angle p, qui marque l'élongation moyenne de la Lune au Soleil, & qu'on tire aisément des Tables des moyens mouvemens, en soustravant la longitude moyenne du Soleil de celle de la Lune. Or, pour le rapport entre ces deux angles p & t, je pose, comme dans ledit Mémoire

$\frac{dp}{dt} = m$, de sorte que $m = 12{,}368903$, au moins pour le siécle présent, en cas que la résistance de l'éther soit capable d'y causer, avec le tems, quelque changement. Outre cela, il se trouvera dans ces équations encore un autre nombre constant λ, dont la valeur doit être supposée conformément aux raisons alléguées dans ledit Mémoire $\lambda = (m+1)^2 + \frac{1}{2}$, ou bien $\lambda = 179{,}228928$. Enfin, l'excentricité de l'orbite du Soleil, que je nommerai ici $\varkappa$, s'introduit aussi dans nos équations, dont la valeur est $\varkappa = 0{,}01678$.

VII.

Après ces explications, ayant réduit le calcul à ces trois nouvelles coordonnées, & développé les formules irrationelles, de la même manière, qu'on l'avoit déja fait dans le Mémoire susdit, on trouvera enfin les trois équations différentio-différentielles, telles que je les ai représentées sur les feuilles détachées ci-jointes, Table première, seconde & troisième, où la différentielle du tems dt est supposé constante.

VIII.

On verra par là que j'ai poussé ici beaucoup plus loin l'évolution des formules irrationnelles, & même jusqu'à la sixième dimension des trois inconnues x, y & z, puisque j'ai trouvé dans la suite que quelques inégalités de la Lune demandent absolument la cinquième dimension, sans quoi leur détermination deviendroit tout à fait fausse. Aussi les petits termes affectés par les lettres a & $\varkappa$ sont ici plus soigneusement développés, & dans les derniers on remarquera d'abord une grande difference par rapport à

ceux du Mémoire allégué, dont la raiſon eſt, que les coordonnées ſont rapportées ici à un autre axe que là. Mais à l'égard des autres membres on découvrira une belle harmonie.

IX.

En conſidérant la grande prolixité de ces équations, on conviendra aiſément qu'il faut entiérement renoncer à toute eſpérance de les intégrer, & tous nos ſoins ne doivent aboutir qu'à chercher par des convenables approximations les juſtes valeurs de nos trois inconnues x, y & z, & qui renferment même les conſtantes arbitraires que les intégrations actuelles y introduiroient.

X.

Parmi ces conſtantes, il ſe préſente d'abord l'excentricité de l'orbite lunaire, que je déſignerai ici par la lettre k, à laquelle ſe rapporte un nouvel angle q, qui eſt l'anomalie moyenne de la Lune, & dont le rapport à l'angle t eſt ſuppoſé $\frac{dq}{dt} = n = 13,25604$, & je ne répete pas ici tout ce qui eſt rapporté à cette occaſion ſur le mouvement de l'apogée de la Lune. Enſuite une autre conſtante renfermera l'inclinaiſon de l'orbite lunaire à l'écliptique, que je marquerai dans la ſuite par la lettre i, à laquelle ſe rapporte auſſi un certain angle r, nommé l'argument de latitude, qu'on trouve en ôtant la longitude moyenne du nœud aſcendant de celle de la Lune; tout comme l'angle précédent q ſe trouve en ôtant la longitude moyenne de l'apogée lunaire de celle de la Lune, de ſorte que ces deux angles ſont auſſi proportionels au tems: or pour ce dernier je poſe $\frac{dr}{dt} = l$, dont la valeur ſe tire des tables

qui

qui donnent $l = 13,42263$. Outre ces deux constantes k & i, les angles q & r même renferment encore deux constantes: car puisque nous n'avons posé que leurs différentielles $dq = n\,dt$, & $dr = l\,dt$, leurs intégrales, où les angles q & r même renfermeront sans doute chacun une constante. Il en est de même de l'angle p, parce que l'intégration de la formule $dp = m\,dt$ reçoit aussi une constante. Enfin la sixième constante se trouve déja dans la lettre a, entant qu'elle se rapporte à la quantité de l'orbite lunaire. Voilà donc toutes les six constantes, que les doubles intégrations de nos trois équations introduiroient dans le calcul, & dont les valeurs doivent être tirées de l'état actuel où se trouve le mouvement de la Lune.

XI.

En réfléchissant bien sur la forme des valeurs qui ont été trouvées pour nos trois inconnues x, y & z, on verra d'abord que les deux premières x & y contiennent quelques termes indépendans des constantes k, i, a & $\varkappa$, qu'on comprend communément sous le nom de VARIATION. Ensuite on y trouve des termes affectés simplement par la lettre k, & il est bon d'en distinguer ceux qui sont affectés par le quarré k^2, ou même le cube k^3. Or, ces derniers deviennent déja si extrêmement petits, qu'on peut hardiment négliger ceux qui seroient affectés par des plus hautes puissances de k. Il y aura aussi des termes affectés simplement par la lettre a, & ensuite aussi par ak & $a\varkappa$; enfin des termes multipliés par $\varkappa$ & $\varkappa k$, en négligeant tous les autres termes akk, &c, qui à cause de leur petitesse ne seroient également d'aucune conséquence. Pour ce qui regarde la troisième inconnue z, elle renfermera principalement des termes affectés par la constante i simplement, & ensuite aussi par ik, ia & $i\varkappa$,

enfin des termes multipliés par ik^2 & i^3 en négligeant d'autres combinaisons qui meneroient à des inégalités trop petites, pour mériter quelque attention.

XII.

Mais puisque les deux premières équations renferment aussi le quarré de la troisième inconnue, zz, il s'ensuit que les quantités x & y doivent aussi renfermer des parties affectées premièrement par ii, & ensuite aussi par iik & iix, en négligeant des combinaisons plus compliquées. Or, ayant bien réfléchi sur tous les différens ordres des termes, dont nos trois inconnues x, y & z seront composées; j'ai trouvé que les termes de chaque ordre se peuvent déterminer à part, ce qui m'a fourni un très-grand secours pour déterminer exactement les valeurs cherchées, & pour m'assurer de leur justesse. Pour cet effet je distribue les valeurs de x, y & z conformément à ces classes que je viens d'établir : en supposant

$$x = O' + k.P' + k^2.Q' + k^3.R' + a.S' + ak.T' + x.U' + xk.V' + ax.W' + i^2.X' + i^2k.Y' + i^2x.Z'.$$

$$y = O + k.P + k^2.Q + k^3.R + a.S + ak.T + x.U + xk.V + ax.W + i^2.X + i^2k.Y + i^2x.Z.$$

$$z = i.p + ik.q + ik^2.r + ix.u + s^3.t + ia.r.$$

XIII.

Concevons à présent qu'on substitue réellement ces valeurs au lieu de x, y & z, dans nos trois équations générales, & qu'on distingue pour chacune les membres

de chacun des ordres que je viens d'établir, en rejettant ceux qui monteroient à des ordres plus compliqués, comme ne méritant aucune attention, & on pourra séparément égaler à zero les membres de chaque ordre, ce qui nous fournira une multitude d'équations particulières, dont je ne rapporterai ici que celles des cinq premiers ordres (*), vu que les autres ont toutes des formes semblables, & que leur résolution demande la même méthode qui est enseignée dans le Mémoire cité, en y employant certains artifices qui ont rendu la solution plus aisée & en même tems plus certaine ; de sorte qu'il ne reste plus aucun doute sur les coëfficiens de tous les termes qui en ont été trouvés. Table IV. *a*, *b*, *c*, *d*.

XIV.

Je passe maintenant aux résultats même de ces recherches pénibles, que je me contenterai d'avoir mis ici sous les yeux de l'Académie, tels que je les ai trouvé avec l'assistance de trois habiles Calculateurs, dont chacun s'est donné la peine de les calculer selon les différentes méthodes que je leur ai fournies, & répéter ces calculs plusieurs fois de suite ; de sorte que je puis répondre parfaitement de l'exactitude & de la justesse des valeurs trouvées pour les coëfficiens O, P, Q, &c. p, q, r, &c. & qui sont représentés dans les Tables Vme. VIme. VIIme. Les recherches même & les artifices analytiques, qu'il m'a fallu employer pour y parvenir, rempliſſent un assez grand volume, que je ne manquerai cependant pas de mettre en son tems sous les yeux du Public.

(*) J'y ai ajouté encore les équations particulières du septième & onzième ordre, comme les moins compliqués, ne renfermant que les inégalités qui dépendent de l'excentricité de la Terre x & du quarré de l'inclinaison i^2.

XV.

En ſubſtituant toutes ces valeurs, pour avoir celles de nos trois inconnues x, y & z, je comparai d'abord ces formules avec celles que Meſſieurs Mayer & Clairaut ont employées pour conſtruire leurs Tables lunaires: je m'aſſurai par ce moyen des juſtes valeurs qu'il faut donner aux deux conſtantes k & i, & je les trouvai

$$k = 0,05449 ; \; i = 0,08944.$$

Mais ayant enſuite comparé mes formules trouvées avec pluſieurs obſervations actuelles, ſur leſquelles j'avois fait le calcul, j'ai remarqué que l'erreur, dans quelques-unes, montoit à preſque une minute; de ſorte que pour obtenir un plus juſte accord entre les formules trouvées & les obſervations, il m'a fallu apporter encore quelques légères corrections aux valeurs de k & i, que j'ai enfin trouvé

$$k = 0,054505 \; i = 0,08964.$$

XVI.

Subſtituons donc en effet ces valeurs pour k & i, & ſuppoſons $a = \frac{i}{390}$ & $x = 0,01678$, pour obtenir les valeurs entiérement développées en nombres de nos trois coordonnées ♁ $L = 1 + x$, $LV = y$ & $V\mathbb{C} = z$, que je mettrai ici devant les yeux dans les VIIIme. IXme. & Xme. Table, où au lieu des fractions décimales, j'ai exprimé tous les coëfficiens en dix millionièmes parties de l'unité. Ces parties ſont ſi petites que 100 ne ſauroient produire que 2 ſecondes dans le lieu de la Lune.

XVII.

Pour ſe ſervir de ces formules, d'où l'on pourroit aiſément conſtruire des Tables ordinaires, on n'a qu'à tirer des bonnes Tables des moyens mouvemens, pour un tems propoſé quelconque, les cinq élémens ſuivans

1°. Longitude moyenne de la Lune = L.

2°. Longitude de ſon apogée . . . . = P.

3°. Longitude du nœud aſcendant . = N.

4°. Longitude moyenne du Soleil . . = A.

5°. Longitude de ſon apogée . . . . = Π.

Et de former de là les quatre argumens ſuivans:

I°. $p = L - A$;

II°. $q = L - P$;

III°. $r = L - N$;

IV°. $t = \Delta - \Pi$.

D'où l'on trouvera aiſément les juſtes valeurs de nos trois coordonnées

$\odot L = 1 + x$; $LV = y$; $V\mathbb{C} = z$.

XVIII.

Ayant trouvé ces trois valeurs, qu'on cherche les deux angles ſuivans

$L \odot V = \varphi$ & $V \odot \mathbb{C} = \downarrow$.

Par le moyen de ces ſimples formules:

$$tang.\ \varphi = \frac{y}{1+x};\ tang.\ \downarrow = \frac{z \cdot cos.\ \varphi}{1+x}$$

Et alors l'angle φ ou ajouté, ou retranché de la longitude moyenne de la Lune $= L$, ſelon que y provient *poſitif* ou *négatif*, donnera d'abord la vraie longitude de la Lune, pendant que l'autre angle $\downarrow$, montre ſur le champ ſa vraie latitude ou *boréale*, ou *méridionale*, ſelon que z eſt *poſitif* ou *négatif*. Ce calcul paroît d'autant plus aiſé, qu'il ne s'agit ici que des angles, connus par les ſeules Tables des moyens mouvemens, ſans s'embarraſſer ni d'aucune correction dans le lieu des nœuds, ou dans l'inclinaiſon de l'orbite lunaire, ni même de la réduction à l'écliptique. Car tous ces articles, d'ailleurs aſſez embarraſſans, ſe trouvent déja renfermés dans nos formules.

XIX.

Enfin, il eſt fort aiſé de tirer de-là la vraie diſtance de la Lune à la Terre, en calculant cette formule

$$(1+x)\ sec\ \varphi\ sec\ \downarrow.$$

Ou bien pour connoître la vraie parallaxe équatorienne de la Lune, elle ſera exprimée par cette formule

$$\frac{10,000,000}{1+x} \times 56'\ 35'' \times cos.\ \varphi \times cos.\ \downarrow,$$

où je remarque que j'ai conclu cette parallaxe moyenne de $56'\ 35''$, qui répond à la diſtance moyenne 1, ou plu-

tôt 10,000,000 de l'éclipſe du Soleil de l'année 1769 ; de ſorte qu'on en peut être aſſuré à quelques ſecondes près. On reconnoîtra aiſément que cette détermination de la parallaxe doit être infiniment plus exacte que celle qu'on tire des Tables ordinaires, vu qu'elle dépend ici ouvertement de toutes les inégalités de la Lune, pendant que les Tables, dont on ſe ſert, n'y employent que quelques inégalités qui y influent principalement.

XX.

Par là, j'eſpère avoir pleinement ſatisfait aux vues de l'illuſtre ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, ayant entiérement développé & fixé toutes les inégalités, auxquelles le mouvement de ce ſatellite eſt aſſujetti, ſans en excepter aucune, qui pourroit influer ſur le lieu de la Lune pour plus de dix ſecondes, & ayant enfin fait voir que, comme aucune de ces inégalités ne ſauroit produire une équation ſéculaire, dans le moyen mouvement de la Lune, on n'en pourra non plus rendre raiſon par la ſeule attraction du Soleil & de tout autre Corps céleſte ; de ſorte qu'il ne reſte plus aucun doute que cette équation ſéculaire, qu'on obſerve, ne ſoit l'effet de la réſiſtance du milieu, dans lequel les planètes ſe meuvent.

Au reſte, je ne doute pas, qu'en corrigeant tant ſoit peu les lieux moyens de l'apogée & du nœud dans les Tables ordinaires, on ne puiſſe, par ce moyen, par-

venir à déterminer le lieu de la Lune à 30 ſecondes près. Or, pour un plus haut degré de préciſion, on ne ſauroit jamais l'eſpérer à cauſe de l'action des autres planètes à laquelle la Lune eſt aſſujettie.

FIN.

TABLE

PREMIÈRE.

§ 7.

Première Équation générale.

$$\frac{ddx}{dt^2} = -\frac{2(m+1)dy}{dt} - 3\lambda x$$

$$- \tfrac{3}{2}\cos. 2p$$

$$- \tfrac{3}{2} x \cos. 2p + \tfrac{3}{2} y \sin. 2p$$

$$+ 3\lambda x^2 - \tfrac{3}{2}\lambda(y^2+z^2)$$

$$- 4\lambda x^3 + 6\lambda x(y^2+z^2)$$

$$+ 5\lambda x^4 - 15\lambda x^2(y^2+z^2) + \tfrac{15}{8}\lambda(y^2+z^2)^2$$

$$- 6\lambda x^5 + 30\lambda x^3(y^2+z^2) - \tfrac{45}{4}\lambda x(y^2+z^2)^2$$

$$+ 7\lambda x^6 - \tfrac{105}{2}\lambda x^4(y^2+z^2) + \tfrac{315}{8}\lambda x^2(y^2+z^2)^2 - \tfrac{35}{16}(y^2+z^2)^3$$

$$- \tfrac{3}{8} a(3\cos. p + 5\cos. 3p)$$

$$- \tfrac{3}{4} a x(3\cos. p + 5\cos. 3p) + \tfrac{3}{4} a y(\sin. p + 5\sin. 3p)$$

$$- \tfrac{3}{8} a x^2(3\cos. p + 5\cos. 3p) + \tfrac{3}{4} a x y(\sin. p + 5\sin. 3p) - \tfrac{3}{8} a y^2(\cos. p - 5\cos. 3p) + \tfrac{3}{2} a z^2 \cos. p$$

$$+ \tfrac{3}{4} x\big(2\cos. t + 7\cos.(2p-t) - \cos.(2p+t)\big)$$

$+\frac{3}{4}k\,x\big(2\,cos.\,t+7\,cos.\,(2p-t)-cos.\,2p+t)\big)$
$-\frac{1}{4}k\,y\big(7\,sin.\,(2p-t)-sin.\,(2p+t)\big)$

$+\frac{3}{8}a\,k\big(9\,cos.\,(p-t)+3\,cos.\,(p+t)+25\,cos.\,(3p-t)$
$-5\,cos.\,(3p+t)\big)$

$+\frac{3}{4}a\,k\,x\big(9\,cos.\,(p-t)+3\,cos.\,(p+t)+25\,cos.\,(3p-t)$
$-5\,cos.\,3p+t)\big)-\frac{3}{4}a\,k\,y\big(3\,sin.\,(p-t)+sin.\,(p+t)$
$+25\,sin.\,(3p-t)-5\,sin.\,(3p+t)\big)$

$+\frac{3}{8}a\,k\,x^2\big(9\,cos.\,(p-t)+3\,cos.\,(p+t)+25\,cos.\,(3p-t)$
$-5\,cos.\,(3p+t)\big)-\frac{3}{4}a\,k\,x\,y\big(3\,sin.\,(p-t)+sin.\,(p+t)$
$+25\,sin.\,(3p-t)-5\,sin.\,(3p+t)\big)$

$+\frac{3}{8}a\,k\,y\big(3\,cos.\,(p-t)+cos.\,(p+t)-25\,cos.\,(3p-t)$
$+5\,cos.\,(3p+t)\big)-\frac{3}{2}a\,k\,z^2\big(3\,cos.\,(p-t)+cos.\,(p+t)\big)$
$=0.$

TABLE II.

§ 7.

Seconde Equation générale.

$\frac{ddy}{dt^2}+\frac{2(m+1)dx}{dt}$

$+\frac{3}{2}\,sin.\,2p$

$+\frac{3}{2}x\,sin.\,2p+\frac{3}{2}y\;cos.\,2p$

$-3\lambda x y$

$+6\lambda x^2 y-\frac{3}{2}\lambda y(y^2+z^2)$

$$- 10\lambda x^3y + \tfrac{15}{2}\lambda xy(y^2+z^2)$$

$$+ 15\lambda x^4y - \tfrac{45}{2}\lambda x^2y(y^2+z^2) + \tfrac{15}{8}\lambda y(y^2+z^2)^2$$

$$- 21\lambda x^5y + \tfrac{105}{2}\lambda x^3y(y^2+z^2) + \tfrac{105}{8}\lambda xy(y^2+z^2)^2$$

$$+ \tfrac{3}{8}a(\sin.p + 5\sin.3p)$$

$$+ \tfrac{3}{4}ax(\sin.p + 5\sin.3p) - \tfrac{3}{4}ay(\cos.p - 5\cos.3p)$$

$$+ \tfrac{3}{8}ax^2(\sin.p + 5\sin.3p) - \tfrac{3}{4}axy(\cos.p - 5\cos.3p)$$
$$+ \tfrac{3}{8}ay^2(3\sin.p - 5\sin.3p) - \tfrac{3}{2}az^2\sin.p$$

$$- \tfrac{3}{4}k\big(7\sin.(2p-t) - \sin.(2p+t)\big)$$

$$- \tfrac{3}{4}kx\big(7\sin.(2p-t) - \sin.(2p+t)\big) + \tfrac{3}{4}ky\big(2\cos.t$$
$$- 7\cos.(2p-t) + \cos.(2p+t)\big)$$

$$- \tfrac{3}{8}ak\big(3\sin.(p-t) + \sin.(p+t) + 25\sin.(3p-t)$$
$$- 5\sin.(3p+t)\big)$$

$$- \tfrac{3}{4}axx\big(3\sin.(p-t) + \sin.(p+t) + 25\sin.(3p-t)$$
$$- 5\sin.(3p+t)\big) + \tfrac{3}{4}aky\big(3\cos.(p-t) + \cos.(p+t)$$
$$- 25\cos.(3p-t) + 5\cos.(3p+t)\big)$$

$$- \tfrac{3}{8}akxx\big(3\sin.(p-t) + \sin.(p+t) + 25\sin.(3p-t)$$
$$- 5\sin.(3p+t)\big) + \tfrac{3}{4}akxy\big(3\cos.(p-t) + \cos.(p+t)$$
$$- 25\cos.(3p-t) + 5\cos.(3p+t)\big)$$

$$- \tfrac{3}{8}akyy\big(9\sin.(p-t) + 3\sin.(p+t) - 25\sin.(3p-t)$$
$$+ 5\sin.(3p+t)\big) + \tfrac{3}{2}akzz\big(3\sin.(p-t) + \sin.(p+t)\big)$$
$$= 0.$$

TABLE III.

§ 7.

Troisième Equation générale.

$$\frac{ddz}{dt^2} + (\lambda + 1)z$$

$$- 3\lambda x z$$

$$+ 6\lambda x^2 z - \tfrac{3}{2}\lambda z(y^2 + z^2)$$

$$- 10\lambda x^3 z + \tfrac{15}{2}\lambda x z(y^2 + z^2)$$

$$+ 15\lambda x^4 z - \tfrac{45}{2}\lambda x^2 z(y^2 + \tfrac{15}{8}\lambda z(y^2 + z^2) + z^2)^2$$

$$- 21\lambda x^5 z + \tfrac{105}{2}\lambda x^3 z(y^2 + z^2) - \tfrac{105}{8}\lambda x z(y^2 + z^2)^2$$

$$+ 3 a z \cos. p$$

$$+ 3 a x z \cos. p - 3 a y z \sin. p$$

$$- 3 k z \cos. t$$

$$- 3 a k z(3 \cos.(p - t) + \cos.(p + t))$$

$$- 3 a k x z(3 \cos.(p - t) + \cos.(p + t)) + 3 a k y z (3 \sin.(p - t) + \sin.(p + t)) = 0.$$

TABLE IV. *a.*

§ 13.

Equations particulières du premier ordre, pour déterminer les valeurs de O′ & O

1. $\frac{ddO'}{dt^2} - \frac{2(m+1)dO}{dt} - 3\lambda O' - \frac{3}{2}\,cos.2p - \frac{3}{2}\,O'\,cos.2p + \frac{3}{2}\,O\,sin.2p + 3\lambda O'^2 - \frac{3}{2}\lambda O^2 = 0.$

2. $\frac{ddO}{dt^2} + \frac{2(m+1)dO'}{dt} + \frac{3}{2}\,sin.2p + \frac{3}{2}\,O'\,sin.2p + \frac{3}{2}\,O\,cos.2p - 3\lambda O'O = 0.$

Equations particulières du second ordre, pour déterminer les valeurs de P′ & P.

1. $\frac{ddP'}{dt^2} - \frac{2(m+1)dP}{dt} - 3\lambda P' + P'.(-\frac{3}{2}\,cos.2p + 6\lambda O' - 12\lambda O'^2 + 6\lambda O^2) + P.(+\frac{3}{2}\,sin.2p - 3\lambda O + 12\lambda O'O) = 0.$

2. $\frac{ddP}{dt^2} + \frac{2(m+1)dP'}{dt} + P'.(+\frac{3}{2}\,sin.2p - 3\lambda O + 12\lambda O'O) + P.(+\frac{3}{2}\,cos.2p - 3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \frac{9}{2}\lambda O^2) = 0.$

Equations particulières du troisième ordre, pour déterminer les valeurs de Q' & Q.

1. $$\frac{ddQ'}{dt^2} - \frac{2(m+1)dQ}{dt} - 3\lambda Q'$$
$$+ Q'.(-\tfrac{3}{2}cos.2p + 6\lambda O' - 12\lambda O'^2 + 6\lambda O^2)$$
$$+ Q.(+\tfrac{3}{2}sin.2p - 3\lambda O + 12\lambda.O'O)$$
$$+ P'^2.(3\lambda - 12\lambda O' + 30\lambda O'^2 - 15\lambda O^2)$$
$$+ P'.P.(12\lambda O - 60\lambda O'O)$$
$$+ P^2.(-\tfrac{3}{2}\lambda + 6\lambda O' - 15\lambda O'^2 + \tfrac{45}{4}\lambda O^2) = 0.$$

2. $$\frac{ddQ}{dt^2} + \frac{2(m+1)dQ'}{dt}$$
$$+ Q'.(\tfrac{3}{2}sin.2p - 3\lambda O + 12\lambda O'O)$$
$$+ Q.(\tfrac{3}{2}cos.2p - 3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \tfrac{9}{2}\lambda O^2)$$
$$+ P'^2.(6\lambda O - 30\lambda O'O)$$
$$+ P'.P.(-3\lambda + 12\lambda O' - 30\lambda O'^2 + \tfrac{45}{2}\lambda O^2)$$
$$+ P^2.(-\tfrac{9}{2}\lambda O + \tfrac{45}{2}\lambda O'O) = 0.$$

TABLE IV. *b.* § 13.

Equations particulières du quatrième ordre, pour déterminer les valeurs de R' & R.

1. $\frac{ddR'}{dt^2} - \frac{2(m+1)dR}{dt} - 3\lambda R'$
$+ R'(-\frac{3}{2}cof.2p+6\lambda O'-12\lambda O'^2+6\lambda O^2)$
$+ R(\frac{3}{2}\,fin.\,2p-3\lambda O+12\lambda O'O)$
$+2P'Q(3\lambda-12\lambda O'+30\lambda O'^2-15\lambda O^2)$
$+(P'Q+PQ')(12\lambda O-60\lambda O'O)$
$+2PQ(-\frac{3}{2}\lambda+6\lambda O'-15\lambda O'^2+\frac{45}{4}\lambda O^2)$
$+P'^2(-4\lambda+20\lambda O'-60\lambda O'^2+30\lambda O^2)$
$+3P'^2P(-10\lambda O+60\lambda O'O)$
$+3P'P^2(3\lambda-10\lambda O'+30\lambda O'^2-\frac{45}{2}\lambda O^2)$
$+P^3(\frac{15}{2}\lambda O-45\lambda O'O)=0.$

2. $\frac{ddR}{dt^2} + \frac{2(m+1)dR'}{dt}$
$+ R'(\frac{3}{2}\,fin.\,2p-3\lambda O+12\lambda O'O)$
$+ R(\frac{3}{2}cof.2p-3\lambda O'+6\lambda O'^2-\frac{9}{2}\lambda O^2)$
$+ 2P'Q'(6\lambda O-30\lambda O'O)$
$+(P'Q+PQ')(-3\lambda+12\lambda O'-30\lambda O'^2+\frac{45}{2}\lambda O^2)$
$+ 2PQ(-\frac{9}{2}\lambda O+\frac{45}{2}\lambda O'O)$
$+ P'^3(-10\lambda O+60\lambda O'O)$
$+3P'^2P(2\lambda-10\lambda O'+30\lambda O'^2-\frac{45}{2}\lambda O^2)$
$+ 3P'P^2(\frac{15}{2}\lambda O-45\lambda O'O)$
$+P^3(-\frac{3}{2}\lambda+\frac{15}{2}\lambda O'-\frac{45}{2}\lambda O'^2+\frac{75}{4}\lambda O^2)=0.$

TABLE IV. *c.* § 13.

Equations particulières du cinquième ordre, pour déterminer les valeurs de S' & S.

$$1.\ \frac{ddS'}{dt^2} - \frac{2(m+1)dS}{dt} - 3\lambda S'$$
$$+ S'(-\tfrac{3}{2}\cos.2p + 6\lambda O' - 12\lambda O'^2 + 6\lambda O^2)$$
$$+ S(\tfrac{3}{2}\sin.2p - 3\lambda O + 12\lambda O' O)$$
$$- \tfrac{3}{8}(3\cos.p + 5\cos.3p)(1 + 2O' + O'^2)$$
$$+ \tfrac{3}{4}(\sin.p + 5\sin.3p)(O + O' O)$$
$$- \tfrac{3}{8}(\cos.p - 5\cos.3p)O^2 = 0.$$

$$2.\ \frac{ddS}{dt^2} + \frac{2(m+1)dS'}{dt} -$$
$$+ S'(\tfrac{3}{2}\sin.2p - 3\lambda O + 12\lambda O' O)$$
$$+ S(\tfrac{3}{2}\cos.2p - 3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \tfrac{3}{2}\lambda O^2)$$
$$+ \tfrac{3}{8}(\sin.p + 5\sin.3p)(1 + 2O' + O'^2)$$
$$- \tfrac{3}{4}(\cos.p - 5\cos.3p)(O + O' O)$$
$$+ \tfrac{3}{8}(3\sin.p - \sin.3p)O^2 = 0.$$

Equations particulières du septième ordre, pour déterminer les valeurs de U' & U.

$$1.\ \frac{ddU'}{dt^2} - \frac{2(m+1)dU'}{dt} - 3\lambda U'$$
$$+ U'(-\tfrac{3}{2}\cos.2p + 6\lambda O' - 12\lambda O'^2 + 6\lambda O^2)$$
$$+ U(\tfrac{3}{2}\sin.2p - 3\lambda O + 12\lambda O' O)$$
$$+ \tfrac{3}{4}(2\cos.t + 7\cos.(2p - t) - \cos.(2p + t))(1 + O')$$
$$- \tfrac{3}{4}(7\sin.(2p - t) - \sin.(2p + t))O = 0.$$

2.

2. $\frac{ddU}{dt^2} + \frac{2(m+1)dU'}{dt}$
$+ U'(\frac{3}{2} sin.\ 2p - 3\lambda O + 12\lambda O'O)$
$+ U(\frac{3}{2} cos.\ 2p - 3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \frac{9}{2}\lambda O^2)$
$- \frac{3}{4}(7 sin.(2p-t) - sin.(2p+t))(1+O')$
$+ \frac{3}{4}(2 cos.t - 7 cos.(2p-t) + cos.(2p+t))O$
$= 0.$

Equations particulières du onzième ordre, pour déterminer les valeurs de X' & X.

1. $\frac{ddX'}{dt^2} - \frac{2(m+1)dX}{dt} - 3\lambda X'$
$+ X'(-\frac{3}{2} cos.2p + 6\lambda O' - 12\lambda O'^2 + 6\lambda O^2)$
$+ X.(\frac{3}{2} sin.\ 2p - 3\lambda O + 12\lambda O'O)$
$+ zz'(-\frac{3}{2}\lambda + 6\lambda O' - 15\lambda O'^2 + \frac{15}{4}\lambda O^2) = 0.$

2. $\frac{ddX}{dt^2} + \frac{2(m+1)dX'}{dt}$
$+ X'(\frac{3}{2} sin.\ 2p - 3\lambda O + 12\lambda O'O)$
$+ X(\frac{3}{2} cos.2p - 3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \frac{9}{2}\lambda O^2)$
$+ zz'(-\frac{1}{2}\lambda O + \frac{15}{2}\lambda O'O) = 0.$

TABLE IV *d*. § 13.

Pour la troiſieme Coordonnée z.

Equation particulière du premier ordre, pour déterminer la valeur de p'.

$$\frac{dd\,p'}{dt^2} + (\lambda+1)p' + p'\left(-3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \tfrac{3}{2}\lambda O^2\right) = 0.$$

Equation particulière du ſecond ordre, pour déterminer la valeur de q'.

$$\begin{aligned}\frac{ddq}{dt^2} &+ (\lambda+1)q + q\left(-3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \tfrac{3}{2}\lambda O^2\right)\\ &+ P'.p'\left(-3\lambda + 12\lambda O' - 30\lambda O'^2 + \tfrac{15}{2}\lambda O^2\right)\\ &+ P.p'\left(-3\lambda O + 15\lambda O'O = 0.\right.\end{aligned}$$

Equation particulière du troiſième ordre, pour déterminer la valeur de r'

$$\begin{aligned}\frac{dd\,r'}{dt^2} &+ (\lambda+1)r' + r'\left(-3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \tfrac{3}{2}\lambda O^2\right.\\ &+ (P'q' + Q'p')\left(-3\lambda + 12\lambda O' - 30\lambda o'^2 + \tfrac{15}{2}\lambda O^2\right)\\ &+ (Pq' + Q'p')\left(-3\lambda O + 14\lambda O'O\right)\\ &+ P'^2.p'\left(6\lambda - 30\lambda O' + 90\lambda O'^2 - \tfrac{45}{2}\lambda O^2\right)\\ &+ P'.P.p'\left(15\lambda O - 90\lambda O'O\right)\\ &+ P^2.p\left(-\tfrac{3}{2}\lambda + \tfrac{15}{2}\lambda O' - \tfrac{45}{2}\lambda O'^2 + \tfrac{45}{4}\lambda O^2\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Equation particulière du quatrième ordre, pour déterminer la valeur de s'.

$$\frac{dd\,s'}{dt^2} + (\lambda+1)s' + s'.(-3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \tfrac{3}{2}\lambda O^2)$$
$$+ U'p'(-3\lambda + 12\lambda O' - 30\lambda O'^2 + \tfrac{15}{2}\lambda O^2)$$
$$+ Up'(-3\lambda O + 15\lambda O' O$$
$$- 3p'.\,cos.\,t = 0.$$

TABLE V.

§ 14.

Pour la première Coordonnée.

$$x = O' + k \cdot P' + k^2 \cdot Q' + k^3 \cdot R' + a \cdot S' + a^k \cdot T' + x \cdot U' + x^k \cdot V' + a x \cdot W' + i^2 \cdot X' + i^2 k \cdot Y' + i^2 x \cdot Z'.$$

On trouve

$$O' = + 0,0000240 - 0,0071801 \cdot \cos. 2p + 0,0000060 \cdot \cos. 4p.$$

$$P' = + \cos. q + 0,187695 \cdot \cos. (2p - q) - 0,000514 \cdot \cos. (4p - q) - 0,002703 \cdot \cos. (2p + q) - 0,000021 \cos. (4p + q)$$

$$Q' = - 0,53896 - 0,21903 \cdot \cos. 2p + 0,00195 \cdot \cos. 4p + 0,50967 \cdot \cos. q - 0,20179 \cdot \cos. (2p - 2q) + 0,02278 \cdot \cos. (4p - 2q) + 0,00482 \cdot \cos. (2p + 2q) + 0,00004 \cos. (4p + 2q)$$

$$R' = 0 \cdot \cos. q - 0,1908 \cdot \cos. (2p - q) - 0,0482 \cdot \cos. (4p - q) - 0,3807 \cdot \cos. 3q - 0,2300 \cdot \cos. (2p + q) - 0,0058 \cdot \cos. (4p + q) + 0,2623 \cdot \cos. (2p - 3q) - 0,0239 \cdot \cos. (4p - 3q) - 0,0068 \cdot \cos. (2p + 3q) + 0,0000 \cdot \cos. (4p + 3q)$$

$$S' = + 0,11419 \cdot \cos. p - 0,00289 \cdot \cos. 3p$$

$$T' = - 0,0813 \cdot \cos (p - q) + 0,1205 \cdot \cos. (p + q) - 0,0088 \cdot \cos. (3p - q) + 0,0015 \cdot \cos. (3p + q)$$

$$U' = -0{,}006829 \cdot \cos. t + 0{,}029397 \cdot \cos. (2p - t) + 0{,}000046 \cdot \cos. (4p - t) - 0{,}003452 \cdot \cos. (2p + t) - 0{,}000004 \cdot \cos. (4p + t)$$

$$V' = -0{,}17091 \cdot \cos. (q - t) + 0{,}02943 \cdot \cos. (2p - q + t) - 0{,}43632 \cdot \cos. (2p - q - t) + 0{,}10743 \cdot \cos. (q + t) + 0{,}01372 \cdot \cos. (2p + q - t) - 0{,}00037 \cdot \cos. (2p + q + t)$$

$$W' = +0{,}1164 \cdot \cos. (p - t) + 0{,}6135 \cdot \cos. (p + t) + 0{,}0162 \cdot \cos. (3p - t) - 0{,}0048 \cdot \cos. (3p + t)$$

$$X' = -0{,}25019 + 0{,}01928 \cdot \cos. 2p + 0{,}24728 \cdot \cos. 2r - 0{,}01255 \cdot \cos. (2p - 2r) + 0{,}00025 \cdot \cos. (4p - 2r) + 0{,}00002 \cdot \cos. 4p + 0{,}00038 \cdot \cos. (2p + 2r) + 0{,}00000 \cdot \cos. (4p + 2r)$$

$$Y' = +0 \cos. q - 0{,}0709 \cdot \cos. (2p - q) - 0{,}0755 \cdot \cos. (q - 2r) - 0{,}0268 \cdot \cos. (2p - q + 2r) - 0{,}0847 \cdot \cos. (2p + q - 2r) - 0{,}0046 \cdot \cos. (2p + q) - 0{,}1261 \cdot \cos. (q + 2r) + 0{,}0252 \cdot \cos. (2p - q - 2r) - 0{,}0010 \cdot \cos. (2p + q + 2r)$$

$$Z' = +0{,}0098 \cdot \cos. t - 0{,}0584 \cdot \cos. (2p - t) + 0{,}0189 \cdot \cos. (t - 2r) + 0{,}0220 \cdot \cos. (2p + t) - 0{,}0108 \cdot \cos. (t + 2r) - 0{,}0017 \cdot \cos. (2p - t + 2r) - 0{,}0096 \cdot \cos. (2p + t - 2r) + 0{,}0288 \cdot \cos. (2p - t - 2r) + 0{,}0001 \cdot \cos. (2p + t + 2r)$$

TABLE VI.

§ 14.

Pour la seconde Coordonnée.

$$y = O + k.P + k^2.Q + k^3.R + a.S + ak.T + x.U + xk.V + ax.W + i^2.X + i^2k.Y + i^2x.Z.$$

On trouve

$$O = +0{,}0102117.\sin. 2p + 0{,}0000057.\sin. 4p.$$

$$P = -2{,}012639.\sin.q - 0{,}411247.\sin.(2p-q) - 0{,}000724.\sin.(4p-q) - 0{,}003212.\sin.(2p+q) - 0{,}000019.\sin.(4p+q)$$

$$Q = +0{,}09800.\sin. 2p + 0{,}00175.\sin. 4p + 0{,}25209.\sin. 2q + 0{,}31159.\sin.(2p-2q) + 0{,}01183.\sin.(4p-2q) + 0{,}00428.\sin.(2p+2q) + 0{,}00005.\sin.(4p+2q)$$

$$R = +1{,}3662.\sin. q + 0{,}4255.\sin.(2p-q) - 0{,}0377.\sin.(4p-q) - 0{,}2955.\sin. 3q - 0{,}0353.\sin.(2p+q) + 0{,}0010.\sin.(4p+q) - 0{,}2211.\sin.(2p-3q) - 0{,}0071.\sin.(4p-3q) - 0{,}0061.\sin.(2p+3q) - 0{,}0001.\sin.(4p+3q)$$

$$S = -0{,}24035.\sin. p + 0{,}00285.\sin. 3p$$

$$T = +1{,}8056.\sin.(p-q) + 0{,}0603.\sin.(p+q) + 0{,}0720.\sin.(3p-q) - 0{,}0008.\sin.(3p+q)$$

$U = +0{,}190587 . \sin. t - 0{,}043312 . \sin. (2p - t)$
$- 0{,}000143 . \sin. (4p - t) + 0{,}005525 . \sin. (2p + t)$
$+ 0{,}000005 . \sin. (4p + t)$

$V = +0{,}66190 . \sin. (q - t) - 0{,}12631 . \sin. (2p - q + t)$
$+ 1{,}08068 . \sin. (2p - q - t) - 0{,}41712 . \sin. (q + t)$
$+ 0{,}01372 . \sin. (2p + q - t) - 0{,}00441 . \sin. (2p + q + t)$

$W = - 0{,}1093 . \sin. (p - t) - 1{,}2630 . \sin. (p + t)$
$- 0{,}0167 . \sin. (3p - t) + 0{,}0015 . \sin. (3p + t)$

$X = - 0{,}02145 . \sin. 2p - 0{,}24645 . \sin. 2r + 0{,}03407 .$
$\sin. (2p - 2r) - 0{,}00014 . \sin. (4p - 2r) - 0{,}00003 .$
$\sin. 4p - 0{,}00037 . \sin. (2p + 2r) + 0{,}00000 .$
$\sin. (4p + 2r)$

$Y = +0{,}0014 . \sin. q + 0{,}1917 . \sin. (2p - q) - 0{,}4966 .$
$\sin. (q - 2r) + 0{,}0289 . \sin. (2p - q + 2r) + 0{,}1802 .$
$\sin. (2p + q - 2r) + 0{,}0095 . \sin. (2p + q) + 0{,}1249 .$
$\sin. (q + 2r) - 0{,}0590 . \sin. (2p - q - 2r) + 0{,}0009 .$
$\sin. (2p + q + 2r)$

$Z = - 0{,}2496 . \sin. t + 0{,}0697 . \sin. (2p - t)$
$+ 0{,}0204 . \sin. (t - 2r) - 0{,}0247 . \sin. (2p + t)$
$+ 0{,}0099 . \sin. (t + 2r) + 0{,}0017 . \sin. (2p - t + 2r)$
$+ 0{,}1016 . \sin. (2p + t - 2r) - 0{,}0755 .$
$\sin. (2p - t - 2r) - 0{,}00043 . \sin. (2p + t + 2r).$

TABLE VII.

§ 14.

Pour la troisième Coordonnée.

$$Z = i \cdot p' + ik \cdot q' + ik^2 \cdot r' + ix \cdot s' + i^2 \cdot t' + ia \cdot u'$$

On trouve

$$p' = \sin. r + 0{,}036982 \cdot \sin. (2p - r) + 0{,}001513 \cdot \sin.(2p+r) + 0{,}000047 \cdot \sin.(4p-r) + 0{,}000006 \cdot \sin. (4p+r)$$

$$q' = -1{,}48323 \cdot \sin.(q-r) - 0{,}11149 \cdot \sin.(2p-q+r) - 0{,}01634 \cdot \sin.(2p+q-r) - 0{,}50496 \cdot \sin.(q+r) - 0{,}24129 \cdot \sin.(2p-q-r) - 0{,}00296 \cdot \sin.(2p+q+r) - 0{,}00063 \cdot \sin.(4p-q+r) - 0{,}00364 \cdot \sin.(4p-q-r) - 0{,}00008 \cdot \sin.(4p+q-r) - 0{,}00002 \cdot \sin.(4p+q+r)$$

$$r' = 0 \cdot \sin. r + 0{,}0363 \cdot \sin.(2p - r) + 0{,}3425 \cdot \sin.(2q - r) + 0{,}1701 \cdot \sin.(2p-2q-r) + 0{,}0126 \cdot \sin.(2p+2q-r) + 0{,}1589 \cdot \sin.(2p+r) + 0{,}3799 \cdot \sin.(2q+r) + 0{,}0498 \cdot \sin.(2p-2q+r) + 0{,}0046 \cdot \sin.(2p+2q+r)$$

$$s' = -0{,}02384 \cdot \sin.(r-t) + 0{,}03864 \cdot \sin.(2p-r+t) - 0{,}00681 \cdot \sin.(2p+r-t) + 0{,}02022 \cdot \sin.(r+t) - 0{,}10985 \cdot \sin.(2p-r-t) + 0{,}00089 \cdot \sin.(2p+r+t)$$

$$t' = 0.$$

$t' = 0 . \sin. r + 0,0035 . \sin. (2p - r) + 0,0001 .$
$\sin. (4p - r) - 0,0006 . \sin. (2p + r) + 0,0000 .$
$\sin. (4p + r) + 0,0004 . \sin. 3r + 0,0172 .$
$\sin. (2p - 3r) + 0,0009 . \sin. (4p - 3r) + 0,0001 .$
$\sin. (2p + 3r) + 0,0000 . \sin. (4p + 3r)$

$u' = - 0,1583 . \sin. (p - r) - 0,0616 . \sin. (p + r)$
$- 0,0036 . \sin. (3p - r) - 0,0000 . \sin. (3p + r).$

TABLE VIII.

§ 16.

Valeur de la première Coordonnée $\frac{\pi}{\delta} L = 1 + x$.

+	9964129.	+	424 . cos. 2p — 3q
+	2928 . cos. p	—	38 . cos. 4p — 3q
—	63746 . cos. 2p	—	1133 . cos. t
—	74 . cos. 3p	+	264 . cos. p + t
+	120 . cos. 4p	+	50 . cos. p — t
+	545000 . cos. q	—	549 . cos. 2p + t
+	15139 . cos. 2q	+	4854 . cos. 2p — t
—	616 . cos. 3q	—	2 . cos. 3p + t
+	168 . cos. p + q	+	7 . cos. 3p — t
+	143 . cos. 2p + 2q	—	1 . cos. 4p + t
—	114 . cos. p — q	+	7 . cos. 4p — t
—	5994 . cos. 2p — 2q	+	771 . cos. q + t
—	1875 . cos. 2p + q	—	1663 . cos. q — t
+	101675 . cos. 2p — q	—	8 . cos. 2p + q + t
+	677 . cos. 4p — 2q	—	3727 . cos. 2p — q — t
—	20 . cos. 4p + q	+	126 . cos. 2p + q — t
—	358 . cos. 4p — q	+	282 . cos. 2p — q + t
—	11 . cos. 2p + 3q	+	19870 . cos. 2r

+	30. *cos.* 2*p*+2*r*	—	118. *cos.* 2*p*—*q*+2*r*
—	1008. *cos.* 2*p*—2*r*	—	14. *cos t*+2*r*
+	4. *cos.* 4*p*—2*r*	+	25. *cos.t*—2*r*
—	553. *cos.q*+ 2*r*	+	1. *cos.* 2*p*+*t*+2*r*
—	267. *cos.q*—2*r*	+	38. *cos.* 2*p*—*t*—2*r*
—	4. *cos.* 2*p*+*p*+2*r*	—	13. *cos.* 2*p*+*t*—2*r*
+	113 *cos.* 2*p*—*q*—2*r*	—	2. *cos.* 2*p*—*t*+2*r*
—	457. *cos.* 2*p*+*q*—2*r*		

TABLE IX.

§ 16.

Valeur de la seconde Coordonnée $LV = y$.

$- 6162.\sin.p$	$- 471.\sin.4p - q$
$+ 103304.\sin.2p$	$- 9.\sin.2p + 3q$
$+ 73.\sin.3p$	$- 358.\sin.2p - 3q$
$\pm 107.\sin.4p$	$- 1.\sin.4p + 3q$
$- 1094678.\sin.q$	$- 11.\sin.4p - 3q$
$+ 7488.\sin.2q$	$+ 31643.\sin.t$
$- 478.\sin.3q$	$- 543.\sin.p + t$
$\pm 84.\sin p + q$	$- 47.\sin.p - t$
$+ 127.\sin 2p + 2q$	$+ 894.\sin.2p + t$
$+ 2523.\sin.p - q$	$- 7174.\sin.2p - t$
$\pm 9255.\sin.2p - 2q$	$+ 1.\sin.3p + t$
$- 1766.\sin.2p + q$	$- 7.\sin.3p - t$
$+ 1.\sin.4p + 2q$	$+ 1.\sin.4p + t$
$- 222601.\sin.2p - q$	$- 23.\sin.4p - t$
$\pm 351.\sin 4p - 2q$	$- 4455.\sin.q + t$
$- 1.\sin.3p + q$	$+ 6053.\sin.q - t$
$+ 101.\sin.3p - q$	$- 40.\sin.2p + q + t$
$- 8.\sin.4p + q$	$\pm 9883.\sin.2p - q - t$

+	125 . *sin.* 2*p*+*q*—*t*	—	261 . *sin.* 2*p*—*q*—2*r*
—	1152 . *sin.* 2*p*—*q*+*t*	+	790 . *sin.* 2*p*+*q*—2*r*
—	19803 . *sin.* 2*r*	+	126 . *sin.* 2*p*—*q*+2*r*
—	30 . *sin.* 2*p*+2*r*	+	13 . *sin.* *t*+2*r*
+	2738 . *sin.* 2*p*—2*r*	±	28 . *sin.* *t*—2*r*
—	11 . *sin.* 4*p*—2*r*	—	1 . *sin.* 2*p*+*t*+2*r*
±	548 . *sin.* *q*+2*r*	—	102 . *sin.* 2*p*—*t*—2*r*
—	2174 . *sin.* *q*—2*r*	+	137 . *sin.* 2*p*+*t*—2*r*
±	3 . *sin.* 2*p*+*q*+2*r*	±	2 . *sin.* 2*p*—*t*+2*r*

TABLE X.

§ 16.

Valeur de la troiſieme Coordonnée $VC = z$.

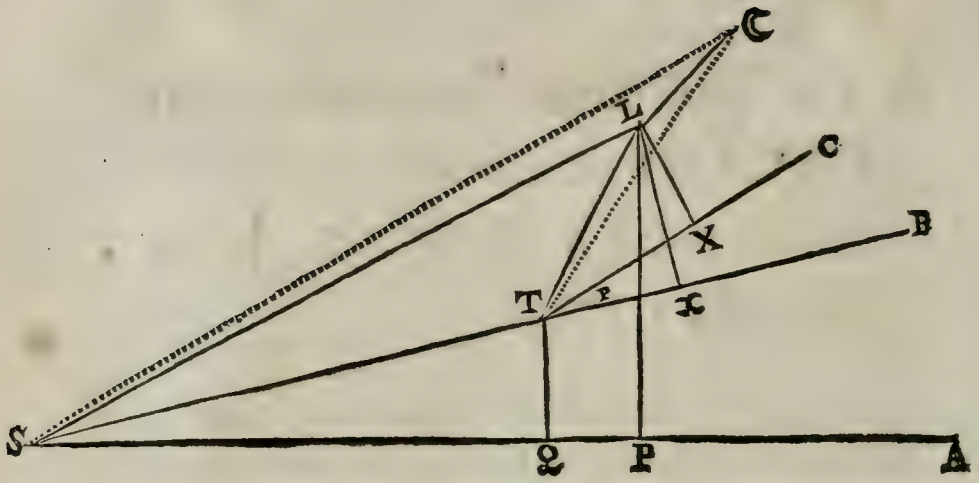
+	$896400.\sin.r$	—	$145.\sin.2p+q+r$
+	$3.\sin.3r$	—	$11787.\sin.2p-q-r$
—	$139.\sin.p+r$	—	$798.\sin.2p+q-r$
—	$363.\sin.p-r$	—	$5447.\sin.2p-q+r$
+	$1774.\sin.2p+r$	+	$12.\sin.2p+2q+r$
+	$33265.\sin.2p-r$	+	$453.\sin.2p-2q-r$
—	$1.\sin.3p-r$	+	$33.\sin.2p+2q-r$
+	$5.\sin.4p+r$	+	$132.\sin.2p-2q+r$
+	$42.\sin.4p-r$	+	$252.\sin.r+t$
+	$127.\sin.2p-3r$	—	$302.\sin.r-t$
—	$24669.\sin.q+r$	+	$13.\sin.2p+r+t$
—	$72460.\sin.q-r$	—	$1649.\sin.2p-r-t$
+	$1012.\sin.2q+r$	—	$103.\sin.2p+r-t$
+	$912.\sin.2q-r$	+	$601.\sin.2p-r+t$

FIN.

RÉPONSE

A LA Queſtion propoſée par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de Paris, pour l'année 1770.

Perfectionner les methodes ſur leſquelles eſt fondée la théorie de la Lune, de fixer par ce moyen celles des équations de ce Satellite, qui ſont encore incertaines, & d'examiner en particulier ſi l'on peut rendre raiſon, par cette théorie de l'équation ſéculaire du mouvement de la Lune.


C
L
c
B
X
T
P
x
S
Q
P
A

THÉORIE
DE LA LUNE.

Errantemque canit Lunam. *Virg.*

PREMIÈRE SECTION

Des formules différentielles qui déterminent le mouvement de la Lune.

ARTICLE PREMIER.

Des formules tirées immédiatement de l'action du Soleil & de la Terre.

§. I.

QUE le plan de l'écliptique ſoit repréſenté par celui de la planche: ſoit S le centre du Soleil conſidéré en repos, & SA une ligne fixe tirée vers l'équinoxe du printems. Qu'à un temps propoſé, la Terre ſe trouve en T & la Lune hors du plan de l'écliptique en $\mathfrak{C}$; d'où l'on baiſſe ſur ce plan la perpendiculaire $\mathfrak{C}L$. Enfin ayant mené

les droites LS, ST, TL, $S\mathbb{C}$ & $T\mathbb{C}$, qu'on tire ſur SA les perpendiculaires TQ & LP.

II.

Cela poſé, qu'on nomme $ST = u$: l'angle $AST = \varphi$; la diſtance $SL = v$; & $TL = \omega$; enſuite les trois coordonnées pour le lieu de la Lune : $SP = X$, $PL = Y$, $L\mathbb{C} = Z$; & on aura $SQ = u \cos. \varphi$; $QT = u \sin. \varphi$; & les diſtances $S\mathbb{C} = \sqrt{(vv + ZZ)}$; $T\mathbb{C} = \sqrt{(\omega\omega + ZZ)}$. D'où exprimant les maſſes du Soleil & de la Terre par S & T, les forces dont la Lune eſt ſollicitée, ſeront

$$\text{Selon } \mathbb{C}S = \frac{S}{vv + ZZ} \text{ \& ſelon } \mathbb{C}T = \frac{T}{\omega\omega + ZZ}$$

qu'on décompoſera aiſément ſuivant les directions de nos trois coordonnées.

III.

Que t marque un angle proportionnel au temps pour lequel nous prendrons dans la ſuite l'anomalie moyenne du Soleil, & prenant le différentiel dt pour conſtant, les principes de Méchanique nous fourniſſent ces trois équations.

$$1.\ \frac{ddX}{dt^2} = -\frac{S.X}{(vv + ZZ)^{\frac{3}{2}}} - \frac{T.(X - u\cos.\varphi)}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}} :$$

$$2.\ \frac{ddY}{dt^2} = -\frac{S.Y}{(vv + ZZ)^{\frac{3}{2}}} - \frac{T.(Y - u\sin.\varphi)}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}} :$$

$$3.\ \frac{ddZ}{dt^2} = -\frac{S.Z}{(vv + ZZ)^{\frac{3}{2}}} - \frac{T.Z}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}} :$$

IV.

Nous poſerons dans le ſuite la diſtance moyenne de la Terre au Soleil $= 1$, & puiſque t marque l'anomalie

moyenne du Soleil, on ſait, par la théorie du mouvement des Planètes que la lettre S ſera auſſi exprimée par l'unité, ou $S = 1$. De-là on ſait auſſi que poſant l'excentricité de l'orbite de la Terre $= v$, dont la valeur eſt : $v = 0{,}01676$. On aura $u = 1 + v\,cof.\,t$ & $\frac{d\varphi}{dt} = 1 - 2v\,cof.\,t$. Ces valeurs ſeront ſuffiſantes pour notre deſſein, & on pourra hardiment négliger les termes où la lettre v auroit deux & pluſieurs dimenſions.

V.

Puiſque la diſtance v eſt extrêment grande, par rapport à l'ordonnée Z, & à plus forte raiſon vv à l'égard de ZZ, il ſera permis de négliger dans la formule $vv+ZZ$ le terme ZZ. Cela remarqué, nos trois équations prendront les formes ſuivantes.

$$1.\quad -\frac{ddX}{dt^2} - \frac{X}{v^3} = \frac{T.(X - u\,cof.\varphi)}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}};$$

$$2.\quad -\frac{ddY}{dt^2} - \frac{Y}{v^3} = \frac{T.(Y - u\,ſin.\varphi)}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}};$$

$$3.\quad -\frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{v^3} = \frac{T.Z}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}}$$

ARTICLE II.

Réduction de ces formules à d'autres coordonnées qui ſe rapportent au lieu de la Terre.

VI.

AYANT prolongé la ligne ST en B, de ſorte que B marque l'oppoſition du Soleil vu de la Terre, qu'on y tire la perpendiculaire Lx, & qu'on poſe les trois coordonnées $Tx = x$; $xL = y$ & $L\mathbb{C} = Z = z$, & nous aurons $vv = (u+x)^2 + yy$; $\omega\omega = xx + yy$. De-là puiſque x & y

ſont très-petites par rapport à u, à cauſe de $vv = uu + 2ux + xx + yy$, nous aurons, en négligeant les termes où x & y auroient plus de deux dimenſions $\frac{1}{v^3} = \frac{1}{u^3} - \frac{3x}{u^4} + \frac{6xx}{u^5} - \frac{3yy}{2u^5}$. Ou l'on pourra même rejetter les termes xx & yy, à moins qu'il ne s'agiſſe de déterminer les inégalités de la Lune qui dépendent de la parallaxe du Soleil.

VII.

Maintenant pour réduire les coordonnées précédentes à celle-ci, il eſt évident qu'on aura $X = (u+x)\cos.\varphi - y\sin.\varphi$, & $Y = y\cos.\varphi + (u+x)\sin.\varphi$; d'où l'on pourroit calculer les valeurs de dX, dY, ddX & ddY; mais comme cela nous méneroit à des calculs trop embarraſſés, nous commencerons à ſubſtituer à la place des deux premières équations, les deux ſuivantes:

$I \times \cos.\varphi + II \times \sin.\varphi$ & $II\cos.\varphi - I \times \sin.\varphi$ qui ſeront

1. $$-\frac{ddX.\cos.\varphi - ddY.\sin.\varphi}{dt^2} - \frac{X.\cos.\varphi - Y.\sin.\varphi}{v^3} = \frac{T.(X\cos.\varphi + Y.\sin.\varphi - u)}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}}$$

2. $$-\frac{ddY.\cos.\varphi + ddX.\sin.\varphi}{dt^2} - \frac{Y.\cos.\varphi + X.\sin.\varphi}{v^3} = \frac{T.(Y.\cos.\varphi - X.\sin.\varphi)}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}}.$$

Auxquelles on doit toujours joindre la troiſième,

3. $$-\frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{v^3} = \frac{T.Z.}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}}.$$

VIII.

Pour faire le plus ſuccinctement les ſubſtitutions néceſſaires, tirons d'abord des valeurs de X & Y les rapports ſuivans: $X.\cos.\varphi + Y.\sin.\varphi = u + x$, $Y.\cos.\varphi - X.\sin.\varphi = y$: différentions ces formules, & nous obtiendrons

$dX.\cos.\varphi + dY.\sin.\varphi + d\varphi(Y.\cos.\varphi - X.\sin.\varphi) = du + dx$

par conſéquent

$dX.\,cof.\,\varphi + dY.\,fin.\,\varphi = du + dx - y\,d\varphi$

& de la même manière

$dY.\,cof.\,\varphi - dX.\,fin.\,\varphi = dy + (u+x)\,d\varphi$

Ces formules étant encore une fois différentiées, fourniront

$ddX.\,cof.\,\varphi + ddY.\,fin.\,\varphi = ddu + ddx - y\,dd.\,\varphi - 2dy\,d\varphi - (u+x)\,d\varphi^2$ &

$ddY.\,cof.\,\varphi - ddX.\,fin.\,\varphi = ddy + (u+x)\,dd\varphi + 2du\,d\varphi + 2dx\,d\varphi - y\,d\varphi^2.$

IX.

On voit que par cette réduction, les $fin.\,\varphi$ & $cof.\,\varphi$ s'en vont par tout du calcul, & maintenant nos trois équations fondamentales ſeront:

1. $-\frac{ddx}{dt^2} + \frac{2dydp}{dt^2} + \frac{yddp}{dt^2} + \frac{xdp^2}{dt^2} - \frac{ddu}{dt^2} + \frac{udp^2}{dt^2} - \frac{u-x}{v^3} = Tx.(\omega\omega + ZZ)^{-\frac{3}{2}}$

2. $-\frac{ddy}{dt^2} + \frac{2dx\,dp}{dt^2} - \frac{xddp}{dt^2} + \frac{ydp^2}{dt^2} - \frac{uddp}{dt^2} - \frac{2dudv}{dt^2} - \frac{y}{v^3} = Ty.(\omega\omega + ZZ)^{-\frac{3}{2}}$

3. $-\frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{v^3} = TZ.(\omega\omega + ZZ)^{-\frac{3}{2}}$

Ce ſont donc nos équations rapportées aux trois coordonnées x, y & Z.

X.

Avant que de paſſer plus loin, ſubſtituons ici au lieu de $\frac{1}{v^3}$ la valeur donnée ci-deſſus (§. VI), & rejettons toujours les termes où x & y auroient plus de deux dimenſions: alors nos trois équations prendront les formes qui ſuivent.

$$1.\ -\frac{ddx}{dt^2}+\frac{2dy\,d\varphi}{dt^2}+\frac{y\,dd\varphi}{dt^2}+\frac{x\,d\varphi^2}{dt^2}-\frac{ddu}{dt^2}+\frac{u\,d\varphi^2}{dt^2}-\frac{1}{uu}+\frac{2x}{u^3}$$
$$-\frac{3xx}{u^4}+\frac{3yy}{2u^4}=Tx.(\omega\omega+ZZ)^{-\frac{3}{2}};$$

$$2.\ -\frac{ddy}{dt^2}-\frac{2dx\,d\varphi}{dt^2}+\frac{y\,d\varphi^2}{dt^2}-\frac{x\,dd\varphi}{dt^2}-\frac{u\,dd\varphi}{dt^2}-\frac{2du\,d\varphi}{dt^2}-\frac{y}{u^3}$$
$$+\frac{3xy}{u^4}=Ty.(\omega\omega+ZZ)^{-\frac{3}{2}};$$

$$3.\ -\frac{ddZ}{dt^2}-\frac{Z}{u^3}+\frac{3xZ}{u^4}=TZ.(\omega\omega+ZZ)^{-\frac{3}{2}}.$$

ARTICLE III.

Réduction ultérieure de ces formules à des coordonnées, qui se rapportent à la distance moyenne de la Lune au Soleil.

XI.

COMME l'angle *BTL* marque la véritable élongation de la Lune à l'opposition du Soleil *B* sur l'écliptique, soit *p* l'élongation moyenne de la Lune au même terme *B*, & tirons la droite *TC*, ensorte que l'angle *BTC* soit $=p$. Qu'on abaisse sur cette *TC* de *L* la perpendiculaire *LX*, & qu'on nomme les trois coordonnées $TX=X$; $XL=Y$; $L\mathfrak{C}=z=Z$, auxquelles il s'agit de réduire nos trois équations différentio-différentielles. Pour cet effet, remarquons que le rapport de *dp* à *dt* est donné par les Tables Astronomiques, d'où prenant un intervalle de 30 jours, on trouve $\frac{dp}{dt}=\frac{12^f\ 5^\circ\ 43'\ 21''.1}{0^f\ 29^\circ\ 34'\ 4''.5}$, ou $\frac{dp}{dt}=\frac{1316601.1}{106444.5}$ $=12,3688974$. Je poserai, pour abréger, $dp=mdt$, desorte que $m=12,3688974$.

XII.

XII.

Ces nouvelles coordonnées tiennent aux précédentes les rappports suivans :

$x = X\,cos.\,p - Y\,sin.\,p$; $y = Y\,cos.\,p + X\,sin.\,p$

& réciproquement,

$x\,cos.\,p + y\,sin.\,p = X$; $y\,cos.\,p - x\,sin.\,p = Y$.

Il sera bon d'avertir ici, qu'il ne faut pas confondre ces lettres majuscules X & Y avec celles dont je me suis servi au premier article, & que je regarde comme entièrement oubliées.

XIII.

Pour éviter les calculs trop prolixes, je transformerai encore les deux premières équations du §. X en d'autres, par ces combinaisons,

$I.\,cos.\,p + II.\,sin.\,p$ & $II.\,cos.\,p - I.\,sin.\,p$;

dont la première donnera :

$$-\frac{ddx\,cos.p - ddy\,sin.p}{dt^2} + \frac{2d\varphi(dy\,cos.p - dx\,sin.p)}{dt^2} + \frac{dd\varphi(y\,cos.p - x\,sin.p)}{dt^2}$$
$$+ \frac{d\varphi^2(x\,cos.p + y\,sin.p)}{dt^2} - \frac{ddu\,cos.p}{dt^2} - \frac{u\,dd\varphi\,sin.p}{dt^2} + \frac{ud\varphi^2\,cos.p}{dt^2}$$
$$- \frac{2du\,d\varphi\,sin.p}{dt^2} - \frac{cos.p}{uu} + \frac{2x\,cos.p}{u^3} - \frac{y\,sin.p}{u^3} + \frac{3yy\,cos.p}{2u^4}$$
$$+ \frac{3xy\,sin.p}{u^4} + \frac{3xx\,cos.p}{u^4} = \frac{T(x\,cos.p + y\,sin.p)}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}}$$

& la seconde donnera

$$-\frac{ddy\,cos.p + ddx\,sin.p}{dt^2} - \frac{2d\varphi(dx\,cos.p + dy\,sin.p)}{dt^2} - \frac{dd\varphi(x\,cos.p + y\,sin.p)}{dt^2}$$
$$+ \frac{d\varphi^2(y\,cos.p - x\,sin.p)}{dt^2} - \frac{udd\varphi\,cos.p}{dt^2} + \frac{ddu\,sin.p}{dt^2} - \frac{2du\,d\varphi\,cos.p}{dt^2}$$
$$- \frac{ud\varphi^2\,sin.p}{dt^2} + \frac{sin.p}{uu} - \frac{y\,cos.p}{u^3} - \frac{2x\,sin.p}{u^3} - \frac{3yy\,sin.p}{2u^4} + \frac{3xy\,cos.p}{u^4}$$
$$+ \frac{3xx\,sin.p}{u^4} = \frac{T(y\,cos.p - x\,sin.p)}{u^4}.$$

XIV.

A présent il ne sera plus difficile de faire les substitutions; car comme $x\,cos.p + y\,sin.p = X$; $y\,cos.p - x\,sin.p = Y$; nous en tirerons, en différentiant,

$dx\,cos.p + dy\,sin.p = dX - Ydp$;

$dy\,cos.p - dx\,sin.p = dY + Xdp$: ensuite

$ddx\,cos.p + ddy\,sin.p = ddX + 2dYdp - Xdp^2$;

$ddy\,cos.p - ddx\,sin.p = ddY + 2dX\,dp - Y\,dp^2$.

XV.

A l'aide de ces réductions, & à cause de $dp = mdt$, notre première équation deviendra, après avoir arrangé tous les termes selon les X & Y:

$$1. - \frac{ddX}{dt^2} + \frac{2dY}{dt}\left(m + \frac{d\varphi}{dt}\right) + X\left(mm + \frac{2m\,d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{2cos.p^2 - sin.p^2}{u^3}\right) + Y\left(\frac{dd\varphi}{dt^2} - \frac{3sin.p.\,cos.p}{u^3}\right) + \frac{3XX\,cos.p}{u^4}\left(\tfrac{3}{2}sin.p^2 - cos.p^2\right) + \frac{3XY\,sin.p}{u^4}\left(4cos.p^2 - sin.p^2\right) + \frac{3YY\,cos.p}{u^4}\left(\tfrac{1}{2}cos.p^2 - 2sin.p^2\right) - \frac{cos.p}{uu} - \frac{ddu\,cos.p}{dt^2} + \frac{ud\varphi^2\,cos.p}{dt^2} - \frac{uddq\,sin.p}{dt^2} - \frac{2d\,ud\varphi\,sin.p}{dt^2} = T.X(\omega\omega + ZZ)^{-\frac{3}{2}}.$$

De la même manière, nous trouverons la seconde équation.

$$2. - \frac{ddY}{dt^2} - \frac{2dX}{dt}\left(m + \frac{d\varphi}{dt}\right) + Y\left(mm + \frac{2m\,d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{2sin.p^2 - cos.p^2}{u^3}\right) - X\left(\frac{dd\varphi}{dt^2} + \frac{3sin.p.\,cos.p}{u^3}\right) + \frac{3YY\,sin.p}{u^4}\left(sin.p^2 - \tfrac{3}{2}cos.p^2\right) + \frac{3XY\,cos.p}{u^4}\left(cos.p^2 - 4sin.p^2\right) + \frac{3XX\,sin.p}{u^4}$$

$$(2\cos.p^2 - \tfrac{1}{2}\sin.p^2) + \frac{\sin.p}{uu} - \frac{udd\varphi\cos.p}{dt^2} - \frac{2dud\varphi\cos.p}{dt^2} + \frac{ddu\sin.p}{dt^2}$$
$$- \frac{ud\varphi^2\sin.p}{dt^2} = T.Y(\omega\omega + ZZ)^{-\frac{1}{2}}$$

Et la troisième équation sera

$$3. - \frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{u^3} - \frac{3XZ\cos.p}{u^4} + \frac{3YZ\sin.p}{u^4} = T.Z(\omega\omega + ZZ)^{-\frac{1}{2}}.$$

ARTICLE IV.

Troisième réduction de ces formules, en les appliquant à la question proposée.

XVI.

Nos équations différentio-différentielles deviendront beaucoup plus simples, si l'on a égard à la théorie du Soleil, par laquelle on sait que *I.* $\frac{udd\varphi + 2du\,d\varphi}{dt^2} = 0$; *II.* $\frac{ddu - ud\varphi^2}{dt^2} = -\frac{1}{uu}$, & de là $uud\varphi = dt$ ou $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{uu}$ & $\frac{dd\varphi}{dt^2} = \frac{d.\frac{1}{uu}}{dt}$. Car en substituant ces relations dans les formules trouvées, tous les termes où il n'y a ni X ni Y se détruiront.

XVII.

Nous obtiendrons de là les équations suivantes:

$$1. - \frac{ddX}{dt^2} + \frac{2dY}{dt}\left(m + \frac{1}{uu}\right) + X\left(mm + \frac{2m}{uu} + \frac{1}{u^4} + \frac{2\cos.p^2 - \sin.p^2}{u^3}\right) + Y\left(\frac{d.\frac{1}{uu}}{dt} - \frac{3\sin.p\cos.p}{u^3}\right) + \frac{3XX\cos.p}{u^4}$$

$$\left(\tfrac{3}{2}\mathit{sin.}p^2 - \mathit{cos.}p^2\right) + \frac{3XY\mathit{sin.}p}{u^4}\left(4\mathit{cos.}p^2 - \mathit{sin.}p^2\right) + \frac{3YY\mathit{cos.}p}{u^4}$$
$$\left(\tfrac{1}{2}\mathit{cos.}p^2 - 2\mathit{sin.}p^2\right) = TX\left(\omega\omega + ZZ\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$2. - \frac{ddY}{dt^2} - \frac{2dX}{dt}\left(m + \frac{1}{uu}\right) + Y\left(mm + \frac{2m}{uu} + \frac{1}{u^4}\right.$$
$$\left. + \frac{2\mathit{sin.}p^2 - \mathit{cos.}p^2}{u^3}\right) - X\left(\frac{d.\frac{1}{uu}}{dt} + \frac{3\mathit{sin.}p\,\mathit{cos.}p}{u^3}\right) + \frac{3YY\mathit{sin.}p}{u^4}$$
$$\left(\mathit{sin.}p^2 - \tfrac{3}{2}\mathit{cos.}p^2\right) + \frac{3XY\mathit{cos.}p}{u^4}\left(\mathit{cos.}p^2 - 4\mathit{sin.}p^2\right) + \frac{3XX\mathit{sin.}p}{u^4}$$
$$\left(2\mathit{cos.}p^2 - \tfrac{1}{2}\mathit{sin.}p^2\right) = T.Z\left(\omega\omega + ZZ\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$3. - \frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{u^3} - \frac{3Z(X\mathit{cos.}p - Y\mathit{sin.}p)}{u^4} = T.Z\left(\omega\omega + ZZ\right)^{-\frac{3}{2}}$$

XVIII.

En ſubſtituant les ſinus & coſinus des angles multiples à la place des produits des ſinus & coſinus de l'angle ſimple p, ces trois équations différentio-différentielles prendront ces formes.

$$1. \left.\begin{array}{l} - \frac{ddX}{dt^2} + \frac{2dY}{dt}\left(m + \frac{1}{uu}\right) + X\left(mm + \frac{2m}{uu}\right. \\ \left. + \frac{1}{u^4} + \frac{1 + 3\mathit{cos.}2p}{2u^3}\right) + Y\left(\frac{d.\frac{1}{uu}}{dt} - \frac{3\mathit{sin.}2p}{2u^3}\right) \\ - \frac{XX\left(9\mathit{cos.}p + 15\mathit{cos.}3p\right)}{8u^4} + \frac{XY\left(3\mathit{sin.}p + 15\mathit{sin.}3p\right)}{4u^4} \\ - \frac{YY\left(3\mathit{cos.}p - 15\mathit{cos.}3p\right)}{8u^4} - T.X\left(XX + YY + ZZ\right)^{-\frac{1}{2}} \end{array}\right\} = 0.$$

$$2. \left.\begin{array}{l} - \frac{ddY}{dt^2} - \frac{2dX}{dt}\left(m + \frac{1}{uu}\right) + Y\left(mm + \frac{2m}{uu}\right. \\ \left. + \frac{1}{u^4} + \frac{1 - 3\mathit{cos.}2p}{2u^3}\right) - X\left(\frac{d.\frac{1}{uu}}{dt} + \frac{3\mathit{sin.}2p}{2u^3}\right) \\ + \frac{YY\left(9\mathit{sin.}p - 15\mathit{sin.}3p\right)}{8u^4} - \frac{XY\left(3\mathit{cos.}p - 15\mathit{cos.}3p\right)}{4u^4} \\ + \frac{XX\left(3\mathit{sin.}p + 15\mathit{sin.}3p\right)}{8u^4} - T.Y\left(XX + YY + ZZ\right)^{-\frac{3}{2}} \end{array}\right\} = 0.$$

$$3.\ -\frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{u^3} - \frac{3ZX\cos.p}{u^4} + \frac{3ZY\sin.p}{u^4} \Big\} \ldots = 0$$
$$- T.Z(XX+YY+ZZ)^{-\frac{1}{2}}$$

A cauſe de $\omega\omega = XX+YY$.

ARTICLE V.

Dernière réduction de ces formules différentio-différentielles.

XIX.

COMME les deux coordonnées Y & Z ſont toujours très-petites à l'égard de la troiſième X, dont la moyenne valeur eſt a, il ſera bon d'introduire au lieu de ces coordonnées trois autres inconnues qui conſervent entr'elles une plus grande égalité : je poſerai pour cet effet, $X = a(1+x)$; $Y = ay$ & $Z = az$, en avertiſſant encore qu'il ne faudra pas confondre ces x, y & z avec les coordonnées employées au ſecond article. Cette ſubſtitution nous procurera auſſi l'avantage de pouvoir développer en général les formules irrationelles qui entrent dans nos équations différentio-différentielles, & qui ſans cela embarraſſeroient beaucoup lorſque nous voudrions en faire l'application aux inégalités des mouvemens de la Lune.

XX.

Ayant $XX+YY+ZZ = aa(1+2x+xx+yy+zz)$, nous aurons d'abord $(XX+YY+ZZ)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^3}(1 - 3x + 6xx - \frac{3}{2}yy - \frac{3}{2}zz - 10x^3 + \frac{15}{2}xyy + \frac{15}{2}xzz)$, en negligeant les quatrièmes & les plus hautes puiſſances de x, y, & z. Soit maintenant $\frac{T}{a^3} = \lambda$, dont la valeur, quelle

qu'elle ſoit, ſera toujours conſtante, & nous obtiendrons, pour les derniers membres de nos trois équations, ces valeurs :

$$T.X(XX+YY+ZZ)^{-\frac{3}{2}} = \lambda a(1 - 2x + 3xx - \tfrac{3}{2}yy - \tfrac{3}{2}zz - 4x^3 + 6yyx + 6xzz)$$

$$T.Y(XX+YY+ZZ)^{-\frac{3}{2}} = \lambda a(y - 3yx + 6yxx - \tfrac{3}{2}y^3 - \tfrac{3}{2}yzz)$$

$$T.Z(XX+YY+ZZ)^{-\frac{3}{2}} = \lambda a(z - 3zx + 6zxx - \tfrac{3}{2}zyy - \tfrac{3}{2}z^3).$$

XXI.

D'où nos trois équations deviendront, après les avoir diviſées par a :

$$\left.\begin{aligned} 1.\ &- \frac{ddx}{dt^2} + \frac{2dy}{dt}\left(m + \frac{1}{uu}\right) + mm + \frac{2m}{uu} + \frac{1}{u^4} \\ &+ \frac{1}{2u^3} - \lambda + \frac{3\cos.2p}{2u^3} + x\left(mm + \frac{2m}{uu} + \frac{1}{u^4}\right. \\ &\left. + \frac{1}{2u^3} + 2\lambda\right) + y.\frac{d.\frac{1}{uu}}{dt} + \frac{3x\cos.2p}{2u^3} - \frac{3y\sin.2p}{2u^3} \\ &- 3\lambda xx + \tfrac{3}{2}\lambda yy + \tfrac{3}{2}\lambda zz + 4\lambda x^3 - 6\lambda xyy \\ &- 6\lambda xzz - \frac{a}{u^4}\left(\tfrac{9}{8}\cos.p + \tfrac{15}{4}\cos.3p\right) - \frac{ax}{u^4} \\ &\left(\tfrac{9}{4}\cos.p + \tfrac{15}{4}\cos.3p\right) + \frac{ay}{u^4}\left(\tfrac{3}{4}\sin.p + \tfrac{15}{4}\sin.3p\right) \end{aligned}\right\} = 0.$$

$$\left.\begin{aligned} 2.\ &- \frac{ddy}{dt^2} - \frac{2dx}{dt}\left(m + \frac{1}{uu}\right) - \frac{d.\frac{1}{uu}}{dt} - \frac{3\sin.2p}{2u^3} \\ &+ y\left(mm + \frac{2m}{uu} + \frac{1}{u^4} + \frac{1}{2u^3} - \lambda\right) - x\frac{d.\frac{1}{uu}}{dt} \\ &- \frac{3y\cos.2p}{2u^3} - \frac{3x\sin.2p}{2u^3} + 3\lambda xy - 6\lambda yxx + \tfrac{3}{2}\lambda y^3 \\ &+ \tfrac{3}{2}\lambda yzz + \frac{a}{u^4}\left(\tfrac{3}{8}\sin.p + \tfrac{15}{8}\sin.3p\right) \\ &- \frac{ay}{u^4}\left(\tfrac{3}{4}\cos.p - \tfrac{15}{4}\cos.3p\right) + \frac{ax}{u^4}\left(\tfrac{3}{4}\sin.p + \tfrac{15}{4}\sin.3p\right) \end{aligned}\right\} = 0.$$

$$3.\ -\frac{dd\zeta}{dt^2} - \frac{\zeta}{u^3} - \lambda z + 3\lambda zx - 6\lambda zxx + \tfrac{3}{2}\lambda zyy + \tfrac{3}{2}\lambda z^3 - \frac{3a\zeta\ cof.\ p}{u^4} \Big\} = \ldots 0.$$

En omettant les termes affectés par axx, ayy, axy, axz & ayz, puiſque les inégalités qui en dépendent ne pourront pas monter à une ſeconde.

XXII.

Enfin comme la théorie de la Terre fournit, pour la diſtance u, cette valeur $u = 1 + v\ cof.\ t$, nous aurons, en négligeant les puiſſances de v : $\frac{1}{uu} = 1 - 2v\ cof.\ t$; $\frac{1}{u^3} = 1 - 3v\ cof.t$; $\frac{1}{u^4} = 1 - 4v\ cof.t$; donc $\frac{d.\frac{1}{uu}}{dt} = 2v\ ſin.t$

$\frac{3\ ſin.\ 2p}{2u^3} = \frac{3}{2}\ ſin.\ 2p - \frac{9}{4}v\ ſin.(2p-t) - \frac{9}{4}v\ ſin.(2p+t)$:

$\frac{3\ cof.\ 2p}{2u^3} = \frac{3}{2}\ cof.2p - \frac{9}{4}v\ cof.(2p-t) - \frac{9}{4}v\ cof.(2p+t)$: &c.

XXIII.

D'où en ſubſtituant ces valeurs dans nos trois équations différentio différentielles, & en arrangeant leurs termes ſelon leur importance, nous parviendrons enfin aux équations, & qui ſeront celles dont je me ſervirai dans les recherches préſentes.

Équations qui renferment toutes les inégalités du mouvement de la Lune.

$$1.\ -\frac{ddx}{dt^2} + \frac{2'm+1)\,dy}{dt} + x(mm+2m+\tfrac{3}{2}+2\lambda) + mm + 2m + \tfrac{3}{2} - \lambda + \tfrac{3}{2}\ cof.\ 2p + \tfrac{3}{2}x\ cof.\ 2p - \tfrac{3}{2}y\ ſin.\ 2p - 3\lambda xx + \tfrac{3}{2}\lambda yy + \tfrac{3}{2}\lambda zz + 4\lambda x^3 - 6\lambda xyy - 6\lambda xzz - a(\tfrac{9}{8}\ cof.\ p + \tfrac{15}{8}\ cof.\ 3p)$$

$$\left.\begin{array}{l} -ax\left(\frac{9}{4}cos.p+\frac{15}{4}cos.3p\right)+ay\left(\frac{3}{4}sin.p+\frac{15}{4}sin.3p\right) \\ -v\left(\left(4m+\frac{11}{2}\right)cos.t+\frac{9}{4}cos.(2p-t)+\frac{9}{4}cos.(2p+t)\right) \\ -4vcos.t.\frac{dy}{dt}-vx\left(\left(4m+\frac{11}{2}\right)cos.t+\frac{9}{4}cos.(2p-t)\right. \\ \left.+\frac{9}{4}cos.(2p+t)\right)+vy\left(2sin.t+\frac{9}{4}sin.(2p-t)\right. \\ \left.+\frac{9}{4}sin.(2p+t)\right) \end{array}\right\}=0.$$

$$2.\left.\begin{array}{l} -\frac{ddv}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx}{dt}+y(mm+2m+\frac{1}{2}-\lambda) \\ -\frac{3}{2}sin.2p-\frac{3}{2}ycos.2p-\frac{3}{2}xsin.2p+3\lambda xy+\frac{3}{2}\lambda y^3 \\ -6\lambda xxy+\frac{3}{2}\lambda zzy+a\left(\frac{3}{8}sin.p+\frac{15}{8}sin.3p\right) \\ -ay\left(\frac{3}{4}cos.p-\frac{15}{4}cos.3p\right)+ax\left(\frac{3}{4}sin.p+\frac{15}{4}sin.3p\right) \\ -v\left(2sin.t-\frac{9}{4}sin.(2p-t)-\frac{9}{4}sin.(2p+t)\right) \\ +4vcos.t\,\frac{dx}{dt}-vy\left(\left(4m+\frac{11}{2}\right)cos.t-\frac{9}{4}cos.(2p-t)\right. \\ \left.-\frac{9}{4}cos.(2p+t)\right)-vx\left(2sin.t-\frac{9}{4}sin.(2p-t)\right. \\ \left.-\frac{9}{4}sin.(2p+t)\right) \end{array}\right\}=0.$$

$$3.\left.\begin{array}{l} -\frac{ddz}{dt^2}-(1+\lambda)z+3\lambda xz+\frac{3}{2}\lambda z^3-6\lambda xxz \\ +\frac{3}{2}\lambda yyz-3az\,cos.p+3vz\,cos.t \end{array}\right\}=0.$$

Tous les autres termes que j'ai négligés ici, ſont trop petits pour qu'il en puiſſe réſulter une erreur de deux à trois ſecondes dans le lieu de la Lune.

XXIV.

Au reſte il ſera bon de répéter ici que $m=12,3688974$ & par conſéquent $2(m+1)=26,7377948$; $mm+2m+\frac{3}{2}=179,2274177$; $4m+\frac{11}{2}=54,9755896$. Enſuite l'unité exprimant ici la diſtance moyenne de la Terre au Soleil, nous aurons à-peu-près $v=0,01676$ & $a=0,0025$: je dis *à-peu-près*, car les vraies valeurs de ces rapports ſe doivent déterminer, lorſqu'on comparera les

les inégalités trouvées par nos équations à celles que les observations fourniſſent.

XXV.

Or ayant trouvé les valeur de x, y, z, nous obtiendrons pour les coordonnées $TX = X = a(1+x)$; $LX = Y = ay$; $L\mathfrak{C} = Z = az$: & delà $TL = \sqrt{(XX+YY)}$; $T\mathfrak{C} = \sqrt{(XX+YY+ZZ)}$; la tangente de l'angle $LTX = \frac{Y}{X}$; & la tangente de l'angle $\mathfrak{C}TL = \frac{Z}{\sqrt{(XX+YY)}}$.

ARTICLE VI.

Réflexions ſur les formules qu'on vient de trouver.

XXVI.

Puisque la droite TC eſt tirée, enſorte que l'angle BTC eſt égal à l'élongation moyenne de la Lune à l'oppoſition du Soleil, & qu'on trouve en additionnant ſix ſignes à la différence des longitudes moyennes du Soleil & de la Lune, on voit qu'en ajoutant à cet angle le petit angle CTL, dont la tangette eſt $\frac{Y}{X}$, on aura la véritable élongation de la Lune à l'oppoſition du Soleil ; donc, quand on y ajoute encore l'angle BSA, qui exprime l'excès de la longitude vraie du Soleil ſur ſix ſignes, on aura la vraie longitude de la Lune dans l'écliptique. Or, la vraie longitude du Soleil étant égale à la moyenne plus ſon équation du centre, il s'enſuit que pour trouver la vraie longitude de la Lune, on n'a qu'à ajouter à ſa longitude moyenne premièrement l'angle CTL & outre cela encore l'équation du centre du Soleil : c'eſt-à-dire

Long. vraie de la ☾ = long. moyenne de la ☾ + angle dont la tangente eſt $\frac{Y}{X}$ + l'équation du centre du ☉.

XXVII.

Comme je tâcherai dans la ſuite de déterminer l'angle TCL auſſi exactement qu'on puiſſe le ſouhaiter, on comprend que cet angle n'eſt pas égal à la ſomme de toutes les équations que les Tables ordinaires contiennent pour la Lune; mais qu'il ne donne que l'excès de cette ſomme entière ſur l'équation du Soleil; ou bien, ſi nous ajoutons l'équation du Soleil à notre angle CTL, cette ſomme doit être égale au réſultat de toutes les équations dont on ſe ſert ordinairement pour trouver le lieu de la Lune. Je ne parle ici que de la longitude réduite à l'écliptique: la latitude ſe déterminera aiſément par notre troiſième coordonnée $L\text{☾} = Z$, attendu que $\frac{Z}{\sqrt{(XX+YY)}}$ donnne d'abord la tangente de la latitude de la Lune. Enfin, comme la diſtance $T\text{☾} = \sqrt{(XX + YY + ZZ)}$, on en connoîtra aiſément la parallaxe horizontale de la Lune avec ſon diametre apparent.

XXVIII.

Voila donc en quoi conſiſte principalement la différence entre cette nouvelle méthode & celle dont on s'eſt ſervi juſqu ici, où l'on s'eſt donné toutes les peines imaginables pour trouver les inégalités dans le mouvement de la Lune, chacune ſéparément des autres. Mon but étant ici de chercher les trois coordonnées $TX = X$, $XL = Y$ & $L\text{☾} = Z$, il eſt bien vrai qu'elles dépendront de toutes les inégalités; mais ce n'eſt qu'après les avoir déterminées toutes, & en avoir conclu les vraies valeurs de ces lignes, qu'on pourra aſſigner l'angle CTL: outre cela je ne trouve pas cet angle immédiatement, mais ſa

tangente, dont il faut encore chercher l'angle dans les Tables. Or j'oſe bien aſſurer que l'expreſſion de cette tangente devient beaucoup moins compliquée que ſi l'on en vouloit déduire toutes les équations partielles indépendamment l'une de l'autre. Tout ceci deviendra plus clair, quand j'aurai réuſſi à trouver les juſtes valeurs des trois coordonnées X, Y & Z.

XXIX.

Mais le plus grand avantage de cette nouvelle méthode conſiſte en ce qne j'y ai d'abord introduit l'élongation moyenne de la Lune au Soleil, ce qui me mettra en état de déterminer toutes les inégalités, par des angles proportionnels aux tems, & qu'on pourra aiſément trouver dans les Tables des moyens mouvemens. Aulieu que, ſelon la méthode ordinaire, la vraie élongation de la Lune au Soleil entre par-tout dans les calculs, & qu'il eſt preſque impoſſible de les en délivrer. Cet inconvénient demande non-ſeulement les plus pénibles calculs, mais il nous laiſſe encore incertains ſur la véritable quantité de pluſieurs équations, outre que le nombre de ces équations devient preſque effroyable.

ARTICLE VII.

Plan des opérations à faire pour la détermination du lieu de la Lune.

XXX.

QUELQUE grand que ſoit le nombre des inégalités qui ſe trouvent dans le mouvement de la Lune, on peut les rapporter toutes à de certaines claſſes, que je me propoſe de développer l'une après l'autre. On n'a qu'à bien conſidérer

les diverſes ſources d'où naiſſent toutes ces inégalités, pour établir les caractères qui diſtinguent ces claſſes entr'elles. Ces ſources ſont :

1.° La différente action du Soleil par rapport à ſes différentes phaſes ou aſpects.

2.° L'excentricité de l'orbite de la Lune.

3.° L'inclinaiſon de cet orbite à l'écliptique.

4.° La parallaxe du Soleil, ou le vrai rapport entre les diſtances de la Lune & du Soleil à la Terre.

5.° Enfin les inégalités du mouvement du Soleil ou de la Terre.

XXXI.

La première ſource conſidérée en elle-même produit l'inégalité connue ſous le nom de la *variation*, ou de *réflexion*, comme Képler l'a nommée. Elle dépend uniquement de l'angle p, c'eſt-à-dire de l'angle BTC qui marque l'élongation moyenne de la Lune à l'oppoſition du Soleil. Ce ſera donc le ſujet de mes premières recherches, où je ferai abſtraction de toutes les autres ſources, par leſquelles le mouvement de la Lune eſt troublé.

XXXII.

En ſecond lieu, j'aurai égard à l'excentricité de l'orbite de la Lune, par laquelle un nouvel angle ſera introduit dans le calcul. Cet angle ſera l'anomalie moyenne de la Lune, & je le marquerai par la lettre q : l'angle q ſera donc auſſi proportionnel au tems, & ſon rapport à l'anomalie du Soleil que j'ai nommée t, nous conduira à l'importante recherche du mouvement de l'apogée de la Lune. Je ferai obligé de partager la recherche des inégalités de cette claſſe en trois parties.

La *première* contiendra celles qui dépendent ſimplement de l'excentricité, & qui renferment le ſimple angle q.

La *seconde* partie roulera sur les inégalités qui dépendent de l'excentricité ou qui renferment le double angle $2q$, & dans

La *troisième* partie, seront déterminées les inégalités qui résultent du cube de l'excentricité; celles-ci dépendront du triple angle $3q$, & seront déja si petites, qu'on pourra bien se passer des suivantes; aussi nos formules ne s'étendent pas au delà des troisièmes dimensions.

XXXIII.

En troisième lieu, je chercherai les inégalités qui résultent de l'inclinaison de l'orbite de la Lune. Cette circonstance introduira vn troisieme angle r dans le calcul, qui est celui qu'on nomme l'argument de latitude, & qui est aussi proportionnel au temps. La recherche de son rapport à l'angle t renfermera le mouvement de la ligne des nœuds. Il suffira ici de déterminer les inégalités qui dépendront du simple & du double de cet angle, sans s'embarrasser de celles qui dépendroient du triple ou bien du cube de l'inclinaison, qui seroit trop petit pour qu'on fût obligé d'en tenir compte.

XXXIV.

En quatrième lieu, ayant regardé jusqu'ici la distance du Soleil comme étant infiniment plus grande que celle de la Lune, & ayant négligé pour cet effet les termes qui sont affectés du rapport a; je ferai à-présent aussi entrer ces termes dans les équations générales, pour rechercher les inégalités qui en résultent, & qu'on peut nommer *inégalités parallactiques*, puisqu'elles dépendent de la parallaxe du Soleil.

XXXV.

Enfin la cinquième classe contiendra les inégalités qui résultent de l'excentricité de l'orbite de la Terre ; ces inégalités sont contenues dans les termes affectés par v, & c'est par celles-ci que l'anomalie moyenne du Soleil, marquée par t est aussi introduite dans le calcul. Dans cette recherche, il suffira de considérer cette simple excentricité : aussi ai-je négligé tous les termes qui renfermeroient le quarré & les plus hautes dimensions de cette excentricité.

Ce sera donc le plan que je me propose de développer dans les recherches suivantes.

DEUXIÈME SECTION.

Recherches des inégalités du mouvement de la Lune de la première Classe, comprises communément sous le nom de la Variation.

ARTICLE PREMIER.

Application des formules généales à cette recherche.

§. I.

Puisqu'il ne s'agit ici que de déterminer les inégalités qui dépendent uniquement de l'angle p, où l'on ne regarde que le mouvement de la Lune sur l'écliptique, nous ferons abstraction de l'inclinaison de son orbite, en posant $Z=az=0$, & par-là toute la troisième équation s'en va du calcul. En second lieu, je ferai abstraction de l'excentricité de l'orbite de la Terre, ou bien je mettrai $v=0$; & en troisième lieu, puisqu'il n'est pas encore question des inégalités parallactiques, je négligerai dans les formules trouvées tous les termes affectés par a.

I. I.

De cette manière nos équations différentio-différentielles deviendront beaucoup plus simples, & par conséquent plus propres à en déduire les inégalités, qui sont

l'objet de cette première recherche. Voilà donc les formules qu'il faut prendre en considération.

$$1.\ -\frac{ddx}{dt^2}+\frac{2(m+1)\,dy}{dt}+x\left(mm+2m+\tfrac{3}{2}+2\lambda\right)\Big\}$$
$$+mm+2m+\tfrac{3}{2}-\lambda+\tfrac{3}{2}\cos.2p+\tfrac{3}{2}x\cos.2p\Big\}=0$$
$$-\tfrac{3}{2}y\sin.2p-3\lambda xx+\tfrac{1}{2}\lambda yy+4\lambda x^3\Big\}$$
$$-6\lambda xyy.$$

$$2.\ -\frac{ddy}{dt^2}-\frac{2(m+1)\,dx}{dt}+y\left(mm+2m+\tfrac{3}{2}-\lambda\right)\Big\}$$
$$-\tfrac{3}{2}\sin.2p-\tfrac{3}{2}y\cos.2p-\tfrac{3}{2}x\sin.2p\Big\}=0$$
$$+3\lambda xy+\tfrac{3}{2}\lambda y^3-6\lambda xxy.$$

III.

D'abord je remarque que la Lune ne sauroit avoir un mouvement uniforme autour de la Terre, comme il arrive dans le mouvement des planettes principales. Car pour que l'angle CTL devienne $=0$, il faudroit qu'il fût $Y=0$, ou bien $y=0$, ce qui est contraire à la seconde formule. Ensuite on voit que x ne sauroit être constante, mais qu'elle renferme nécessairement l'angle p; & comme cette x est toujours une quantité très-petite, nous voyons d'abord qu'il faudra mettre $\lambda=mm+2m+\frac{3}{2}$, ou bien $\lambda=179,2274177$. (Sect. 1. § 24).

IV.

D'où nos deux équations seront:

$$1.\ -\frac{ddx}{dt^2}+\frac{2(m+1)\,dy}{dt}+3yx+\tfrac{3}{2}\cos.2p+\tfrac{3}{2}\cos.2p$$
$$-\tfrac{3}{2}y\sin.2p-3\lambda xx+\tfrac{3}{2}\lambda yy+4\lambda x^3-6\lambda xyy=0.$$

$$2. -\frac{ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)\,dx}{dt} - \tfrac{3}{2}\,sin.\ 2p - \tfrac{3}{2}\,y\,cos.\ 2p$$
$$- \tfrac{3}{2}\,x\,sin.\ 2p + 3\lambda xy + \tfrac{3}{2}\lambda y^3 - 6\lambda xxy = 0.$$

ARTICLE II.

Détermination des inégalités de la Lune de cette premiere Classe.

V.

PREMIÈRE APPROXIMATION. Ne considérons d'abord que les premiers termes de nos deux équations, pour avoir :

$$1. -\frac{ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)\,dy}{dt} + 3\lambda x + \tfrac{3}{2}\,cos.\ 2p = 0\ ;$$

& $2. -\frac{ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)\,dx}{dt} - \tfrac{3}{2}\,sin.\ 2p = 0.$

& il est clair que pour remplir ces deux conditions, il faudra mettre $x = b\,cos.\ 2p$ & $y = 6\,sin.\ 2p$. Je substitue donc ces valeurs dans nos deux équations & comme à cause de $\frac{dp}{dt} = m$; $\frac{dx}{dt} = -2m\,b\,sin.\ 2p$; $\frac{ddx}{dt^2} = -4mm\,b\,cos.\ 2p$; $\frac{dy}{dt} = +2m\,6\,cos.\ 2p$; $\frac{ddy}{dt^2} = -4mm\,6\,sin.\ 2p$; nous obtiendrons ces deux déterminations :

$4mm\,b\,cos.\ 2p + 4m\,(m+1)\,6\,cos.\ 2p + 3\lambda\,b\,cos.\ 2p + \tfrac{3}{2}\,cos.\ 2p = 0$; & $4mm\,6\,sin.\ 2p + 4m\,(m+1)\,b\,sin.\ 2p - \tfrac{3}{2}\,sin.\ 2p = 0$,

ou bien en divisant par $cos.\ 2p$:

$(4mm + 3\lambda)\, b + 4m\,(m+1)\,\mathfrak{C} + \frac{3}{2} = 0$;

& $4m\,(m+1)\,b + 4mm\,\mathfrak{C} - \frac{3}{2} = 0$,

ou enfin à cause de $m = 12,3688974$ & $\lambda = 179,2274177$, nous aurons $1149,61074\, b + 661,43408.\,\mathfrak{C} = -1,5$ & $661,43408.\, b + 611,95849.\,\mathfrak{C} = +1,5$

d'où l'on trouvera $b = -0,0071800$ & $\mathfrak{C} = +0,0102118$.

VI.

Seconde Approximation. Soit maintenant $x = b\,cof.\,2p + x^{I}$ & $y = \mathfrak{C}\,sin.\,2p + y^{I}$; ou bien écrivons dans nos deux équations du §. 4, $x + x^{I}$ & $y + y^{I}$ au lieu de x & y; & & comme nous avons fait évanouir

$$-\frac{ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)\,dy}{dt} + 3\lambda x + \tfrac{3}{2}\,cof.\,2p$$

& $-\frac{ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)\,dx}{dt} - \frac{3}{2}\,sin.\,2p$, il nous restera encore ces deux conditions à remplir.

$$1.\ -\frac{ddx^{I}}{dt^2} + \frac{2(m+1)\,dy^{I}}{dt} + 3\lambda x^{I} + \tfrac{3}{2}\,x\,cof.\,2p - \tfrac{3}{2}\,y\,sin.\,2p - 3\lambda xx + \tfrac{3}{2}\lambda yy + \tfrac{3}{2}\,x^{I}\,cof.\,2p - \tfrac{3}{2}\,y^{I}\,sin.\,2p - 6\lambda xx^{I} + 3\lambda yy^{I} + 4\lambda x^{3} - 6\lambda xyy = 0$$

$$2.\ -\frac{ddy^{I}}{dt^2} - \frac{2(m+1)\,dx^{I}}{dt} - \tfrac{3}{2}\,y\,cof.\,2p - \tfrac{3}{2}\,x\,sin.\,2p + 3\lambda xy - \tfrac{3}{2}\,y^{I}\,cof.\,2p - \tfrac{3}{2}\,x^{I}\,sin.\,2p + 3\lambda xy^{I} + 3\lambda x^{I}y + \tfrac{3}{2}\lambda y^{3} - 6\lambda xxy = 0$$

VII.

J'ai négligé ici les termes qui contiendroient $x^{I}xx$, $x^{I}x^{I}$, &c. car comme x^{I} & y^{I} sont deja équivalens à xx, xy, & yy, ces termes négligés seroient équivalens aux quatriemes dimensions de x & y, que nous avons toujours omis, comme donnant des inégalités qui ne sont d'aucune importance.

VIII.

Commençons par satisfaire à ces deux équations :

$$1.\ -\frac{ddx^{I}}{dt^{2}}+\frac{2(m+1)dy^{I}}{dt}+3\lambda x^{I}+\tfrac{3}{2}x\ cos.\ 2p-\tfrac{3}{2}y\ sin.\ 2p.-3\lambda xx+\tfrac{3}{2}\lambda yy=0.$$

$$2.\ -\frac{ddy^{I}}{dt^{2}}-\frac{2(m+1)dx^{I}}{dt}-\tfrac{3}{2}y\ cos.\ 2p-\tfrac{3}{2}x\ sin.\ 2p.+3\lambda xy=0.$$

Comme $x=b\ cos.\ 2p$ & $y=\mathfrak{C}\ sin.\ 2p$, nous aurons $x\ cos.\ 2p=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}b\ cos.\ 4p$; $y\ sin.\ 2p.=\frac{1}{2}\mathfrak{C}-\frac{1}{2}\mathfrak{C}\ cos.\ 4p$; $x\ sin.\ 2p=\frac{1}{2}b\ sin.\ 4p$; $y\ cos.\ 2p=\frac{1}{2}\mathfrak{C}\ sin.\ 4p$; $xx=\frac{1}{2}bb+\frac{1}{2}bb\ cos.\ 4p$; $xy=\frac{1}{2}b\mathfrak{C}\ sin.\ 4p$ & $yy=\frac{1}{2}\mathfrak{C}\mathfrak{C}-\frac{1}{2}\mathfrak{C}\mathfrak{C}\ cos.\ 4p$;
d'où nos deux équations deviendront

$$1.\ -\frac{ddx^{I}}{dt^{2}}+\frac{2(m+1)dy^{I}}{dt}+3\lambda x^{I}+\tfrac{3}{4}b-\tfrac{3}{4}\mathfrak{C}-\tfrac{3}{2}\lambda bb+(\tfrac{3}{4}b+\tfrac{3}{4}\mathfrak{C}-\tfrac{3}{2}\lambda bb-\tfrac{3}{4}\lambda\mathfrak{C}\mathfrak{C})\ cos.\ 4p=0.$$

$$2.\ -\frac{ddy^{I}}{dt^{2}}-\frac{2(m+1)dx^{I}}{dt}-(\tfrac{3}{4}\mathfrak{C}+\tfrac{3}{4}b-\tfrac{3}{2}\lambda b\mathfrak{C})\ sin.\ 4p.=0.$$

IX.

Il eſt donc évident qu'il faudra ſuppoſer $x^{I} = a^{I} + b^{I} \cos 4p$ & $y^{I} = \mathfrak{C}^{I} \sin 4p$, d'où nous aurons ces deux équations:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ 3\lambda a^{I} + \frac{3}{4} b - \frac{3}{4} \mathfrak{C} - \frac{3}{2} \lambda bb + \frac{3}{4} \lambda \mathfrak{C}\mathfrak{C} \\ + \left(\left(16\, mm + 3\lambda\right) b^{I} + 8\, m\,(m+1)\, \mathfrak{C}^{I} + \frac{3}{4} b + \frac{3}{4} \mathfrak{C}\right. \\ \left. - \frac{3}{2} \lambda bb - \frac{3}{4} \lambda \mathfrak{C}\mathfrak{C}\right) \cos 4p. \end{array}\right\} = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} 2.\ \left(16\, mm\, \mathfrak{C}^{I} + 8\, m\,(m+1)\, b^{I} - \frac{3}{4} \mathfrak{C} - \frac{3}{4} b\right. \\ \left. + \frac{3}{2} \lambda b \mathfrak{C}\right) \sin 4p. \end{array}\right\} = 0$$

& par conſéquent les trois déterminations ſuivantes

$$3\lambda a^{I} + \tfrac{3}{4} b - \tfrac{3}{4} \mathfrak{C} - \tfrac{3}{2} \lambda bb + \tfrac{3}{4} \lambda \mathfrak{C}\mathfrak{C} = 0.$$

$$\left(16\, mm + 3\lambda\right) b^{I} + 8\, m\,(m+1)\, \mathfrak{C}^{I} + \tfrac{3}{4} b + \tfrac{3}{4} \mathfrak{C} - \tfrac{3}{2} \lambda bb - \tfrac{3}{4} \lambda \mathfrak{C}\mathfrak{C} = 0.$$

$$8\, m\,(m+1)\, b^{I} + 16\, mm\, \mathfrak{C}^{I} - \tfrac{3}{4} b - \tfrac{3}{4} \mathfrak{C} + \tfrac{3}{2} \lambda b \mathfrak{C} = 0$$

ou bien en nombres, à cauſe de $b = -0,0071800$ & $\mathfrak{C} = +0,0102118$; $5537,68225 . a^{I} - 0,0129146 = 0$; $2985,51622 . b^{I} + 1322,86816 . \mathfrak{C}^{I} - 0,0257316 = 0$; & $1322,86816 . b^{I} + 2447,83396 . \mathfrak{C}^{I} - 0,0220264 = 0$, par conſéquent

$a^{I} = +0,0000240$; $b^{I} = +0,0000061$; & $\mathfrak{C}^{I} = +0,0000057$.

X.

Derniere Approximation. Il me reſte à déterminer les additions de la troiſième claſſe, ou bien

les inégalités qui dépendent des termes affectés par x^3, xyy, xxy, y^3, xx^I, yy^I, $x^I \cos. 2p$, &c. Je poserai pour cet effet $x^I = a^I + b^I \cos. 4p + x^I$ & $y^{II} = \mathfrak{C}^I \sin. 4p + y^{II}$; ou bien j'écrirai dans les deux équations du § 6 $x^I + x^{II}$ & $y^I + y^{II}$ au lieu de x^I & y^I; & comme nous avons déja satisfait aux termes $\frac{3}{2} x \cos. 2p - \frac{3}{2} y \sin. 2p - 3\lambda xx + \frac{3}{2}\lambda yy$ & $-\frac{3}{2} y \cos. 2p - \frac{3}{2} x \sin. 2p + 3\lambda xy$, en négligeant tous les termes, où x & y auroient ensemble plus de trois dimensions, en comptant toujours x^I & y^I pour deux & x^{II} & y^{II} pour trois dimensions, il nous restera encore ces deux conditions à remplir.

1. $$-\frac{ddx^{II}}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^{II}}{dt} + 3\lambda x^{II} + \frac{3}{2} x^I \cos. 2p - \frac{3}{2} y^I \sin. 2p - 6\lambda x x^I + 3\lambda y y^I + 4\lambda x^3 - 6\lambda x y y = 0.$$

2. $$-\frac{ddy^{II}}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx^{II}}{dt} - \frac{3}{2} y^I \cos. 2p - \frac{3}{2} x^I \sin. 2p + 3\lambda x y^I + 3\lambda x^I y + \frac{3}{2}\lambda y^3 - 6\lambda x x y = 0$$ en omettant les termes, où x^{II} & y^{II} sont multipliés par $\sin. 2p$ & $\cos. 2p$.

XI.

Ayant $x = b \cos. 2p$; $y = \mathfrak{C} \sin. 2p$; $x^I = a^I + b^I \cos. 4p$; $y^I = \mathfrak{C}^I \sin. 4p$, ces deux équations deviendront

1. $$-\frac{ddx^{II}}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^{II}}{dt} + 3\lambda x^{II} + \left(\begin{array}{l} \frac{3}{2} a^I + \frac{3}{4} b^I \\ - \frac{3}{4}\mathfrak{C}^I - 6\lambda b a^I - 3\lambda b b^I + \frac{3}{2}\lambda \mathfrak{C}\mathfrak{C}^I + 3\lambda b^3 \\ - \frac{3}{2}\lambda b \mathfrak{C}\mathfrak{C}) \cos. 2p + (\frac{3}{4} b^I + \frac{3}{4}\mathfrak{C}^I - 3\lambda b b^I \\ - \frac{3}{2}\lambda \mathfrak{C}\mathfrak{C}^I + \lambda b^3 + \frac{3}{2}\lambda b \mathfrak{C}\mathfrak{C}) \cos. 6p. \end{array}\right\} = 0$$

$$2.\ -\frac{ddy^{II}}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx^{II}}{dt}+\left(-\tfrac{3}{4}\mathcal{C}^{I}+\tfrac{3}{4}b^{I}-\tfrac{3}{2}a^{I}\right.$$
$$\left.+\tfrac{3}{2}\lambda b\mathcal{C}^{I}-\tfrac{3}{4}\lambda\mathcal{C}b^{I}+3\lambda\mathcal{C}a^{I}+\tfrac{9}{8}\lambda\mathcal{C}^{3}-\lambda bb\mathcal{C}\right)\Big\}=0$$
$$sin.\,2p+\left(-\tfrac{3}{4}\mathcal{C}^{I}-\tfrac{3}{4}b^{I}+\tfrac{3}{2}\lambda b\mathcal{C}^{I}+\tfrac{3}{2}\lambda\mathcal{C}b^{I}\right.$$
$$\left.-\tfrac{3}{8}\lambda\mathcal{C}^{3}-\tfrac{3}{2}\lambda bb\mathcal{C}\right)sin.\,6p.$$

XII.

Delà il eſt évident qu'il faudroit donner à x^{II} & y^{II} ces formes $x^{II}=b^{II}\,cof.\,2p+cof.\,6p$; $y^{II}=\mathcal{C}^{II}\,sin.\,2p+sin.\,6p$; mais comme il eſt aiſé de prévoir que les coefficiens de $sin.\,6p$ & $cof.\,6p$ deviendroient plus petits que 0, 0000001, nous les négligerons en nous contentant de ſuppoſer ſimplement $x^{II}=b^{II}\,cof.\,2p$ & $y^{II}=\mathcal{C}^{II}\,sin.\,2p$; d'où nous obtiendrons en diviſant nos deux équations, la premiere par $cof.\,2p$ & la ſeconde par $sin.\,2p$, ces deux déterminations :

$$(4mm+3\lambda)b^{II}+4m(m+1)\mathcal{C}^{II}+\tfrac{3}{2}a^{I}+\tfrac{3}{4}b^{I}-\tfrac{3}{4}\mathcal{C}$$
$$-6\lambda ba^{I}-3\lambda bb^{I}+\tfrac{3}{2}\lambda\mathcal{C}\mathcal{C}^{I}+3\lambda b^{3}-\tfrac{3}{2}\lambda b\mathcal{C}\mathcal{C}=0.$$

$$4m(m+1)b^{II}+4mm\mathcal{C}^{II}-\tfrac{3}{4}\mathcal{C}^{I}+\tfrac{3}{4}b^{I}-\tfrac{3}{2}a^{I}+\tfrac{3}{2}\lambda b\mathcal{C}^{I}$$
$$-\tfrac{3}{2}\lambda\mathcal{C}b^{I}+3\lambda\mathcal{C}a^{I}+\tfrac{9}{8}\lambda\mathcal{C}^{3}-\tfrac{3}{2}\lambda bb\mathcal{C}=0.$$

Or $b=-0,0071800$, $\mathcal{C}=+0,0102118$, $b^{I}=+0,0000061$; $\mathcal{C}^{I}=+0,0000057$ & $a^{I}=0,0000240$; donc en ſubſtituant ces valeurs numériques, nous aurons :

$$1149,64074.b^{II}+661,43408.\mathcal{C}^{II}=-0,0002631;$$
$$661,43408.b^{II}+611,95849.\mathcal{C}^{II}=-0,0001417;$$

& par conſéquent

$b^{II}=-0,0000002,5$ & $\mathcal{C}^{II}=+0,0000000,4$;

d'où l'on voit que cette dernière approximation nous

mène déja à des inégalités si petites, qu'on pourroit hardiment les négliger.

XIII.

CONCLUSION. Toutes les inégalités de cette classe se réduisent donc à ces deux expressions:

$$x^{I} = a^{I} + (b + b^{II})\ cos.\ 2p + b^{I}\ cos.\ 4p$$

&

$$y = (\mathfrak{C} + \mathfrak{C}^{II})\ sin.\ 2p + \mathfrak{C}^{I}\ sin.\ 4p;$$

ou bien en nombres:

$$x = 0,0000240 - 0,0071802.\ cos.\ 2p + 0,0000061.\ cos.\ 4p$$

&

$$y = * + 0,0102118.\ sin.\ 2p + 0,0000057.\ sin.\ 4p.$$

d'où nos deux cordonnées X & Y seront

$$X = a(1,0000240 - 0,0071802.cos.2p + 0,0000061.cos.4p)$$
$$Y = a(0,0102118.sin.\ 2p + 0,0000057.sin.\ 4p.)$$

XIV.

Ces valeurs nous feront déja connoître assez près la variation; & puisque la plus grande répond aux octans, posons l'élongation moyenne de la Lune à l'opposition du Soleil $p = 45°$, de sorte que $2p = 90°$, & nous aurons la tangente de la variation

$$\frac{Y}{X} = \frac{0,0102118}{1,0000240 - 0,0000061} = 0,0102115$$

à laquelle répond un angle de $35'\ 6''$, qui à la vérité est de $1'\ 4''$ plus petite que ne la donnent les tables; mais il faut remarquer que la variation que nous venons de

trouver, recevra encore quelqu'augmentation par les inégalités qui dépendent de l'excentricité de la Lune & sur tout par les inégalités parallactiques, comme on le verra dans la suite.

Voilà donc un échantillon de ma nouvelle méthode pour déterminer les inégalités des mouvemens de la Lune : Je conviens que dans cette première recherche, j'ai été un peu trop prolixe ; mais je croyois qu'un tel detail dans le commencement ne sauroit être désagréable. Dans la suite, je tâcherai d'être d'autant plus brief.

TROISIEME

TROISIÈME SECTION.

Recherches des inégalités du mouvement de la Lune de la ſeconde Claſſe, qui dépendent de l'excentricité de l'orbite de la Lune.

ARTICLE PREMIER.

Réflexions générales ſur la nature de ces inégalités.

I.

LES valeurs de x & y, que nous venons de trouver, entant qu'elles ſatisfont à nos deux équations différentio-différentielles, ne ſauroient être regardées, que comme une intégrale particuliere, vu qu'il n'y entre que deux conſtantes arbitraires, l'une étant marquée par la lettre a, & l'autre compriſe dans l'angle p; car puiſque $dp = mdt$, on en a $p = mt + C$, & cette conſtante C ſe rapporte au point fixe, d'où l'on compte cet angle. Or, ayant deux équations différentio-différentielles, leurs intégrales complettes, doivent néceſſairement renfermer quatre conſtantes arbitraires, d'où l'on comprend que pour trouver ces intégrales, il faut encore introduire dans nos formules un autre angle proportionnel au tems, avec un coefficient indéterminé, qui joint à la conſtante contenue dans l'angle même, en ſe rapportant à ſon commencement, fournira les quatre conſtantes arbitraires, qui conſtituent le caractère de l'intégrale complette.

II.

Cependant, puiſque nos valeurs trouvées, expriment déja une intégrale de nos équations différentio-différentielles, elles auroient pû avoir lieu dans le mouvement de la Lune, ſi ce corps avoit reçu au commencement un certain mouvement conforme à ces intégrales; ce qui arriveroit effectivement ſi l'excentricité de l'orbite de la Lune étoit nulle, & dans ce cas, nous ſerions déjà en état d'expliquer tous les phénomènes de ſon mouvement, bien entendu, en faiſant abſtraction des inégalités du mouvement de la Terre & du mouvement de la Lune en latitude. Dans ce cas donc, les inégalités de la Lune ſe réduiroient uniquement à la variation que nous venons de déterminer & qui ne dépend que de l'angle p, lequel exprime ſon élongation moyenne à l'oppoſition du Soleil.

III.

Mais pour arriver à une intégrale complette de nos deux équations différentio différentielles, il s'agit d'introduire dans nos formules un nouvel angle q, qui ait auſſi un certain rapport au tems t; de ſorte pue $dq = ndt$, où n marquera un nombre, dont la valeur doit être déterminée par la théorie, & qui comme nous allons voir, renfermera le mouvement de l'appogée de la Lune. Puiſque le commencement de cet angle peut être regardé comme arbitraire, il doit y entrer un co-efficient arbitraire, qui réponde à ce qu'on nomme excentricité de l'orbite lunaire, & qui dépend uniquement des obſervations, ou bien du mouvement, qui a été imprimé à la Lune au premier commencement.

IV.

On verra bientôt que ce nouvel angle q eſt le même que celui qu'on nomme anomalie moyenne de la Lune. Par conſéquent, en poſant $dq = ndt$, le nombre n ſera à l'unité, comme le mouvement de l'anomalie moyenne de la Lune à celui de l'anomalie moyenne du Soleil. Donc pour le tems de trente jours, le mouvement de l'anomalie moyenne de la Lune étant : $13^s\ 1^\circ\ 56'\ 59'' = 1411019''$ & le mouvement de l'anomalie moyenne du Soleil $29^\circ\ 34'\ 4'', 5 = 106444''', 5$, nous en concluons : $n = \frac{1411019}{106444,5} = 13, 2559127$. Mais quoique cette valeur ſoit tirée des obſervations, il faudroit que la théorie nous fourniſſe la même, ſi le mouvement de l'apogée étoit uniquement produit par les forces du Soleil & de la Terre. Or, on verra que ce nombre eſt en effet très-conforme à la Théorie,

---

ARTICLE II.

Préparation aux articles ſuivans.

V.

Comme dans les recherches préſentes il ne s'agit ni de l'inclinaiſon de l'orbite de la Lune, ni de l'excentricité de l'orbite de la Terre, ni enfin des inégalités parallacti-

ques, les inégalités de cette classe seront encore enfermées dans les deux équations données au quatrième §. de la seconde Section, qui sont

$$1.\ -\frac{ddx}{dt^2}+\frac{2(m+1)dy}{dt}+3\lambda x+\tfrac{3}{2}\cos.2p+\tfrac{3}{2}x\cos.2p$$
$$-\tfrac{3}{2}y\sin.2p-3\lambda xx+\tfrac{3}{2}\lambda yy+4\lambda x^3$$
$$-6\lambda xyy.\Big\}=0$$

$$2.\ -\frac{ddy}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx}{dt}-\tfrac{3}{2}\sin.2p-\tfrac{3}{2}y\cos.2p$$
$$-\tfrac{3}{2}x\sin.2p+3\lambda xy+\tfrac{3}{2}\lambda y^3-6\lambda xxy.\Big\}=0$$

VI.

Pour accommoder ces équations aux recherches présentes, soient u & v les valeurs de x & y, que nous avons trouvées en cherchant les inégalités de la première classe; de sorte qu'en omettant les termes affectés par $\cos.4p$ & $\sin.4p$ comme très-petits à l'égard des autres, nous ayons $u=a^{I}+b\cos.2p$; & $v=\mathfrak{C}\sin.2p$; ou

$a=+0{,}0000240$; $b=-0{,}0071802$ & $\mathfrak{C}=+0{,}0102118$.

Il seroit même suffisant de prendre $u=b\cos.2p$ & $v=\mathfrak{C}\sin.2p$, puisque a^{I} est déja une quantité de la seconde classe. Ecrivons dans nos deux équations $u+x$ & $v+y$ au lieu de x & y, & ayant déja rempli ces deux conditions:

$$-\frac{ddu}{dt^2}+\frac{2(m+1)dv}{dt}+3\lambda u+\tfrac{3}{2}\cos.2p+\tfrac{3}{2}u\cos.2p$$
$$-\tfrac{3}{2}v\sin.2p-3\lambda uu\ \&c.=0.$$

$$-\frac{ddv}{dt^2}-\frac{2(m+1)du}{dt}-\tfrac{3}{2}\sin.2p-\tfrac{3}{2}v\cos.2p-\tfrac{3}{2}u\sin.2p$$
$$\&c=0.$$

il nous restera encore de satisfaire à ces deux équations;

$$1.\ -\frac{ddx}{dt^2}+\frac{2(m+1)dy}{dt}+3\lambda x+x\left(\tfrac{3}{2}\cos.2p-6\lambda u\right.$$
$$\left.+12\lambda uu-6\lambda vv\right)+y\left(-\tfrac{3}{2}\sin.2p+3\lambda v-12\lambda uv\right)\Big\}=0$$
$$\left.-3\lambda xx(1-4u)-12\lambda xy.v+\tfrac{3}{2}\lambda yy(1-4u)\right.$$
$$+4\lambda x^3-6\lambda xyy.$$

$$2.\ -\frac{ddy}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx}{dt}+y\left(-\tfrac{3}{2}\cos.2p+3\lambda u\right.$$
$$\left.+\tfrac{9}{2}\lambda vv-6\lambda uu\right)+x\left(-\tfrac{3}{2}\sin.2p+3\lambda v-12\lambda uv\right)\Big\}=0$$
$$\left.+\tfrac{9}{2}\lambda yy.v+3\lambda xy(1-4u)-6\lambda xx.v\right.$$
$$+\tfrac{3}{2}\lambda y^3-6\lambda xxy.$$

VII.

Substituons pour u & v leurs valeurs & nous obtiendrons ces deux équations, qui renferment toutes les inégalités de cette seconde classe :

$$1.\ -\frac{ddx}{dt^2}+\frac{2(m+1)dy}{dt}+(3\lambda+A)x+Bx\cos.2p\Big\}$$
$$+C y\sin.2p-xx(D+E\cos.2p)-Fxy\sin.2p\Big\}=0$$
$$+yy\left(\tfrac{1}{2}D+\tfrac{1}{2}E\cos.2p\right)+4\lambda x^3-6\lambda xyy\Big\}$$

$$2.\ -\frac{ddy}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx}{dt}+A^{I}y+B^{I}y\cos.2p+Cx\sin.2p\Big\}$$
$$+\tfrac{3}{8}Fyy\sin.2p+xy(D+E\cos.2p)\Big\}=0$$
$$-\tfrac{1}{2}Fxx\sin.2p+\tfrac{3}{2}\lambda y^3-6\lambda xxy.\Big\}$$

où j'ai posé pour abréger :

$$A=-6\lambda a^{I}+6\lambda bb-3\lambda\zeta\zeta+12\lambda a^{I}a^{I}=$$
$$-0,0264574;$$
$$A^{I}=+3\lambda a^{I}-3\lambda bb+\tfrac{9}{4}\lambda\zeta\zeta-6\lambda a^{I}a^{I}=$$
$$+0,0272462;$$

$B = +\frac{3}{2} - 6\lambda b + 24\lambda a^{I}b = +9,220588;$

$B^{I} = -\frac{1}{2} + 3\lambda b - 12\lambda a^{I}b = -5,360294;$

$C = -\frac{1}{2} + 3\lambda 6 - 12\lambda a^{I}6 = +3,990175;$

$D = +3\lambda - 12\lambda a^{I} = +537,63059;$

$E = -12\lambda b = +15,44266;$

$F = +12\lambda 6 = +21,96282.$

ARTICLE III.

Détermination des inégalités qui dépendent de la ſimple excentricité de l'orbite de la Lune.

VIII.

EQUATIONS *qui renferment ces inégalités.* Comme il ne s'agit ici que de la ſimple excentricité de l'orbite lunaire, il ne ſera queſtion que des termes affectés par x & y; en omettant donc tous ceux où x & y ont plus d'une dimenſion, les équations qui renferment toutes les inégalités que je me propoſe de déterminer dans cet article, ſeront

$$1, -\frac{ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + (3\lambda + A)x + Bx\ cof.\ 2p + Cy\ ſin.\ 2p = 0.$$

$$2, -\frac{ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + A^{I}y + B^{I}y\ cof.\ 2p + Cx\ ſin.\ 2p = 0.$$

IX.

Première Approximation. Ne conſidérons d'abord que les trois premiers termes de ces équations, & négligeons les deux ſuivans, pour avoir

$$-\frac{ddx}{dt^2}+\frac{2(m+1)dy}{dt}+(3\lambda+A)x=0$$

&

$$-\frac{ddy}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx}{dt}+A^1y=0.$$

Soit pour ſatisfaire à ces deux conditions $x=c.\,cof.\,q$ & $y=\gamma.\,ſin.\,q$, & à cauſe de $dq=ndt$, nous obtiendrons en ſubſtituant ces valeurs dans nos deux équations, les déterminations ſuivantes

$$((nn+3\lambda+A)\,c+2(m+1)n\gamma)\,cof.\,q=0$$

&

$$((nn+A^1)\gamma+2(m+1)nc)\,ſin.\,q=0.$$

D'où nous trouverons

de la première $\frac{\gamma}{c}=\frac{-nn-3\lambda+A}{2(m+1).n}$

& de la ſeconde $\frac{\gamma}{c}=\frac{-2(m+1).n}{nn+A^1}$;

par conſéquent

$$n^4+(3\lambda+A+A^1)nn+(3\lambda+A)A^1=4(m+1)^2nn$$

ou bien

$$n^4-177,2266289\,.\,nn+14,6469900=0.$$

A cette équation ſatisfait $n=13,3095$, qui eſt trop grande de 0,0536. Or, ſi nous ſuppoſons avec les Tables

Aſtronomiques $n = 13,2559127$, nous obtiendrons pour $\frac{?}{c}$ ces deux valeurs : de la premiere $\frac{?}{c} = -2,0127$ & de la ſeconde $\frac{?}{c} = -2,0167$, cette différence provenant de ce que nous avons négligé ici les deux derniers termes de nos équations.

X.

Seconde Approximation. Reprenons nos équations complettes

$$1.- \frac{d.dx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + (3\lambda + A)x + Bx\,cof.\,2p + Cy\,ſin.\,2p = 0;$$

$$2.- \frac{ddy}{dt^2} \frac{2(m+1)dx}{dt} + A^{I}y + B^{I}y\,cof.\,2p + Cx\,ſin.\,2p) = 0;$$

& il eſt clair que pour ſatisfaire pleinement à ces équations, il faudra donner à x & y les formes qui ſuivent

$$x = c\,cof.\,q + d\,cof.\,(2p - q) + e\,cof\,(2p + q);$$

$$y = \gamma\,ſin.\,q + \delta\,ſin.\,(2p - q) + \varepsilon\,ſin.\,(2p + q).$$

Subſtituons donc ces formes dans nos équations, & nous obtiendrons les ſix déterminations ſuivantes

$$1.\ (nn + 3\lambda + A)c + 2(m+1)n\gamma + \tfrac{1}{2}B(d+e) + \tfrac{1}{2}C(\delta+\varepsilon) = 0;$$

$$2.\ (nn + A^{I})\gamma + 2(m+1)nc - \tfrac{1}{2}B^{I}(\delta - \varepsilon) + \tfrac{1}{2}C(d-e) = 0;$$

$$3.\ \big((2m-n)^2 + 3\lambda + A\big)d + 2(m+1)(2m-n)\delta + \tfrac{1}{2}Bc + \tfrac{1}{2}C\gamma = 0;$$

4.

4. $((2m-n)^2 + A^{I})\delta\eta + 2(m+1)(2m-n)d - \frac{1}{2}B^{I}\gamma + \frac{1}{2}Cc = 0$;

5. $((2m+n)^2 + 3\lambda + A)e + 2(m+1)(2m+n)\varepsilon + \frac{1}{2}Bc - \frac{1}{2}C\gamma = 0$;

6. $((2m+n)^2 + A^{I})\varepsilon + 2(m+1)(2m+n)e + \frac{1}{2}B^{I}\gamma + \frac{1}{2}Cc = 0$.

XI.

Posons selon les Tables Astronomiques $n = 13,2559127$ & les quatre dernières déterminations donneront

$d = -0,0007597 \cdot c - 0,0937565 \cdot \gamma$;
$\delta = -0,0133585 \cdot c + 0,1979618 \cdot \gamma$;
$e = -0,0025319 \cdot c + 0,0000859 \cdot \gamma$;
$\varepsilon = +0,0004000 \cdot c + 0,0017960 \cdot \gamma$.

Substituons ces valeurs dans les deux premières équations, & nous aurons

$(nn + 537,61477782)c + (26,7377948 \cdot n - 0,0333415)\gamma = 0$;
$(nn + 0,3657538)\gamma + (26,7377948 \cdot n + 0,0333360)\gamma = 0$;

de-là $\frac{\gamma}{c} = \frac{-nn-537,61477782}{26,7377948 \cdot n - 0,0333415}$

$= \frac{-26,7377948 \cdot n - 0,0333360}{nn + 0,3657538}$

ce qui donneroit $n = 13,28473$. Par conséquent $m - n = -0,91584$ & de-là le mouvement de l'apogée pour 30 jours $= 2^{\circ}\,29'\,23''$ qui est trop petite de $51'\,9''$. On comprend donc que, quoique cette méthode donne encore pour le mouvement de l'apogée de la Lune une

différence bien grande entre la théorie & les obſervations, elle n'eſt cependant pas auſſi énorme que celle que donne la méthode ordinaire. Au reſte, il eſt très-certain que l'action des autres planètes a une influence ſur le mouvement de l'apogée de la Lune, ſachant que ſans cette action l'apogée du Soleil devroit être immobile. Enfin, les petites quantités que nous avons négligées ici, & les augmentations que les coëfficiens de *ſin.* 2 *p* & *coſ.* 2 *p* prendront dans la ſuite, lorſque nous déterminerons les inégalités qui réſultent du quarré de l'excentricité de la Lune & de l'inclinaiſon de ſon orbite augmenteront encore conſidérablement le mouvement de l'apogée de la Lune que nous venons de déterminer ici.

XII.

Toutefois cette différence quelle qu'elle ſoit ne nous empêche pas d'aller plus loin ; car poſant dans les deux valeurs trouvées pour $\frac{\gamma}{c}$ ſelon les Tables Aſtronomiques $n = 13,2559127$; nous aurons de la première

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{-713,3339997}{354,4005321} = -2,012791$$

& de la ſeconde

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{-354,4005376}{176,0849753} = -2,012667.$$

Comme donc cette différence eſt très-petite, & qu'elle n'influe preſque rien ſur les valeurs des coëfficiens d, δ, e & ε, il me ſera permis de prendre pour $\frac{\gamma}{c}$ un nombre moyen. Soit donc $\gamma = -2,012729 . c$, & nous aurons pour les inégalités de cette claſſe

$d = +0,187947.c$; $\delta = -0,411802.c$;

$e = -0,002705.c$; $\varepsilon = -0,003215.c$.

Or, nous avions supposé

$$x = c.cos.q + d.cos.(2p - q) + e.cos.(2p+q)$$

& $y = \gamma.sin.q + \delta.sin.(2p - q) + \varepsilon.sin.(2p + q)$

de sorte que maintenant

$$x = c.cos.q + 0,187947.c.cos.(2p - q) - 0,002705.c.cos.(2p + q)$$

& $y = -2,112729.c.sin.q - 0,411802.c.sin.(2p - q) - 0,003215.c.sin.(2p + q)$.

XIII.

On pourra aisément pousser cette approximation plus loin, en cherchant aussi les coëfficiens des *cosinus* & *sinus* des angles $4p \pm q$, & alors on trouvera qu'il faudra encore ajouter aux expressions que je viens d'écrire, les termes suivans

$x = \ldots\ldots - 0,000512.c.cos.(4p - q) - 0,000012.c.cos.(4p + q)$

$y = \ldots\ldots - 0,000728.c.sin.(4p - q) - 0,000025.c.sin.(4p + q)$ qui en effet sont très-petites.

ARTICLE IV.

Détermination des inégalités qui dépendent du quarré de l'excentricité de l'orbite de la Lune.

XIV.

PRÉPARATION. Ces inégalités dépendront donc de la double anomalie moyenne de la Lune, ou bien de l'angle $2q$. Les obſervations nous apprennent qu'elles ſont très petites, il me ſera donc permis de ne combiner ce double angle $2q$ qu'avec $2p$. Or, voici les équations qu'il s'agit de conſidérer ici. § 7.

1. $$-\frac{ddx}{dt^2}+\frac{2(m+1)dy}{dt}+(3\lambda+A)x+Bx\,cof.\,2p+Cy\,ſin.\,2p-xx(D+\varepsilon\,cof.\,2p)-Fxy\,ſin.\,2p+yy(\tfrac{1}{2}D+\tfrac{1}{2}\varepsilon\,cof.\,2p)+4\lambda x^3-6\lambda xyy=0.$$

2. $$-\frac{ddy}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx}{dt}+A^{I}y+B^{I}y\,cof.\,2p+Cx\,ſin\,2p+\tfrac{3}{8}Fyy\,ſin.\,2p+xy(D+\varepsilon\,cof.\,2p)-\tfrac{1}{2}Fxx\,ſin.\,2p+\tfrac{3}{2}\lambda y^3-6\lambda xxy=0.$$

XV.

Soient encore u & v les valeurs trouvées pour x & y dans l'article précédent, de ſorte que

$$u=c\,.\,cof.\,q+d\,cof.\,(2p-q)+e\,cof.\,(2p+q)$$

& $$v=\gamma\,ſin.\,q+\delta\,ſin.\,(2p-q)+\varepsilon\,ſin.\,(2p+q).$$

Ecrivons dans nos deux équatiuns $u+x$ & $v+y$ au

lieu de x & y, & ayant déja fait évanouir ces expreſſions

$$-\frac{ddu}{dt^2}+\frac{2(m+2)dv}{dt}+(3\lambda+A)u+Bu\ cof.2p$$
$$+Cv\ ſin.2p$$

&

$$-\frac{ddv}{dt^2}-\frac{2(m+1)du}{dt}+A^1v+B^1v\ cof.2p+Cu\ ſin.2p$$

Il nous reſtera encore à réſoudre ces deux équations.

1. $$\frac{-ddx}{dt^2}+\frac{2(m+1)dy}{dt}+(3\lambda+A)x-D(uu-\tfrac{1}{2}vv)$$
$$-\varepsilon(uu-\tfrac{1}{2}vv)\ cof.2p-Fuv\ ſin.2p+Bx\ cof.2p$$
$$+Cy\ ſin.2p+x(-2Du-2\varepsilon u\ cof.2p-Fv\ ſin.2p)$$
$$+y(Dv+\varepsilon v\ cof.2p-Fu\ ſin.2p)+4\lambda u^3-6\lambda uvv=0.$$

2. $$\frac{-ddy}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx}{dt}+A^1y+Duv-F(\tfrac{1}{2}uu-\tfrac{3}{8}vv)$$
$$ſin.2p+\varepsilon uv\ cof.2p+B^1y\ cof.2p+Cx\ ſin.2p$$
$$+y(Du+\varepsilon u\ cof.2p+\tfrac{3}{4}Fv\ ſin.2p)+x(Dv+\varepsilon v\times$$
$$cof.2p-Fu\ ſin.2p)+\tfrac{3}{2}\lambda v^3-6\lambda uuv$$

en omettant tous les termes qui renfermeroient le biquarré de l'excentricité.

XVI.

Equations qui renferment les inégalités qui dépendent du quarré de l'excentricité.

On n'a qu'à omettre les quatre derniers termes des équations précédentes pour avoir celles dont il eſt queſtion ici, & qui ſeront

1. $\frac{-ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dv}{dt} + (3\lambda + A)x - D(uu - \frac{1}{2}vv)$
$- \varepsilon(uu - \frac{1}{2}vv)\,cof.\,2p - F\,uv\,sin.\,2p + Bx\,cof.\,2p$
$+ Cy\,sin.\,2p = 0.$

2. $\frac{-ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + A^{I}y + Duv - F(\frac{1}{2}uu - \frac{1}{8}vv)$
$sin.\,2p + \varepsilon uv\,cof.\,2p + B^{I}y\,cof.\,2p + Cx\,sin.\,2p = 0.$

Subſtituons pour u & v leurs valeurs trouvées dans l'article précédent & nous aurons pour les inégalités que nous cherchons ces deux équations.

1. $\frac{-ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + 537,6558.x + Bx\,cof.\,2p$
$+ Cy\,sin.\,2p + 288,7579.cc - 312,3584.cc\,cof.2p$
$- 810,7657.cc.cof.\,2q + 121,1496.cc.\,cof.(2p - 2q)$
$- 23,0175.cc.\,cof.(2p + 2q) = 0.$

2. $\frac{-ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + 0,0272.y + B^{I}y\,cof.\,2p + Cx$
$sin.\,2p - 203,0193.cc.sin.\,2p - 538,9855.cc.$
$sin.\,2q - 12,3107.cc.sin.(2p - 2q) - 18,2562.cc.$
$sin.(2p + 2q) = 0.$

XVII.

Détermination de ces inégalités. On voit bien que x & y doivent avoir ces formes

$x = a^{II} + b^{II}\,cof.\,2p + c^{I}\,cof.\,2q + d^{I}\,cof.(2p - 2q)$
$+ e^{I}\,cof.(2p + 2q).$

$y = \zeta^{II}\,sin.\,2p + \gamma^{I}\,sin.\,2q + \delta^{I}\,sin.(2p - 2q)$
$+ \varepsilon^{I}\,sin.(2p + 2q);$

d'où nous obtiendrons les neuf déterminations suivantes.

1. $537{,}6558.a^{II} = -288{,}7579.cc - \frac{1}{2}Bb^{II} - \frac{1}{2}C\mathfrak{C}^{II}$.

2. $(4m^2 + 537{,}6558)b^{II} + 4m(m+1)\mathfrak{C}^{II} = 312{,}3584.cc - Ba^{II}$.

3. $4m(m+1)b^{II} + (4mm + 0{,}0272)\mathfrak{C}^{II} = 203{,}0193.cc - Ca^{II}$.

4. $(4nn + 537{,}6558)c^{I} + 4(m+1)n.\mathfrak{g}^{I} = +810{,}7657.cc - \frac{1}{2}B(d^{I} + e^{I}) - \frac{1}{2}C(\mathfrak{d}^{I} + \varepsilon^{I})$

5. $4n(m+1)c^{I} + (4nn + 0{,}0272)\mathfrak{g}^{I} = +538{,}9855.cc + \frac{1}{2}B^{I}(\mathfrak{d}^{I} - \varepsilon^{I}) - \frac{1}{2}C(a^{I} - e^{I})$.

6. $(4(m-n)^2 + 537{,}6558)d^{I} + 4(m+1)(m-n)\mathfrak{d}^{I} = -121{,}1496.cc - \frac{1}{2}Bc^{I} - \frac{1}{2}C\mathfrak{g}^{I}$.

7. $4(m+1)(m-n)d^{I} + (4(m-n)^2 + 0{,}0272)\mathfrak{d}^{I} = +12{,}3107.cc + \frac{1}{2}B^{I}\mathfrak{g}^{I} - \frac{1}{2}Cc^{I}$.

8. $(4(m+n)^2 + 537{,}7558)e^{I} + 4(m+1)(m+n)\varepsilon^{I} = +23{,}0175.cc - \frac{1}{2}Bc^{I} + \frac{1}{2}C\mathfrak{g}^{I}$.

9. $4(m+1)(m+n)e^{I} + (4(m+n)^2 + 0{,}0272)\varepsilon^{I} = +18{,}2562.cc - \frac{1}{2}B^{I}\mathfrak{g}^{I} - \frac{1}{2}Cc^{I}$.

Les trois premières équations donnent l'élimination :

$a^{II} = -0{,}53931.cc$; $b^{II} = +0{,}21986.cc$; $\mathfrak{C}^{II} = +0{,}09763.cc$

& les six autres fourniſſent

$e^{I} = +0{,}50962.cc$; $d^{I} = -0{,}20629.cc$; $\varepsilon^{I} = +0{,}00468.cc$;

$\mathfrak{g}^{I} = +0{,}25237.cc$; $\mathfrak{d}^{I} = +0{,}26228.cc$; $\varepsilon^{I} = +0{,}00464.cc$.

par conſéquent

$$x = -0{,}53931.cc + 0{,}21986.cc.\,cof.2p + 0{,}50962.cc.\,cof.2q - 0{,}20629.cc.\,cof.(2p-2q) + 0{,}00468.cc.\,cof.(2p+2q).$$

$$y = \quad * \quad + 0{,}09763.cc.\,fin.2p + 0{,}25237.cc.\,fin.2q + 0{,}26228.cc.\,fin.(2p-2q) + 0{,}00464.cc.\,fin.(2p+2q).$$

ARTICLE V.

Détermination des inégalités qui dépendent du cube de l'excentricité de l'orbite de la Lune.

XVIII.

PRÉPARATION. En écrivant $x + x^{I}$ & $y + y^{I}$ à la place de x & y, il nous reſtera encore ces deux équations à réſoudre. (§. 15.)

$$1.\ -\frac{ddx^{I}}{dt^{2}} + \frac{2(m+1)dy^{I}}{dt} + (3\lambda + A)x^{I} + Bx^{I}\,cof.2p + Cy^{I}\,fin.2p + x(-2Du - 2\varepsilon u\,cof.2p - Fv\,fin.2p) + y(Dv + \varepsilon v\,cof.2p - Fu\,fin.2p) + 4\lambda u^{3} - 6\lambda uvv.$$

$$2.\ -\frac{ddy^{I}}{dt^{2}} - \frac{2(m+1)dx^{I}}{dt} + A^{I}y^{I} + B'y^{I}\,cof.2p + Cx^{I}\,fin.2p + y(Du + \varepsilon u\,cof.2p + \tfrac{3}{4}Fv\,fin.2p) \times + x(Dv + \varepsilon v\,cof.2p - Fu\,fin.2p) + \tfrac{3}{2}\lambda v^{3} - 6\lambda uuv.$$

Subſtituons ici pour u, v, x & y leurs valeurs trouvées aux §§. 12 & 17, & nous obtiendrons,

XIX.

XIX.

Equations qui renferment les inégalités qui dépendent du cube de l'excentricité de la Lune.

1. $-\frac{ddx^{I}}{dt^{2}}+\frac{2(m+1)dy^{I}}{dt}+(3\lambda+A)x^{I}+B^{I}x\,cof.\,2p+Cy^{I}\,fin.\,2p-484{,}398.c^{3}\,cof.\,q-56{,}493.c^{3}\times cof.(2p-q)+680{,}467.c^{3}\,cof.(2p+q)+1130{,}384.c^{3}\times cof.\,3q-248{,}289.c^{3}\,cof.(2p-3q)-5{,}190.c^{3}\times cof.(2p+3q)=0.$

2. $-\frac{ddy^{I}}{dt^{2}}-\frac{2(m+1)dx^{I}}{dt}+A^{I}y^{I}+B^{I}y^{I}\,cof.\,2p+Cx^{I}\,fin.\,2p-239{,}210.c^{3}\,fin.\,q-13{,}466.c^{3}\,fin.(2p-q)+529{,}371.c^{3}\,fin.(2p+q)+881{,}177.c^{3}\,fin.\,3q+135{,}471.c^{3}fin.(2p-3q)-5{,}043.c^{3}\,fin.(2p+3q).=0.$

XX.

Détermination de ces inégalités. Soit

$x^{I}=c^{II}\,cof.\,q+d^{II}\,cof.(2p-q)+e^{II}\,cof.(2p+q)+c^{III}\,cof.\,2q+d^{III}\,cof.(2p-3q)+e^{III}\,cof.(2p+3q).$

$y^{I}=\gamma^{II}\,fin.\,q.+\delta^{II}\,fin.(2p-q)+\varepsilon^{II}\,fin.(2p+q)+\gamma^{III}\,fin.\,3q+\delta^{III}\,fin.(2p-3q)+\varepsilon^{III}\,fin.(2p+3q).$

Et la substitution nous fournira les douzes équations suivantes.

1. $(nn+3\lambda+A)c^{II}+2(m+1)n.\gamma^{II}=+484{,}398.c^{3}-\frac{1}{2}B(d^{II}+e^{II})-\frac{1}{2}C(\delta^{II}+\varepsilon^{II}).$

II. $2(m+1)n \cdot c^{II} + (nn + A^{I}) \cdot \gamma^{II} = + 239{,}210 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} C(d^{II} - e^{II}) + \frac{1}{2} B^{I}(\delta^{II} - \varepsilon^{II})$.

III. $((2m-n)^2 + 3\lambda + A)d^{II} + 2(m+1)(2m-n)\delta^{II} = + 56{,}493 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} B c^{II} - \frac{1}{2} C \gamma^{II}$.

IV. $2(m+1)(2m-n)d^{II} + ((2m-n)^2 + A^{I})\delta^{II} = + 13{,}466 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} C c^{II} + \frac{1}{2} B^{I} \gamma^{II}$.

V. $((2m+n)^2 + 3\lambda + A)e^{II} + 2(m+1)(2m+n)\varepsilon^{II} = - 680{,}467 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} B c^{II} + \frac{1}{2} C \gamma^{II}$.

VI. $2(m+1)(2m-n)e^{II} + ((2m-n)^2 + A^{I})\varepsilon^{II} = - 529{,}371 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} C c^{II} - \frac{1}{2} B^{I} \gamma^{II}$.

VII. $(9nn + 3\lambda + A)e^{III} + 6(m+1)n \cdot \gamma^{III} = - 1130{,}384 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} B(d^{III} + e^{III}) - \frac{1}{2} C(\delta^{III} + \varepsilon^{III})$.

VIII. $6(m+1)n \cdot c^{III} + (9nn + A^{I}) \cdot \gamma^{III} = - 881{,}177 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} C(d^{III} - e^{III}) + \frac{1}{2} B^{I}(\delta^{III} - \varepsilon^{III})$.

IX. $((2m-3n)^2 + 3\lambda + A)d^{III} + 2(m+1)(2m-3n)\delta^{III} = + 248{,}289 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} B c^{III} - \frac{1}{2} C \gamma^{III}$.

X. $2(m+1)(2m-3n)d^{III} + ((2m-3n)^2 + A^{I})\delta^{III} = - 135{,}471 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} C c^{III} + \frac{1}{2} B^{I} \gamma^{III}$.

XI. $((2m+3n)^2 + 3\lambda + A)e^{III} + 2(m+1)(2m+2n)\varepsilon^{III} = + 5{,}190 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} B c^{III} + \frac{1}{2} C \gamma^{III}$.

XII. $2(m+1)(2m+3n)e^{III} + ((2m+3n)^2 + A^{I})\varepsilon^{III} = + 5{,}043 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} C c^{III} - \frac{1}{2} B^{I} \gamma^{III}$.

D'où l'on trouvera par élimination les valeurs qui suivent

$c^{II} = + 0{,}8899 \cdot c^{3}$; $d^{II} = - 0{,}5166 \cdot c^{3}$;

$e^{II} = - 0{,}2445 \cdot c^{3}$;

$\gamma^{II} = -0{,}4207 \cdot c^2$; $\delta^{II} = +1{,}3000 \cdot c^2$;
$\varepsilon^{II} = -0{,}1960 \cdot c^2$;

$c^{III} = -0{,}3832 \cdot c^3$; $d^{III} = +0{,}1782 \cdot c^3$;
$e^{III} = +0{,}0011 \cdot c^3$;
$\gamma^{III} = -0{,}2996 \cdot c^3$; $\delta^{III} = -0{,}2850 \cdot c^3$;
$\varepsilon^{III} = +0{,}0007 \cdot c^3$.

Par conséquent

$$x^I = \begin{cases} +0{,}8899 \cdot c^2 \cdot \cos. q - 0{,}5166 \cdot c^2 \cdot \cos. (2p - q) \\ \quad - 0{,}2455 \cdot c^2 \cdot \cos. (2p + q) \\ -0{,}3832 \cdot c^3 \cdot \cos. 3q + 0{,}1782 \cdot c^3 \cdot \cos. (2p - 3q) \\ \quad + 0{,}0011 \cdot c^3 \cdot \cos. (2p + 3q). \end{cases}$$

$$y^I = \begin{cases} -0{,}4207 \cdot c^2 \cdot \sin. q + 1{,}3000 \cdot c^2 \cdot \sin. (2p - q) \\ \quad - 0{,}1960 \cdot c^2 \cdot \sin. (2p + q) \\ -0{,}2996 \cdot c^3 \cdot \sin. 3q - 0{,}2850 \cdot c^3 \cdot \sin. (2p - 3q) \\ \quad \pm 0{,}0007 \cdot c^3 \cdot \sin. (2p \pm 3q). \end{cases}$$

QUATRIÈME SECTION.

Recherches des inégalités du mouvement de la Lune de la troiſième Claſſe, qui dépendent de l'inclinaiſon de l'orbite de la Lune à l'écliptique.

ARTICLE PREMIER.

Recherches préliminaires ſur la nature de ces inégalités.

I.

J'AI ſuppoſé juſqu'ici que la Lune ſe meut ſur le plan de l'écliptique, dont les inégalités ont été tirées des deux premières de nos trois équations générales ; à préſent je n'ai qu'à y ajouter la troiſième. Or, comme l'inclinaiſon de la Lune eſt fort petite, il me ſera permis de faire abſtraction de l'excentricité de l'orbite de la Terre, & encore à plus forte raiſon des inégalités qui dépendent de la parallaxe du Soleil. J'omettrai donc encore les termes affectés par v & a, & les trois équations que nous aurons à conſidérer ici ſeront (Sect. 1. § 23).

$$1. \left.\begin{aligned} &-\frac{ddx}{dt^2}+\frac{2(m+1)dy}{dt}+3\lambda x+\tfrac{3}{2}\cos.2p+\tfrac{3}{2}x\cos.2p \\ &-\tfrac{3}{2}y\sin.2p-3\lambda xx+\tfrac{3}{2}\lambda yy+4\lambda x^3 \\ &-6\lambda xyy+\tfrac{3}{2}\lambda(1-4x)zz. \end{aligned}\right\}=0$$

$$2.\ -\frac{ddy}{dt^2}-\frac{2(m+1)\,dx}{dt}-\tfrac{3}{2}\,sin.\,2p-\tfrac{3}{2}\,y\,cos.\,2p \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\}=0$$
$$-\tfrac{3}{2}\,x\,sin.\,2p+3\lambda xy+\tfrac{3}{2}\lambda y^3-6\lambda x\,x\,y$$
$$+\tfrac{3}{2}\lambda y.zz.$$

$$3.\ -\frac{dd\zeta}{dt^2}-(\lambda+1)z+\tfrac{3}{2}\lambda\zeta^3+\tfrac{3}{2}\lambda(2x-4xx+yy)z=0.$$

II.

Les deux équations ſont donc les mêmes que celles que nous avons développées juſqu'ici, aux derniers termes près qui renferment zz, auxquels il nous faudra encore ſatisfaire, & d'où réſulteront quelques nouvelles inégalités dans x & y; mais qui pourront être négligées dans la recherche de la valeur de z, laquelle étant fort petite, il ſuffira d'y prendre ſeulement les principales parties qui conſtituent les valeurs de x & y. Enſuite en déterminant z, je négligerai le terme $\frac{3}{2}\lambda z^3$, puiſqu'il donneroit des inégalités qui dépendent du cube de l'inclinaiſon, & qu'on pourra hardiment rejetter.

III.

Pour commencer les recherches préſentes, ne conſiderons d'abord que la troiſième équation, & ſuppoſons premiérement $x=0$ & $y=0$, de ſorte que $-\frac{dd\zeta}{dt^2}-(1+\lambda)z=0$; d'où il eſt clair que z exprimera le *ſinus* ou *coſinus* d'un certain angle proportionnel au tems multiplié par un coëfficient arbitraire. Soit donc r cet angle & poſons $dr=l\,dt$, de ſorte que mettant $z=\omega\,sin.\,r$, nous ayons $\frac{d\zeta}{dt}=l\omega\,cos.\,r$ & $\frac{dd\zeta}{dt^2}=-ll\,\omega\,sin.\,r$,

ces valeurs étant substituées donneront $l\,l\,\omega\,sin.\,r - (1+\lambda)\,\omega\,sin.\,r = 0$; donc $l = \sqrt{(1+\lambda)}$. Or ayant trouvé ci-dessus $\lambda = mm + 2m + \frac{1}{2} = 179{,}2274177$. (Sect. 2 §. 3), nous aurons $l = 13{,}42488$.

IV.

Examinons maintenant plus soigneusement la nature de cet angle r, que nous venons de trouver, & puisque la tangente de la latitude de la Lune est $Z : \sqrt{(XX+YY)} = z(1 - x + 2xx - \frac{1}{2}yy)$, nous voyons que quand $r = 0$ ou $r = 180°$, la Lune se trouvera dans l'écliptique & que sa latitude sera la plus grande lorsque $r = 90°$ ou $r = 270°$; d'où il est évident que cet angle r exprime ce qu'on nomme en Astronomie : *Argument de Latitude*; & par conséquent cet angle r doit résulter quand on soustrait la longitude du nœud de la longitude moyenne de la Lune.

V.

Voyons donc si ce mouvement est conforme aux observations. Les Tables Astronomiques donnent pour le tems de 30 jours le mouvement du nœud de la Lune rétrograde $1° 35' 19'' = 5719''$; le mouvement moyen de la Lune $13^s\ 5° 17' 31'' = 1423051''$: donc le mouvement moyen de la Lune moins le mouvement de son nœud $1428770''$. Mais le mouvement moyen de l'anomalie du Soleil pour ce même tems de 30 jours est $29° 34' 4'', 5 = 106444'', 5$; d'où les observations donneront

$l = \frac{dr}{dt} = \frac{1428770}{106444,5} = 13{,}4226756$; & dont il faudra

se servir dans la suite, la petite différence provenant tant de ce que nous avons négligé au § 3. les inégalités de la

Lune, que principalement de l'action des autres planètes sur la Lune.

VI.

Ensuite pour le coëfficient ω, il est clair qu'il exprimera la valeur de z lorsque la latitude moyenne de la Lune devient la plus grande; car prenant $r = 90°$, il devient $z = \omega$; or z est alors la tangente de la latitude. La valeur d'ω doit donc être déterminée par les observations de la même manière que l'excentricité c, & cette valeur sera à peu près $\omega = \frac{9}{10}$; celle de l'excentricité étant, peu s'en faut, $c = \frac{1}{10}$.

ARTICLE II.

Détermination des inégalités auxquelles est assujettie la latitude de la Lune.

VII.

AYANT trouvé la partie principale de la valeur de z, qui est $z = \omega \sin. r$, il faut chercher les inégalités, auxquelles ce z est assujetti à cause des inégalités mêmes de la Lune, dont il suffira de prendre les principales, & qui sont contenues dans les valeurs déja trouvées pour x & y. Soit donc

$$x = a^{I} + b \cos. 2p + c' \cos. q + d \cos. (2p - q) + f \cos. 2q + g \cos. (2p - 2q)$$

&

$$y = \mathfrak{G} \sin. 2p + \gamma \sin. q + \delta \sin. (2p - q) + \xi \sin. 2q + \theta \sin. (2p - 2q);$$

& nous obtiendrons

$$2x - 4xx + yy = 2a^{I} - 4a^{I}a^{I} - 2bb + \tfrac{1}{2}\mathfrak{G}\mathfrak{G} - 2c^{I}c^{I} + \tfrac{1}{2}\gamma\gamma - 2dd + \tfrac{1}{2}\delta\delta + (2b - 8a^{I}b - 4c^{I}d - \gamma\delta)\ cof.\ 2p + (2c^{I} - 8a^{I}c^{I} - 4bd + \mathfrak{G}\delta)\ cof.\ q + (2d - 8a^{I}d - 4bc^{I} + \mathfrak{G}\gamma)\ cof.\ (2p - q) + (2f - 8a^{I}f - 4bg + \mathfrak{G}\theta - 2c^{I}c^{I} - \tfrac{1}{2}\gamma\gamma)\ cof.\ 2q + (2g - 8a^{I}g - 4bf + \mathfrak{G}\xi - 4c^{I}d + \gamma\delta)\ cof.\ (2p - 2q).$$

D'où en substituant pour λ, a^{I}, b, $\mathfrak{G}$, c^{I}, γ &c. leurs valeurs trouvées, nous trouverons cette équation.

VIII.

Equation qui renferme toutes les inégalités du mouvement de la Lune en latitude.

$$-\frac{dd\zeta}{dt^{2}} + \zeta(A + B\ cof.\ 2p + C\ cof.\ q + D\ cof.\ (2p - q) + E\ cof.\ 2q + F\ cof.\ (2p - 2q)) = 0,$$

où j'ai posé pour abréger

$$-180,2354 - 280,0737 \cdot cc = A;$$
$$-3,8603 - 311,8370 \cdot cc = B;$$
$$+541,9150 \cdot c = C;$$
$$+102,3782 \cdot c = D;$$
$$-810,4568 \cdot cc = E$$

&

$$-87,1502 \cdot cc = F,$$

IX.

IX.

Détermination de ces inégalités.

Donnons donc à z la forme suivante :

$$z = \omega \sin. r + A' \omega \sin. (2p - r) + a' \omega \sin. (2p + r)$$
$$+ B' \omega \sin. (q - r) + b' \omega \sin. (q + r) + C' \omega \sin. (2p - q - r)$$
$$+ c' \omega \sin. (2p - q + r) + D' \omega \sin. (2q - r)$$
$$+ d' \omega \sin (2q + r) + F' \omega \sin. (2p - 2q - r)$$
$$+ a' \omega \sin. (2p - 2q + r).$$

Et ſubſtituons cette forme dans l'équation différentio-différentielle au lieu de z, & nous aurons en négligeant les termes qui dépendroient du cube & du biquarré de l'excentricité c ces déterminations :

Pour le coëfficient de $\sin. r$; $ll + A - \frac{1}{2} B(A' - a') - \frac{1}{2} C(B' - b') - \frac{1}{2} D(C' - c') = 0$.

Pour le coëfficient de $\sin. (2p - r)$; $\left((2m - l)^2 + A\right) A' - \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} CC' + \frac{1}{2} DB' = 0$.

Pour le coëfficient de $\sin. (2p + r)$; $\left((2m + l)^2 + A\right) a' + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} Cc' + \frac{1}{2} Db' = 0$.

Pour le coëfficient de $\sin. (q - r)$; $\left((n - l)^2 + A\right) B' - \frac{1}{2} C - \frac{1}{2} Bc' + \frac{1}{2} DA' = 0$.

Pour le coëfficient de $\sin. (q + r)$; $\left((n + l)^2 + A\right) b' + \frac{1}{2} C - \frac{1}{2} BC' + \frac{1}{2} Da' = 0$.

Pour le coëfficient de $\sin. (2p - q - r)$; $\left((2m - n - l)^2 + A\right) C' - \frac{1}{2} D - \frac{1}{2} Bb' + \frac{1}{2} C A' = 0$.

Pour le coëfficient de $\sin. (2p - q + r)$; $\left((2m - n + l)^2 + A\right) c' + \frac{1}{2} D - \frac{1}{2} BB' + \frac{1}{2} Ca' = 0$.

Pour le coëfficient de *sin.* $(2q-r)$; $((2n-l)^2+A)D'$ $-\frac{1}{2}Bf'-\frac{1}{2}E+\frac{1}{2}CB'+\frac{1}{2}FA'=0.$

Pour le coëfficient de *sin.* $(2q+r)$; $((2n+l)^2+A)d'$ $-\frac{1}{2}Bf'+\frac{1}{2}E+\frac{1}{2}Cb'+\frac{1}{2}Fa'=0.$

Pour le coëfficient de *sin.* $(2p-2q-r)$; $((2m-2n-l)^2$ $+A)f'-\frac{1}{2}Bd'-\frac{1}{2}F+\frac{1}{2}CC'-\frac{1}{2}Db'+\frac{1}{2}EA'=0.$

Pour le coëfficient de *sin.* $(2p-2q+r)$; $((2m-2n+l)^2$ $+A)f'-\frac{1}{2}BD'+\frac{1}{2}F+\frac{1}{2}Cc'-\frac{1}{2}DE'+\frac{1}{2}Ea'=0.$

D'où l'on voit que les coëfficiens A' & a' auront chacun deux parties, dont l'une ne dépend point du tout de l'excentricité & dont l'autre renferme le quarré de l'excentricité cc. Enſuite les coëfficiens B', b', C', c' dépendront uniquement de la ſimple excentricité c, & les coëfficiens D', d', E', e' renfermeront le ſeul quarré de l'excentricité cc.

La première de ces onze équations déterminera plus exactement la valeur de l, déja connue par les Tables Aſtronomiques & les dix autres équations donneront les valeurs des coëfficiens A', a', B', b', C', c', D', d', E', e, F', f' où il ſera permis de mettre dans la valeur de A, pour $cc=\frac{1}{400}$; de ſorte que $A=-180,2354$ $-\frac{280,0737}{400}=-180,9355.$

X.

Après avoir fait les calculs j'ai trouvé pour z cette valeur :

VALEUR de z ou de $\frac{Z}{a}$

$$z = \omega \sin. r + (0{,}036484 + 0{,}3498 . cc)\omega \sin. (2p - r)$$
$$+ (0{,}001877 + 0{,}2102 . cc)\omega \sin. (2p + r)$$
$$- 1{,}485822 . c\omega \sin. (q - r) - 0{,}511163 . c\omega \sin. (q + r)$$
$$- 0{,}22643 . c\omega \sin. (2p - q - r) - 0{,}12553 . c\omega$$
$$\sin. (2p - q + r)$$
$$+ 0{,}1195 . cc\omega \sin. (2q - r) + 0{,}3850 . cc\omega . \sin. (2q + r)$$
$$+ 0{,}1523 . cc\omega \sin. (2p - 2q - r) - 0{,}0614 . cc\omega$$
$$\sin. (2p - 2q + r).$$

XI.

DÉTERMINATION PLUS EXACTE DU RAPPORT l. Si nous substituons les valeurs trouvées pour A', a', B', b', C' & c' dans la première équation, qui est

$$ll + A + \tfrac{1}{2}B(A' - a') - \tfrac{1}{2}C(B' - b') - \tfrac{1}{2}D(C' - c') = 0$$

nous obtiendrons

$$ll + A = -0{,}080286 - 269{,}4531 . cc$$

& de-là

$$ll = +180{,}1551 + 10{,}6240 . cc;$$

par conséquent

$$l = 13{,}42219 + 0{,}3956 . cc$$

& en posant

$cc = \frac{1}{405}$, il sera $l = 13{,}42318$.

Or, nous avons trouvé par les Tables Astronomiques $l = 13{,}42267$; d'où l'on voit le parfait accord entre la théorie & les observations, cette petite différence de 0,00051 provenant tant de l'action des autres planètes

ſur la Lune, que de ce que nous n'avons pas encore pu mettre pour l'excentricité c ſa juſte valeur, qui probablement ſera plus petite que $\frac{1}{20}$.

ARTICLE III.

Détermination des inégalités de la Lune qui réſultent de l'inclinaiſon de ſon orbite.

XII.

Ces inégalités ſont connues ſous le nom de *Réduction à l'Ecliptique* & elles réſultent des derniers termes de nos deux premières équations différentio-différentielles, qui ſont

1. $$\frac{-ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + 3\lambda x + \tfrac{3}{2}\cos. 2p + \tfrac{3}{2} x \cos 2p - \tfrac{3}{2} y \sin. 2p - 3\lambda xx + \tfrac{3}{2}\lambda yy + 4\lambda x^3 - 6\lambda xyy + \tfrac{3}{2}\lambda(1-4x)zz = 0.$$

2. $$\frac{-ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + \tfrac{3}{2}\sin. 2p - \tfrac{3}{2} y \cos. 2p - \tfrac{3}{2} x \sin. 2p + 3\lambda xy + \tfrac{3}{2}\lambda y^3 - 6\lambda xxy + \tfrac{3}{2}\lambda y.zz = 0.$$

XIII.

Préparation.

Soient u & v les valeurs déja trouvées pour x & y & écrivons $u + x^1$ & $v + y^1$ au lieu de x & y, pour avoir ces deux équations

1. $\frac{-ddx^{I}}{dt^{2}} + \frac{2(m+1)dy^{I}}{dt} + 3\lambda x^{I} + x^{I}\left(\frac{1}{2}\,cof.\,2p - 6\lambda u + 12\lambda uu - 6\lambda vv\right) + y^{I}\left(-\frac{1}{2}\,sin.\,2p + 3\lambda v - 12\lambda uv\right) + \frac{3}{2}\lambda(1-4u)zz = 0.$

2. $\frac{-ddy^{I}}{dt^{2}} - \frac{2(m+1)dx^{I}}{dt} + y^{I}\left(-\frac{3}{2}\,cof.\,2p + 3\lambda u + \frac{9}{2}\lambda vv - 6\lambda uu\right) + x^{I}\left(-\frac{3}{2}\,sin.\,2p + 3\lambda v - 12\lambda uv\right) + \frac{3}{2}\lambda vzz = 0.$

qui renfermeront donc les corrections compriſes ſous le nom de Réduction à l'écliptique.

XIV.

Détermination de ces corrections.

Soit $u = 0,0000240 - 0,0071802\,.\,cof.\,2p$ & $v = +0,0102118\,.\,sin.\,2p$, en omettant toutes les inégalités qui dépendent de l'excentricité de l'orbite de la Lune ou de la quantité c; qu'on faſſe maintenant les ſubſtitutions & nos deux équations deviendront: (Voyez Sect. 3. § 7.)

1. $-\frac{ddx^{I}}{dt^{2}} + \frac{2(m+1)dy^{I}}{dt} + 537,6558\,.\,x^{I} + 9,220588\,.\,x^{I}\,.\,cof.\,2p + 3,990175\,.\,y^{I}\,.\,sin.\,2p + 268,8154\,.\,zz + 7,721336\,.\,zz\,.\,cof.\,2p = 0.$

2. $\frac{-ddy^{I}}{dt^{2}} - \frac{2(m+1)dx^{I}}{dt} + 0,0272\,.\,y^{I} - 5,360294\,.\,y^{I}\,.\,cof\,2p + 3,990175\,.\,x^{I}\,.\,sin.\,2p + 2,745353\,.\,zz\,.\,sin.\,2p = 0.$

Or comme $z = \omega\,sin.\,r + 0,036484\,\omega\,sin.\,(2p - r) + 0,001877\,\omega\,sin.\,(2p + r)$

nous aurons

$$zz = 0,500667 . \omega\omega - 0,034607 . \omega\omega . cof. 2p - 0,499933 . \omega\omega . cof. 2r + 0,036484 . \omega\omega . cof.(2p - 2r) + 0,001877 . \omega\omega . cof.(2p + 2r);$$

de-là nos deux équations.

$$1. - \frac{ddx^{I}}{dt^{2}} + \frac{2(m+1)dy^{I}}{dt} + 537,6558 . x^{I} + 9,220588 . x^{I} cof. 2p + 3,990175 . y^{I} sin. 2p + 134,4534 . \omega\omega - 5,4371 . \omega\omega . cof. 2p - 134,2561 . \omega\omega . cof. 2r + 7,8774 . \omega\omega . cof.(2p - 2r) - 2,4346 . \omega\omega . cof.(2p + 2r) = 0.$$

$$2. - \frac{-ddy^{I}}{dt^{2}} - \frac{2(m+1)dx^{I}}{dt} + 0,0272462 . y^{I} - 5,360294 . y^{I} cof. 2p + 3,990175 . x^{I} . sin. 2p + 1,3745 . \omega\omega . sin. 2p + 0,0526 . \omega\omega . sin. 2r - 0,6862 . \omega\omega . sin.(2p - 2r) - 0,6862 . \omega\omega . sin.(2p + 2r) = 0.$$

XV.

Suppoſons

$$x^{I} = a^{II}\,\omega\omega + b^{II}\,\omega\omega\, cof. 2p + f\omega\omega\, cof. 2r + g\omega\omega\, cof.(2p - 2r) + h\omega\omega\, cof.(2p + 2r)$$

&

$$y^{I} = \mathfrak{C}^{II}\,\omega\omega\, sin. 2p + \zeta\,\omega\omega\, sin. 2r + \eta\,\omega\omega\, sin.(2p - 2r) + \theta\,\omega\omega\, sin.(2p + 2r),$$

d'où nous obtiendrons les déterminations ſuivantes :

$$537,6558 . a^{II} + 4,610294 . b^{II} + 1,995087 . \mathfrak{C}^{II} + 134,4534 = 0.$$

$$(4mm + 537,6558) b^{II} + 4m(m+1)\mathfrak{C}^{II} + 9,220588 . a^{II} - 5,43707 = 0.$$

$4m(m+1)b^{II} + (4mm + 0,0272)\mathfrak{C}^{II} + 3,990175.a^{II} + 1,374451 = 0.$

$(4ll + 537,6558)f + 4l(m+1)\zeta + 4,610294(g+h) + 1,995087(n+\theta) - 134,2561 = 0.$

$4l(m+1)f + (4ll + 0,0272)\zeta + 1,995087(g-h) + 2,680147(n-\theta) + 0,05265 = 0.$

$(4(m-l)^2 + 537,6568)g + 4(m-l)(m+1)n + 4,610294.f + 1,995087.\zeta + 7,87739 = 0.$

$4(m-l)(m+1)g + ((m-l)^2 + 0,0272)n + 1,995087.f + 2,680147.\zeta - 0,68624 = 0.$

$(4(m+l)^2 + 537,6558)h + 4(m+l)(m+1)\theta + 4,610294.f\,1,995087.\zeta - 2,43463 = 0.$

$4(m+l)(m+1)h + (4(m+l)^2 + 0,0272)\theta + 1,995087.f - 2,680147.\zeta - 0,68624 = 0.$

XVI.

De-là on aura : $a^{II} = -0,25012$:

$b^{II} = +0,01310$; $f = +0,24723$;
$g = -0,01530$; $h = +0,00042$;
$\mathfrak{C}^{II} = -0,01804$; $\zeta = -0,24635$;
$n = +0,02334$; $\theta = -0,00039$;

par conséquent

$x^{I} = -0,25012.\omega\omega + 0,01310.\omega\omega\, cos.\, 2p + 0,24723.\omega\omega\, cos.\, 2r - 0,01330.\omega\omega.cos.(2p-2r) + 0,00042.\omega\omega\, cos.(2p+2r)$

&

$$y^{\text{I}} = -0,01804 \cdot \omega\omega \sin. 2p - 0,24635 \cdot \omega\omega \sin. 2r + 0,02334 \cdot \omega\omega \sin.(2p - 2r) - 0,00039 \cdot \omega\omega \sin.(2p + 2r).$$

Au reſte la réduction à l'écliptique ou cette petite correction qui réſulte de l'inclinaiſon de l'orbite de la Lune, dépendroit auſſi de ſon excentricité; mais comme les inégalités qui en naîtroient pour les coordonnées X & Y ſeroient toutes multipliées par $c \cdot \omega\omega$, j'ai cru pouvoir me diſpenſer d'en rechercher la valeur. Cependant ſi l'on vouloit les déterminer par la méthode dont je me ſuis ſervi juſqu'ici, on ne rencontreroit pas, à ce que je penſe, la moindre difficulté.

CINQUIEME

CINQUIÈME SECTION.

Recherches des inégalités du mouvement de la Lune de la quatrième Claſſe, qui dépendent de la parallaxe du Soleil.

ARTICLE PREMIER.

Introduction à la Recherche de ces inégalités.

I.

J'ai ſuppoſé juſqu'ici la diſtance du Soleil à la Terre infiniment plus grande que celle de la Lune, & j'avois pour cet effet négligé les termes qui ſont affectés par le rapport a. Maintenant je ferai entrer ces termes dans les équations générales (Sect. 1. § 23) pour rechercher les inégalités qui en réſulteront. Je remarque d'abord que comme les inégalités de cette claſſe ſont très-petites Il ſuffira de prendre les termes où x, y & z n'ont tout au plus que deux dimenſions; je négligerai donc tous ceux où la troiſième dimenſion entre. Enſuite il eſt auſſi clair que le terme $\frac{1}{2}\lambda zzz$ dans la première équation ne vient point en conſidération, & comme il n'eſt pas encore queſtion des inégalités qui dépendent de l'excentricité de l'orbite de la Terre, j'omettrai dans les recherches préſentes tous les termes affectés par v. En mettant donc pour λ ſa valeur $\lambda = mm + 2m + \frac{3}{2}$, les inégalités que

je me propose de déterminer ici devront être déduites de ces équations :

1. $\frac{-ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + 3\lambda x + \frac{3}{2}\cos.2p + \frac{3}{2}x\cos.2p - \frac{3}{2}y\sin.2p - 3\lambda xx + \frac{3}{2}\lambda yy - a(\frac{9}{8}\cos.p + \frac{15}{8}\cos.3p) - ax(\frac{9}{4}\cos.p + \frac{15}{4}\cos.3p) + ay \times (\frac{3}{4}\sin.p + \frac{15}{4}\sin.3p) = 0.$

2. $\frac{-ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} - \frac{3}{2}\sin.2p - \frac{3}{2}y\cos.2p - \frac{3}{2}x\sin.2p + 3\lambda xy + a(\frac{3}{8}\sin p + \frac{15}{8}\sin.3p) - ay(\frac{3}{4}\cos.p - \frac{15}{4}\cos.3p) + ax(\frac{3}{4}\sin.p + \frac{15}{4}\sin 3p.) = 0.$

3. $\frac{-ddz}{dt^2} - (1+\lambda)z + 3\lambda xz - 3az\cos.p = 0.$

II.

Séparons d'abord de ces équations tous les termes auxquels nous ayons déja satisfait. Soient u, v & w les valeurs de x, y & z qui font évanouir ces trois expressions :

1. $-\frac{ddu}{dt^2} + \frac{2(m+1)dv}{dt} + 3\lambda u + \frac{3}{2}\cos.2p + \frac{3}{2}u\cos.2p - \frac{3}{2}v\sin.2p - 3\lambda uu + \frac{3}{2}\lambda vv.$

2. $\frac{-ddv}{dt^2} - \frac{2(m+1)du}{dt} - \frac{3}{2}\sin.2p - \frac{3}{2}v\cos.2p - \frac{3}{2}u\sin.2p + 3\lambda uv.$

3. $\frac{-ddw}{dt^2} - (1+\lambda)w + 3\lambda uw$

Posons $x = u + x^{I}$; $y = v + y^{I}$ & $z = w + z^{I}$, de sorte que x^{I}, y^{I}, z^{I} contiennent les inégalités qui résultent

du rapport a, & nous obtiendrons les équations suivantes qu'il s'agit de résoudre ici.

III.

Equations qui renferment les inégalités parallactiques.

$$1.\ -\frac{ddx^{I}}{dt^{2}}+\frac{2(m+1)dy^{I}}{dt}+3\lambda x^{I}+(\tfrac{3}{2}\cos.2p-6\lambda u)x^{I}$$
$$-(\tfrac{3}{2}\sin.2p-3\lambda v)y^{I}-a(\tfrac{9}{8}\cos.p+\tfrac{15}{8}\cos.3p)$$
$$-au(\tfrac{9}{4}\cos.p+\tfrac{15}{4}\cos.3p)+av(\tfrac{3}{4}\sin.p+\tfrac{15}{4}\sin.3p)$$
$$=0.$$

$$2.\ -\frac{ddy^{I}}{dt^{2}}-\frac{2(m+1)dx^{I}}{dt}-(\tfrac{3}{2}\cos.2p-3\lambda u)y^{I}$$
$$-(\tfrac{3}{2}\sin.2p-3\lambda v)x^{I}+a(\tfrac{3}{8}\sin.p+\tfrac{15}{8}\sin.3p)$$
$$-av(\tfrac{3}{4}\cos.p-\tfrac{15}{4}\cos.3p)+au(\tfrac{3}{4}\sin.p+\tfrac{15}{4}\sin.3p)$$
$$=0.$$

$$3.\ -\frac{ddz^{I}}{dt^{2}}-(1+\lambda)z^{I}+3\lambda uz^{I}+3\lambda x^{I}w-3aw\cos.p=0.$$

ARTICLE II.

Détermination des inégalités parallactiques, qui affectent le mouvement de la Lune dans l'écliptique.

IV.

Considérons donc d'abord les deux premières équations, & commençons par le cas le plus simple, en posant $u=0$ & $v=0$, de sorte que nos deux équations soient:

1. $-\frac{ddx^{I}}{dt^{2}}+\frac{2(m+1)dy^{I}}{dt}+3\lambda x^{I}+\frac{3}{2}x^{I}\,cof.\,2p-\frac{3}{2}y^{I}$
$sin.\,2p-\frac{9}{8}a\,cof.\,p-\frac{15}{8}a\,cof.\,3p=0.$

2. $-\frac{ddy^{I}}{dt^{2}}-\frac{2(m+1)dx^{I}}{dt}-\frac{3}{2}y^{I}\,cof.\,2p-\frac{3}{2}x^{I}\,sin.\,2p$
$+\frac{3}{8}a\,sin.\,p+\frac{15}{8}a\,sin.\,3p=0.$

D'où l'on voit qu'il faut mettre

$$x^{I}=b^{I}\,a\,cof.\,p+b^{II}\,a\,cof.\,3p$$

&

$$y^{I}=\mathfrak{C}^{I}\,a\,sin.\,p+\mathfrak{C}^{II}\,a\,sin.\,3p.$$

Substituons ces valeurs dans nos deux équations, & nous obtiendrons ces quatre conditions à remplir.

$(mm+3\lambda)b^{I}+2m(m+1)\mathfrak{C}^{I}+\frac{3}{4}b^{I}-\frac{3}{4}\mathfrak{C}^{I}+\frac{3}{4}b^{II}$
$-\frac{3}{4}\mathfrak{C}^{II}-\frac{9}{8}=0.$

$mm\,\mathfrak{C}^{I}+2m(m+1)b^{I}+\frac{3}{4}\mathfrak{C}^{I}-\frac{3}{4}b^{I}-\frac{3}{4}\mathfrak{C}^{II}+\frac{3}{4}b^{II}$
$+\frac{3}{8}=0.$

$(9mm+3\lambda)b^{II}+6m(m+1)\mathfrak{C}^{II}+\frac{3}{4}(b^{I}+\mathfrak{C}^{I})$
$-\frac{15}{8}=0.$

$9mm\,\mathfrak{C}^{II}+6m(m+1)b^{II}-\frac{3}{4}(b^{I}+\mathfrak{C}^{I})+\frac{15}{8}=0.$

D'où l'on trouvera

$b^{I}=-0,11535$; $\mathfrak{C}^{I}=-+0,24511$;
$b^{II}=+0,00255$ & $\mathfrak{C}^{II}=-0,00313$;

par conséquent

$$x^{I}=-0,11535\,.\,a\,.\,cof.\,p+0,00255\,.\,a\,.\,cof.\,3p$$

&

$$y^{I}=+0,24511\,.\,a\,.\,sin.\,p-0,00313\,.\,a\,.\,sin.\,3p.$$

V.

Approximation ultérieure.

Donnons à u & v leurs valeurs principales qui ſont

$u = b \cos. 2p + c \cos. q + d \cos. (2p - q) + e \cos. (2p + q)$;

$v = \zeta \sin. 2p + \gamma \sin. q + \delta \sin. (2p - q) + \epsilon \sin. (2p + q)$;

ou

$b = -0,0071800$; $\zeta = +0,0102118$. (Sect. 2. § 5.)

&

$\gamma = -2,012729 . c$; $d = +0,187947 . c$;

$\delta = -0,411802 . c$; $e = -0,002705 . c$;

$\epsilon = -0,003215 . c$ (Sect. 3. §. 12.).

Calculons d'abord

$-au(\frac{9}{4} \cos. p + \frac{15}{4} \cos. 3p) + av(\frac{3}{4} \sin. p + \frac{15}{4} \sin. 3p)$

dont la valeur ſera

$+0,0445166 . a \cos. p + 0,0042481 . a \cos. 3p$

$-2,246594 ac . \cos. (p - q) - 1,492918 . ac . \cos. (p + q)$

$-5,705881 . ac . \cos. (3p - q) + 1,903115 . ac . \cos. (3p + q)$.

De même nous trouverons

$-av(\frac{3}{4} \cos. p - \frac{15}{4} \cos. 3p) + au(\frac{3}{4} \sin. p + \frac{15}{4} \sin. 3p) =$

$-0,0337465 . a \sin. p - 0,0065219 . a \sin. 3p$

$-0,294871 . ac . \sin. (p - q) + 2,256521 . ac . \sin. (p + q) + 5,873773 . ac . \sin. (3p - q)$

$-1,898676 . ac . \sin. (3p + q)$.

Enſuite

$3\lambda u = -3,8605 . \cos. 2p + 537,6822 . c(\cos. q$

$+ 101,0558 . c(\cos. (2p - q) - 1,4544 . c(\cos. (2p + q)$

&

$3\lambda\nu = +5,4907 . \mathit{sin}. 2p - 1082,2087 . c(\mathit{sin}. q - 221,4187 . c(\mathit{sin}.(2p-q) - 1,7286 . c(\mathit{sin}.(2p+q)$

d'où nos équations deviendront

1. $-\frac{dd x^{I}}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^{I}}{dt} + 537,6822 . x^{I} + (9,2211 . \mathit{cos}. 2p - 1075,3644 . c . \mathit{cos}. q - 202,1116 . c . \mathit{cos}.(2p-q) + 2,9088 . c . \mathit{cos}.(2p+q) x^{I} + (3,9907 . \mathit{sin}. 2p - 1082,2087 . c . \mathit{sin}. q - 221,4187 . c . \mathit{sin}.(2p-q) - 1,7286 . c . \mathit{sin}.(2p+q) y^{I} - 1,0804834 . a \mathit{cos}. p - 1,8707519 . a \mathit{cos}. 3p - 2,246594 . ac . \mathit{cos}.(p-q) - 1,492918 . ac . \mathit{cos}.(p+q) - 5,705881 . ac . \mathit{cos}.(3p-q) + 1,903115 . ac . \mathit{cos}.(3p+q) = 0.$

2. $-\frac{ddy^{I}}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx^{I}}{dt} + (-5,3605 . \mathit{cos}. 2p + 537,6822 . c . \mathit{cos}. q + 101,0558 . c . \mathit{cos}.(2p-q) - 1,4544 . c . \mathit{cos}.(2p+q) y^{I} + (+3,9907 . \mathit{sin}. 2p - 1082,2087 . c . \mathit{sin}. q - 221,4187 . c . \mathit{sin}.(2p-q) - 1,7286 . c \mathit{sin}. 2p+q) x^{I} + 0,3412535 . a \mathit{sin}. p + 1,8684781 . a \mathit{sin}. 3p - 0,294871 . ac \mathit{sin}.(p-q) + 2,256521 . ac \mathit{sin}.(p+q) + 5,873773 . cc \mathit{sin}.(3p-q) - 1,898676 . ac . \mathit{sin}.(3p+q).$

V I.

Posons donc

$x^{I} + b^{I} . a . \mathit{cos}. p + b^{II} . a . \mathit{cos}. 3p + c^{I} . ac \mathit{cos}.(p-q) + c^{II} . ac \mathit{cos}.(p+q) + d^{I} . ac \mathit{cos}.(3p-q) + d^{II} ac \mathit{cos}.(3p+q).$

$y^{I} = \mathfrak{C}^{I} . a \mathit{sin}. p + \mathfrak{C}^{II} . a \mathit{sin}. 3p + \gamma^{I} . ac \mathit{sin}.(p-q) + \gamma^{II} . ac . \mathit{sin}.(p+q) + \delta^{I} . ac \mathit{sin}.(3p-q) + \delta^{II} ac \mathit{sin}.(3p+q),$

& nous obtiendrons d'abord pour les coëfficiens b^{I}, b^{II}, $\mathfrak{C}^{I}$ & $\mathfrak{C}^{II}$ ces quatre équations

1. $(mm + 542{,}2927)b^{I} + (2m(m+1) + 1{,}9953)\mathfrak{C}^{I} + 4{,}6105 \cdot b^{II} + 1{,}9953 \cdot \mathfrak{C}^{II} - 1{,}0804834 = 0.$

2. $(2m(m+1) + 1{,}9953)b^{I} + (mm + 2{,}6802)\mathfrak{C}^{I} - 1{,}9953 \cdot b^{II} - 2{,}6802 \cdot \mathfrak{C}^{II} + 0{,}3412535 = 0.$

3. $(9mm + 537{,}6822)b^{II} + 6m(m+1)\mathfrak{C}^{II} + 4{,}6105 \cdot b^{I} - 1{,}9953 \cdot \mathfrak{C}^{I} - 1{,}8707519 = 0.$

4. $6m(m+1)b^{II} + 9mm\mathfrak{C}^{II} + 1{,}9953 \cdot b^{I} - 2{,}6802 \cdot \mathfrak{C}^{I} + 1{,}8684781 = 0.$

D'où l'on trouvera

$b^{I} = -0{,}11411$; $b^{II} = +0{,}00300$;
$\mathfrak{C}^{I} = +0{,}24168$; $\mathfrak{C}^{II} = -0{,}00287$.

Par conſéquent

$x^{I} = -0{,}11411 \cdot a \cdot \mathit{cof.}\, p + 0{,}00300 \cdot a \cdot \mathit{cof.}\, 3p$

&

$y^{I} = +0{,}24168 \cdot a \cdot \mathit{ſin.}\, p - 0{,}00287 \cdot a \cdot \mathit{ſin.}\, 3p.$

VII.

Paſſons aux inégalités qui dépendent du produit ac; celles-ci ſeront renfermées dans les huit équations ſuivantes :

1. $((m-n)^2 + 537{,}6822)c^{I} + 2(m+1)(m-n)\gamma^{I} + 4{,}6105(c^{II} + d^{I}) + 1{,}9953(\gamma^{II} + \delta^{I}) - 638{,}7380 \cdot b^{I} - 651{,}8136 \cdot \mathfrak{C}^{I} + 1{,}4544 \cdot b^{II} - 0{,}8643 \cdot \mathfrak{C}^{II} - 2{,}246594.$

II. $2(m+1)(m-n)c^{I}+(m-n)^{2}\gamma^{I}+2,6802(\gamma^{II}-\delta^{I})+1,9953(c^{II}-d^{I})+218,3132.\mathfrak{C}^{I}+430,3950.b^{I}-0,7272.\mathfrak{C}^{II}+0,8643.b^{II}-0,294871=0.$

III. $((m+n)^{2}+537,6822)c^{II}+2(m+1)(m+n)\gamma^{II}+4,6105(c^{I}+d^{II})+1,9953(\gamma^{I}+\delta^{II})-536,2278.b^{I}+540,2400.\mathfrak{C}^{I}-101,0558.b^{II}-110,7093.\mathfrak{C}^{II}-1.492918=0.$

IV. $2(m+1)(m+n)c^{II}+(m+n)^{2}\gamma^{II}+2,6802(\gamma^{I}-\delta^{II})+1,9953(c^{I}-d^{II}+269,5683.\mathfrak{C}^{I}-541,9686.b^{I}+50,5279.\mathfrak{C}^{II}+110,7093.b^{II}+2,256521=0.$

V. $((3m-n)^{2}+537,6822)d^{I}+2(m+1)(3m-n)\delta^{I}+4,6105.c^{I}-1,9953.\gamma^{I}-101,0558.b^{I}+110,7093.\mathfrak{C}^{I}-537,6822.b^{II}-541,1043.\mathfrak{C}^{II}-5,705881=0.$

VI. $2(m+1)(3m-n)d^{I}+(3m-n)^{2}\delta^{I}-2,6802.\gamma^{I}+1,9953.c^{I}+50,5279.\mathfrak{C}^{I}-110,7093.b^{I}+268,8411.\mathfrak{C}^{II}+541,1043.b^{II}+5,873773=0.$

VII. $((3m+n)^{2}+537,6822)d^{II}+2(m+1)(3m+n)\delta^{II}+4,6105.c^{II}-1,9953.\gamma^{II}+1,4544.b^{I}+0,8643.\mathfrak{C}^{I}-537,6822.b^{II}+541,1043.\mathfrak{C}^{II}+1,903115=0.$

VIII.

VIII. $2(m+1)(3m+n)d^{II}+(3m+n)^2\delta^{II}$
$-2,6802.\gamma^{II}+1,9953.c^{II}-0,7272.\mathfrak{C}^{I}$
$-0,8643.b^{I}+268,8411.\mathfrak{C}^{II}-541,1043.b^{II}$
$-1,898676.$

D'où l'on trouvera ces déterminations :

$c^{I}=+0,0467$; $c^{II}=-0,1213$;
$d^{I}=+0,0168$; $d^{II}=-0,0001$;
$\gamma^{I}=-2,6343$; $\gamma^{II}=-0,0554$;
$\delta^{I}=-0,0917$; $\delta^{II}=+0,0014$.

VIII.

Les inégalités de cette classe se réduiront donc aux formules suivantes.

$x^{I}=-0,11411.a.cof.p+0,00300.a.cof.3p$
$+0,0467.ac.cof.(p-q)-0,1213.ac.$
$cof.(p+q)+0,0168.ac.cof.(3p-q)-0,0001.ac.$
$cof.(3p+q)$.

$y^{I}=+0,24168.a.fin.p-0,00287.a.fin.3p$
$-2,6343.ac.fin.(p-q)-0,0554.ac.$
$fin.(p+q)-0,0917.ac.fin.(3p-q)+0,0014.ac.$
$fin.(3p+q)$.

ARTICLE III.

Détermination des inégalités parallactiques qui affectent la latitude de la Lune.

IX.

CES inégalités sont très-petites, étant multipliées par le produit $a\omega$ dont la valeur est à peu près 0,00025. Pour les déterminer, reprenons notre troisième équation, qui est (§. 3.)

$$-\frac{dd\zeta^{I}}{dt^{2}} + (1+\lambda)z^{I} + 3\lambda u z^{I} + 3\lambda x^{I} w - 3a\,w\,cos.p = 0.$$

Posons $u = b\,cos.2p$; $w = \omega\,sin.r$ & $x^{I} = b^{I}.a\,cos.p$; & notre équation deviendra

$$-\frac{dd\zeta^{I}}{dt^{2}} - (1+\lambda)z^{I} + 3\lambda b z^{I}\,cos.2p - \tfrac{3}{2}(\lambda b^{I}-1)a\omega\,sin.(p-r) + \tfrac{3}{2}(\lambda b^{I}-1)a\omega\,sin.(p+r) = 0.$$

Soit donc $z^{I} = A'\,a\omega\,sin\,(p-r) + a'\,a\omega\,sin.(p+r)$, & nous obtiendrons

$$((m-l)^{2}-\lambda-1)\,A' - \tfrac{3}{2}\lambda b.a' - \tfrac{3}{2}(\lambda b^{I}-1) = 0.$$
$$((m+l)^{2}-\lambda-1)\,a' - \tfrac{3}{2}\lambda b.A' + \tfrac{3}{2}(\lambda b^{I}-1) = 0.$$

X.

Mettons pour m, l, λ, b & b^{I} leurs valeurs numériques, savoir:

$m = 12{,}3688974$; $l = 13{,}4226756$;

$\lambda = 179,2274$; $b = -0,00718$

&

$b^{1} = -0,11411$, & nous trouverons

$-179,1169.A' + 1,9303.a' + 32,17736 = 0.$

$+484,9778.a' + 1,9303.A' - 32,17736 = 0.$

D'où les coëfficiens A' & a' seront déterminés de cette façon

$A = +0,1803$; $a' = +0,0656$;

par conséquent

$z^{1} = +0,1803.a\varpi sin.(p-r) + 0,0656.a\varpi sin.(p+r)$.

SIXIÈME SECTION.

Recherches des inégalités du mouvement de la Lune de la cinquième Classe, qui dépendent de l'excentricité de l'orbite de la Terre.

ARTICLE PREMIER.

Introduction à la Recherche de ces inégalités.

I.

Les inégalités de cette classe sont renfermées dans les termes affectés par v, & ce v marque l'excentricité de la Terre. Soit pour abréger $mm + \frac{11}{2} = \mu$; de sorte que $\mu = 54{,}975896$. Reprenons les trois équations différentio-différentielles, comme je les avois données au § 23 de la première section, & posons-y $mm + 2m + \frac{1}{2} = \lambda$; effaçons d'abord les termes multipliés par a auxquels nous venons de satisfaire dans la section précédente & négligeons tous ceux où x, y & z ont ensemble plus de deux dimensions. Ecrivons enfin $u + x^I$ au lieu de x, $v + y^I$ au lieu d'y & $w + z^I$ au lieu de z, où u, v & w signifient les valeurs de x, y & z trouvées dans les sections précédentes, de sorte que nous ayons déja fait évanouir ces trois expressions

$$-\frac{ddu}{dt^2}+\frac{2(m+1)du}{dt}+3\lambda u+\tfrac{3}{2}\,cof.\,2p+\tfrac{3}{2}u\,cof.\,2p$$
$$-\tfrac{3}{2}v\,\mathit{sin}.\,2p-3\lambda uu+\tfrac{3}{2}\lambda vv;$$

$$-\frac{ddv}{dt^2}-\frac{2(m+1)du}{dt}-\tfrac{3}{2}\,\mathit{sin}.\,2p-\tfrac{3}{2}v\,cof.\,2p-\tfrac{3}{2}u$$
$$\mathit{sin}.\,2p+3\lambda uv,$$

&

$$-\frac{ddw}{dt^2}-(1+\lambda)w+3\lambda uw.$$

Et nous obtiendrons les équations ſuivantes, auxquelles il nous reſte à ſatisfaire.

II.

Equations qui renferment les inégalités de cette dernière Claſſe.

1. $$-\frac{ddx^1}{dt^2}+\frac{2(m+1)dy^1}{dt}+(3\lambda x^1+(\tfrac{3}{2}\,cof.\,2p-6\lambda u)x^1$$
$$-(\tfrac{3}{2}\,\mathit{sin}.\,2p-3\lambda v)y^1-v\big((\mu\,cof.\,t+\tfrac{9}{4}\,cof.\,(2p-t)\big)$$
$$(2p-t)+\tfrac{9}{4}\,cof.-4v\,cof.\,t.\frac{dv}{dt}-vu\big((\mu\,cof.\,t+\tfrac{9}{4}$$
$$cof.\,(2p-t)+\tfrac{9}{4}\,cof.\,(2p+t)\big)+vv\big(2\,\mathit{sin}.\,t+\tfrac{9}{4}$$
$$\mathit{sin}.\,(2p-t)+\tfrac{9}{4}\,\mathit{sin}.\,(2p+t)\big).$$

2. $$-\frac{ddy^1}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx^1}{dt}-(\tfrac{3}{2}\,cof.\,2p-3\lambda u)y^1$$
$$-(\tfrac{3}{2}\,\mathit{sin}.\,2p-3\lambda v)x^1-v\big(2\,\mathit{sin}.\,t-\tfrac{9}{4}\mathit{sin}.\,(2p-t)$$
$$-\tfrac{9}{4}\,\mathit{sin}.\,(2p+t)\big)+4v\,cof.\,t.\frac{du}{dt}-vv\big((\mu\,cof.\,t$$
$$-\tfrac{9}{4}\,cof.\,(2p-t)-\tfrac{9}{4}\,cof.\,(2p+t)\big)-vu\,(2\,\mathit{sin}.\,t$$
$$-\tfrac{9}{4}\,\mathit{sin}.\,(2p-t)-\tfrac{9}{4}\,\mathit{sin}.\,(2p+t)\big).$$

$$3.\ -\frac{dd\zeta^{I}}{dt^{2}} - (1+\lambda)z^{I} + 3\lambda u z^{I} + 3\lambda x^{I} w + 3 v w$$
$$cof.\ t = 0,$$

où il eſt à remarquer que

$$m = 12,3688974;\ 2(m+1) = 26,7377948.$$
$$\lambda = 179,2274177\ \&\ \mu = 54,9755896:$$

Or il eſt à peu près $v = 0,0676$.

ARTICLE II.

Détermination des inégalités de cette Claſſe qui affectent le mouvement de la Lune dans l'écliptique.

III.

Je ne conſidérerai donc d'abord que les deux premières équations, mais je ne m'arrêterai pas à la première approximation en poſant $u = 0$ & $v = 0$: je commencerai tout d'un coup par mettre pour u & v leurs valeurs principales qui ſont

$$u = b\ cof.2p + c\ cof.q + d\ cof.(2p-q) + e\ cof.(2p+q)$$
$$v = \mathfrak{C}\ ſin.2p + \gamma\ ſin.q + \mathfrak{d}\ ſin.(2p-q) + \epsilon\ ſin\ (2p+q),$$

de ſorte que

$$b = -0,00718;\ \mathfrak{C} = +0,0102118;\ \gamma = -2,012729.e;$$
$$d = +0,187947\ e;\ \mathfrak{d} = -0,411802\ .\ e;$$
$$e = -0,002705.c;\ \epsilon = -0,003215.c,$$

& où c marque l'excentricité de l'orbite lunaire.

IV.

De-là je tire d'abord pour les quatre derniers termes de la première équation.

Le coefficient de $cos.\ t\ v\left(-\mu-\frac{9}{4}(b-\zeta)\right)=$
$-\ 54,93646\ .\ v.$

Le coefficient de $cos.(2p-t)\ v\left(-\frac{9}{4}-(4m-1)\zeta-\frac{1}{2}\mu b\right)$
$=-\ 2,54826\ .\ v.$

Le coefficient de $cos.\ (2p+t)\ v\left(-\frac{9}{4}-(4m+1)\zeta-\frac{1}{2}\mu b\right)$
$=-\ 2,56809\ .\ v.$

Le coefficient de $cos.\ (q-t)\ v\left(-(2n-1)\gamma-\frac{1}{2}\mu c\right.$
$\left.-\frac{9}{8}(d+e-\delta-\varepsilon)\right)=+\ 23,18529\ .\ vc.$

Le coefficient de $cos.\ (q+t)\ v\left(-(2n+1)\gamma-\frac{1}{2}\mu c\right.$
$\left.-\frac{9}{8}(d+e-\delta-\varepsilon)\right)=+\ 27,21076\ .\ vc.$

Le coefficient de $cos.\ (2p-q-t)\ v\left(-(2(m-n)-1)\delta\right.$
$\left.-\frac{1}{2}\mu d+\frac{9}{8}(\gamma-c)\right)=+\ 0,48915\ .\ vc.$

Le coefficient de $cos.\ (2p-q+t)\ v\left(-(2(2m-n)+1)\delta\right.$
$\left.-\frac{1}{2}\mu d+\frac{9}{8}(\gamma-c)\right)=+\ 1,31275\ .\ vc.$

Le coefficient de $cos.\ (2p+q-t)\ v\left(-(2(2m+n)-1)\varepsilon\right.$
$\left.-\frac{1}{2}\mu e-\frac{9}{8}(c+\gamma)\right)=+\ 1,45475\ .\ vc.$

Le coefficient de $cos.\ (2p+q+t)\ v\left(-(2(2m+n)+1)\varepsilon\right.$
$\left.-\frac{1}{2}\mu e-\frac{9}{8}(c+\gamma)\right)=+\ 1,46119\ .\ vc.$

V.

Enſuite les quatre derniers termes de la ſeconde équation donneront

Le coëfficient de $\mathit{sin.}\ t\ v(-2) = -2v.$

Le coefficient de $\mathit{sin.}\ (2p-t)\ v\left(+\frac{9}{4}-(4m-1)\left(b-\frac{1}{2}\mu\mathfrak{C}\right)\right)$
$= +\ 2{,}31735.v.$

Le coefficient de $\mathit{sin.}\ (2p+t)\ v\left(+\frac{9}{4}-(4m+1)b-\frac{1}{2}\mu\mathfrak{C}\right)$
$= +\ 2{,}33171.v.$

Le coefficient de $\mathit{sin.}\ (q-t)\ v\left(-(2n-1)c-\frac{1}{2}\mu\gamma\right.$
$\left.-\frac{9}{8}(\delta-\varepsilon-d+c)\right) = +\ 30{,}48777.vc.$

Le coefficient de $\mathit{sin.}\ (q+t)\ v\left(-(2n+1)c-\frac{1}{2}\mu\gamma\right.$
$\left.-\frac{9}{8}(\delta-\varepsilon-d+\varepsilon)\right) = +\ 28{,}48777.vc.$

Le coefficient de $\mathit{sin.}\ (2p-q-t)\ v\left(-\left(2(2m-n)-1\right)d\right.$
$\left.-\frac{1}{2}\mu\delta-\frac{9}{8}(\gamma-c)\right) = +\ 10{,}58083.vc.$

Le coefficient de $\mathit{sin.}\ (2p-q+t)\ v\left(-\left(2(2m-n)+1\right)d\right.$
$\left.-\frac{1}{2}\mu\delta-\frac{9}{8}(\gamma-c)\right) = +\ 10{,}20493.vc.$

Le coefficient de $\mathit{sin.}\ (2p+q-t)\ v\left(-\left(2(2m+n)-1\right)e\right.$
$\left.-\frac{1}{2}\mu\varepsilon+\frac{9}{8}(\gamma+c)\right) = -\ 0{,}84811.vc.$

Le coefficient de $\mathit{sin.}\ (2p+q+t)\ v\left(-\left(2(2m+n)+1\right)e\right.$
$\left.-\frac{1}{2}\mu\varepsilon+\frac{9}{8}(\gamma+c)\right) = -\ 0{,}84270.vc.$

VI.

On voit donc par-là qu'il faut donner à x^{I} & y^{I} les valeurs suivantes

$x^{I} = a^{I}\ v\ cos.\ t + b^{I}\ v\ cos.\ (2p-t) + c^{I}\ vc\ cos.\ (q-t)$
$+ d^{I}\ vc\ cos.\ (2p-q-t) + e^{I}\ vc\ cos.\ (2p+q-t)$
$+ b^{II}\ v\ cos.\ (2p+t) + c^{II}\ vc\ cos.\ (q+t) + d^{II}\ vc$
$cos.\ (2p-q+t) + e^{II}_{5}\ vc\ cos.\ (2p+q+t).$

$y^{I} =$

$y^{I} = \alpha^{I} v \sin. t + \mathcal{C}^{I} v \sin. (2p - t) + \gamma^{I} vc \sin. (q - t) + \delta^{I} vc \sin. (2p - q - t) + \epsilon^{I} vc \sin. (2p + q - t) + \beta^{II} v \sin. (2p + t) + \gamma^{II} vc \sin. (q + t) \delta^{II} vc \sin. (2p - q + t) + \epsilon^{II} vc \sin. (2p + q + t).$

VII.

En substituant ces valeurs dans les équations différentio-différentielles pour x^{I} & y^{I}, on obtiendra pour les cinq premier termes de la première équation.

Coefficient de $cos. t\ (1 + 3\lambda) a^{I} v + 2(m + 1)\alpha^{I} v - \frac{1}{2}(6\lambda b - \frac{3}{2})(b^{I} + b^{II})v + \frac{1}{2}(3\lambda\mathcal{C} - \frac{3}{2})(\mathcal{C}^{I} + \mathcal{C}^{II})v.$

Coefficient de $cos. (2p - t)\ ((2m - 1)^{2} + 3\lambda) b^{I} v + 2(m + 1)(2m - 1)\mathcal{C}^{I} v - \frac{1}{2}(6\lambda b - \frac{3}{2})a^{I} v + \frac{1}{2}(3\lambda\mathcal{C} - \frac{3}{2})\alpha^{I} v.$

Coefficient de $cos. (2p + t)\ ((2m + 1)^{2} + 3\lambda) b^{II} v + 2(m+1)(2m+1)\mathcal{C}^{II} v - \frac{1}{2}(6\lambda b - \frac{1}{2})a^{I} v - \frac{1}{2}(3\lambda\mathcal{C} - \frac{3}{2})\alpha^{I} v.$

Coefficient de $cos. (q - t)\ ((n - 1)^{2} + 3\lambda) c^{I} vc + 2(m+1)(n-1)\gamma^{I} vc - \frac{1}{2}(6\lambda b - \frac{3}{2})(d^{II} + e^{I})vc + \frac{1}{2}(3\lambda\mathcal{C} - \frac{3}{2})(\mathcal{A}^{II} + \epsilon^{I})vc - 3\lambda c. a^{I} v + \frac{3}{2}\lambda\gamma. \alpha^{I} v - 3\lambda d. b^{I} v + \frac{3}{2}\lambda\mathcal{A}.\mathcal{C}^{I} v - 3\lambda e. b^{II} v + \frac{3}{2}\lambda\epsilon.\mathcal{C}^{II} v.$

Coefficient de $cos. (q + t)\ ((n + 1)^{2} + 3\lambda) c^{II} vc + 2(m + 1)(n + 1)\gamma^{II} vc - \frac{1}{2}(6\lambda b - \frac{3}{2})(d^{I} + e^{II})vc + \frac{1}{2}(3\lambda\mathcal{C} - \frac{3}{2})(\mathcal{A}^{I} + \epsilon^{II})vc - 3\lambda c. a^{I} v - \frac{3}{2}\lambda\gamma. \alpha^{I} v - 3\lambda d. b^{II} v + \frac{3}{2}\lambda\mathcal{A}. \mathcal{C}^{II} v - 3\lambda e. b^{I} v + \frac{3}{2}\lambda\epsilon. \mathcal{C} v.$

Le coefficient de $cof.(2p-q-t)\left((2m-n-1)^2+3\lambda\right)\alpha^{I}.vc+2(m+1)(2m-n-1)\delta^{I}.vc-\frac{1}{2}(6\lambda b-\frac{3}{2})c^{II}.vc+\frac{1}{2}(3\lambda\mathfrak{C}-\frac{3}{2})\gamma^{II}.vc-3\lambda d.a^{I}v+\frac{3}{2}\lambda\delta.\alpha^{I}v-3\lambda c.b^{I}v+\frac{1}{2}\lambda\gamma.\mathfrak{C}^{I}v$

Coefficient de $cof.(2p-q+t)\left((2m-n+1)^2+3\lambda\right)\alpha^{II}.vc+2(m+1)(2m-n+1)\delta^{II}vc-\frac{1}{2}(6\lambda b-\frac{3}{2})c^{I}.vc+\frac{1}{2}(3\lambda\mathfrak{C}-\frac{3}{2})\gamma^{I}.vc-3\lambda d.a^{I}v-\frac{3}{2}\lambda\delta.a^{I}v-3\lambda c.b^{II}v+\frac{3}{2}\lambda\gamma.\mathfrak{C}^{II}v.$

Coefficient de $cof.(2p+q-t)\left((2m+n-1)^2+3\lambda\right)\epsilon^{I}.vc+2(m+1)(2m+n-1)\varepsilon^{I}.vc-\frac{1}{2}(6\lambda b-\frac{3}{2})c^{I}.vc-\frac{1}{2}(3\lambda\mathfrak{C}-\frac{3}{2})\gamma^{I}.vc-3\lambda e.a^{I}v+\frac{3}{2}\lambda\varepsilon\alpha^{I}v-3\lambda c.b^{I}v-\frac{3}{2}\lambda\gamma.\mathfrak{C}^{I}v$

Coefficient de $cof.(2p+q+t)\left((2m+n+1)^2+3\lambda\right)\epsilon^{II}.vc+2(m+1)(2m+n+1)\varepsilon^{II}.vc-\frac{1}{2}(6\lambda b-\frac{3}{2})c^{II}.vc-\frac{1}{2}(3\lambda\mathfrak{C}-\frac{3}{2})\gamma^{II}.vc-3\lambda e.a^{I}v-\frac{3}{2}\lambda\varepsilon.\alpha^{I}v-3\lambda c.b^{II}v-\frac{3}{2}\lambda\gamma.\mathfrak{C}^{II}v.$

VIII.

Enſuite pour les quatre premiers termes de la ſeconde équation on trouvera

Coefficient de $\mathit{ſin}.t\alpha^{I}.v+2(m+1)a^{I}.v-\frac{1}{2}(3\lambda b-\frac{3}{2})(\mathfrak{C}^{I}-\mathfrak{C}^{II})+\frac{1}{2}(3\lambda\mathfrak{C}-\frac{3}{2})(b^{I}-b^{II}).$

Coefficient de $\mathit{ſin}.(2p-t)(2m-1)^2.\mathfrak{C}^{I}.v+2(m+1)(2m-1)b^{I}.v-\frac{1}{2}(3\lambda b-\frac{3}{2})\alpha^{I}.v+\frac{1}{2}(3\lambda\mathfrak{C}-\frac{3}{2})a^{I}.v.$

Coefficient de $\mathit{ſin}.(2p+t)(2m+1)^2\mathfrak{C}^{II}.v+2(m+1)(2m+1)b^{II}.v+\frac{1}{2}(3\lambda b-\frac{3}{2})\alpha^{I}.v+\frac{1}{2}(3\lambda\mathfrak{C}-\frac{3}{2})a^{I}.v$

Coefficient de $sin.\,(q-t)\,(n-1)^2\,\gamma^{I}.vc + 2(m+1)$
$(n-1)c^{I}.vc - \frac{1}{2}(3\lambda b - \frac{3}{2})\,(\delta^{II} - \varepsilon^{I}).vc$
$+ \frac{1}{2}(3\lambda\mathcal{C} - \frac{3}{2})\,(d^{II} - e^{I}).vc - \frac{3}{2}\lambda c.a^{I}v$
$+ \frac{3}{2}\lambda\gamma.a^{I}v + \frac{3}{2}\lambda d.\mathcal{C}^{I}v - \frac{3}{2}\lambda\delta.b^{I}v - \frac{3}{2}\lambda e.\mathcal{C}^{II}v$
$+ \frac{3}{2}\lambda\varepsilon.b^{II}v.$

Coefficient de $sin.\,(q+t)\,(n+1)^2\,\gamma^{II}.vc + 2(m+1)$
$(n+1)c^{II}.vc - \frac{1}{2}(3\lambda b - \frac{3}{2})\,(\delta^{I} - \varepsilon^{II}).vc$
$+ \frac{1}{2}(3\lambda\mathcal{C} - \frac{3}{2})\,(d^{I} - e^{II}).vc + \frac{3}{2}\lambda c.a^{I}v$
$+ \frac{3}{2}\lambda\gamma.a^{I}v + \frac{3}{2}\lambda d.\mathcal{C}^{II}v - \frac{3}{2}\lambda\delta.b^{II}v - \frac{3}{2}\lambda e\mathcal{C}^{I}v$
$+ \frac{3}{2}\lambda\varepsilon.b^{I}v.$

Coefficient de $sin.\,(2p-q-t)\,(2m-n-1)^2\,\delta^{I}.vc$
$+ 2(m+1)\,(2m-n-1)d^{I}.vc - \frac{1}{2}(3\lambda b - \frac{3}{2})\gamma^{II}.vc$
$+ \frac{1}{2}(3\lambda\mathcal{C} - \frac{3}{2})c^{II}.vc - \frac{3}{2}\lambda d.a^{I}v + \frac{3}{2}\lambda\delta.a^{I}v$
$+ \frac{3}{2}\lambda c.\mathcal{C}^{I}v - \frac{3}{2}\lambda\gamma.b^{I}v.$

Coefficient de $sin.\,(2p-q+t)\,(2m-n+1)^2\,\delta^{II}.vc$
$+ 2(m+1)\,(2m-n+1)d^{II}.vc - \frac{1}{2}(3\lambda b - \frac{3}{2})\gamma^{I}.vc$
$+ \frac{1}{2}(3\lambda\mathcal{C} - \frac{3}{2})c^{I}.vc + \frac{3}{2}\lambda d.a^{I}v + \frac{3}{2}\lambda\delta.a^{I}v$
$+ \frac{3}{2}\lambda c.\mathcal{C}^{II}v - \frac{3}{2}\lambda\gamma.b^{II}v.$

Coefficient de $sin.\,(2p+q-t)\,(2m+n-1)^2\,\varepsilon^{I}.vc$
$+ 2(m+1)\,(2m+n-1)e^{I}.vc + \frac{1}{2}(3\lambda b - \frac{3}{2})\gamma^{I}vc$
$+ \frac{1}{2}(3\lambda\mathcal{C} - \frac{3}{2})c^{I}.vc - \frac{3}{2}\lambda e.a^{I}v + \frac{3}{2}\lambda\varepsilon.a^{I}v + \frac{3}{2}\lambda c.\mathcal{C}^{I}v$
$+ \frac{3}{2}\lambda\gamma.b^{I}v.$

Coefficient de $sin.\,(2p+q+t)\,(2m+n+1)^2\,\varepsilon^{II}.vc$
$+ 2(m+1)\,(2m+n+1)e^{II}.vc + \frac{1}{2}(3\lambda b - \frac{3}{2})\gamma^{II}.vc$
$+ \frac{1}{2}(3\lambda\mathcal{C} - \frac{3}{2})c^{II}.vc + \frac{3}{2}\lambda e.a^{I}v + \frac{3}{2}\lambda\varepsilon.a^{I}v$
$+ \frac{3}{2}\lambda c.\mathcal{C}^{II}v + \frac{3}{2}\lambda\gamma.b^{II}v.$

Où il convient de remarquer que

$\frac{1}{2}(6\lambda b - \frac{3}{2}) = -4,6105$; $\frac{1}{2}(3\lambda b - \frac{3}{2}) = -2,6802$;
$\frac{1}{2}(3\lambda \mathfrak{G} - \frac{3}{2}) = +1,9953$.

$3\lambda b = -3,8605$; $3\lambda c = +537,6882 . c$;

$3\lambda d = +101,0558 . c$; $3\lambda e = -,4544 . c$;

$3\lambda \mathfrak{G} = +5,4907$; $3\lambda \gamma = -1082,2087 . c$;

$3\lambda \delta = -221,4187 . c$; $3\lambda \varepsilon = -1,7286 . c$.

IX.

Détermination des inégalités qui ne dépendent que de la simple excentricité de la Terre. v.

Ces inégalités dépendront des angles t, $2p - t$, & $2p + t$, & seront déterminées par les six équations suivantes :

I. $538,6822 . a^{I} + 26,7378 . \alpha^{I} - 54,93646 + 4,6105 (b^{I} + b^{II}) + 1,9953 (\mathfrak{G}^{I} + \mathfrak{G}^{II}) = 0.$

II. $26,7378 . a^{I} + 1,0000 . \alpha^{I} - 2,00000 + 1,9953 (b^{I} - b^{II}) + 2,6805 (\mathfrak{G}^{I} - \mathfrak{G}^{II}) = 0.$

III. $1101,1651 . b^{I} + 634,6963 . \mathfrak{G}^{I} - 2,54826 + 4,6105 . a^{I} + 1,9953 . \alpha^{I} = 0.$

IV. $634,6963 . b^{I} + 563,4829 . \mathfrak{G}^{I} + 2,31735 + 1,9953 . a^{I} + 2,6805 . \alpha^{I} = 0.$

V. $1200,1163 . b^{II} + 688,1718 . \mathfrak{G}^{II} - 2,56809 + 4,6105 . a^{I} - 1,9953 . \alpha^{I} = 0.$

VI. $688,1718 . b^{II} + 662,4341 . \mathfrak{G}^{II} + 2,33171 + 1,9953 . a^{I}_{1} - 2,6805 . \alpha^{I}_{1} = 0.$

D'où l'on trouvera :

$$a^{I} = +0,00148 ; b^{I} = +0,01868 ;$$
$$b^{II} = +0,00699.$$

$$\alpha^{I} = +2,02314 ; \mathcal{C}^{I} = -0,03476 ;$$
$$\mathcal{C}^{II} = -0,00264.$$

Qu'on ne ſoit point ſurpris de ce que le coefficient α^{I}, qui eſt celui de *ſin.* t, ſoit ici trouvé ſi grand ; par ce que j'ai remarqué au § 26 de la première ſection, il eſt évident que l'inégalité qui dépend de l'angle t, ou bien de l'anomalie du Soleil, doit néceſſairement contenir auſſi l'équation du centre du Soleil, qui eſt, comme on le peut voir par les Tables du Soleil, de 1° 55′ 15″ lorſqu'elle eſt la plus grande.

X.

Détermination des inégalités qui dépendent du produit des deux excentricités de l'orbite de la Terre & de la Lune v c.

Ces inégalités dépendront des angles

$q-t$, $q+t$, $2p-q-t$, $2p-q+t$, $2p+q-t$ & $2p+q+t$, & ſeront déterminées par les douze équations ſuivantes, où j'ai déja pour a^{I}, α^{I}, b^{I}, $\mathcal{C}^{I}$, b^{II}, & $\mathcal{C}^{II}$ ſubſtitué leurs valeurs :

I. $687,8896.c^{I}+327,6961.\gamma^{I}+4,6105\,(d^{II}+e^{I})$
$+1,9953\,(\delta^{II}+\varepsilon^{I})-1070,3727=0.$

II. $327,6961\,.\,c^{I}+150,2074\,.\,\gamma^{I}+1,9953\,(d^{II}_{1}-e^{II})$
$+2,6802\,(\delta^{II}_{II}-\varepsilon^{I})-513,9141=0.$

III. $740,9133 . c^{II} + 381,1716 . \gamma^{II} + 4,6105 (d^{I} + e^{II}) + 1,9953 (\delta^{I} + \varepsilon^{II}) + 1120,7892 = 0.$

IV. $381,1716 . c^{II} + 203,2310 . \gamma^{II} + 1,9953 (d^{I} - e^{II}) + 2,6802 (\delta^{I} - \varepsilon^{II}) + 572,4573 = 0.$

V. $647,5521 . d^{I} + 280,2624 . \delta^{I} + 4,6105 . c^{II} + 1,9953 . \gamma^{II} - 214,8829 = 0.$

VI. $280,2624 . d^{I} + 109,8698 . \delta^{I} + 1,9953 . c^{II} + 2,6802 . \gamma^{II} - 91,0404 = 0.$

VII. $693,4796 . d^{II} + 333,7380 . \delta^{II} + 4,6105 . c^{I} + 1,9953 . \gamma^{I} + 222,8099 = 0.$

VIII. $333,7380 . d^{II} + 155,7974 . \delta^{II} + 1,9953 . c^{I} + 2,6802 . \gamma^{I} + 115,3429 = 0.$

IX. $1906,2157 . e^{I} + 989,1299 . \varepsilon^{I} + 4,6105 . c^{I} - 1,9953 . \gamma^{I} - 29,1470 = 0.$

X. $989,1299 . e^{I} + 1368,5335 . \varepsilon^{I} + 1,9953 . c^{I} - 2,6802 . \gamma^{I} - 36,8205 = 0.$

XI. $2058,1906 . e^{II} + 1042,6055 . \varepsilon^{II} + 4,6105 . c^{II} - 1,9953 . \gamma^{II} - 1,9787 = 0.$

XII. $1042,6055 . e^{II} + 1520,5084 . \varepsilon^{II} + 1,9953 . c^{II} - 2,6802 . \gamma - 12,7796 = 0.$

D'où l'on détermine

$c^{I} = +1,6566$; $c^{II} = -1,7983$; $d^{I} = +0,2302$; $d^{II} = -1,0772$; $e^{I} = -0,0067$; $e^{II} = +0,0045$. $\gamma^{I} = -0,2056$; $\gamma^{II} = +0,5509$; $\delta^{I} = +0,2604$; $\delta^{II} = +1,5491$; $\varepsilon^{I} = +0,0345$; $\varepsilon^{II} = +0,0019$.

XI.

Les inégalités de cette classe se réduiront donc aux formules suivantes :

$$x^{I} = +0{,}00148 \cdot v \cdot cos.\, t + 0{,}01868 \cdot v \cdot cos.\,(2p - t) + 0{,}00699 \cdot v \cdot cos.\,(2p + t) + 1{,}6566 \cdot vc \cdot cos.\,(q - t) - 1{,}7983 \cdot vc \cdot cos.\,(q + t) + 0{,}2302 \cdot vc \cdot cos.\,(2p - q - t) - 1{,}0772 \cdot vc \cdot cos.\,(2p - q + t) - 0{,}0067 \cdot vc \cdot cos.\,(2p + q - t) + 0{,}0045 \cdot vc \cdot cos.\,(2p + q + t).$$

$$y^{I} = +2{,}02314 \cdot v \cdot sin.\, t - 0{,}03476 \cdot sin.\,(2p - t) - 0{,}00264 \cdot v \cdot sin.\,(2p + t) - 0{,}2056 \cdot vc \cdot sin.\,(q - t) + 0{,}5509 \cdot vc \cdot sin.\,(q + t) + 0{,}2604 \cdot vc \cdot sin.\,(2p - q - t) + 1{,}5491 \cdot vc \cdot sin.\,(2p - q + t) + 0{,}0345 \cdot vc \cdot sin.\,(2p + q - t) + 0{,}0019 \cdot vc \cdot sin.\,(2p + q + t).$$

ARTICLE III.

Détermination des inégalités de cette classe, qui affectent la latitude de la Lune.

XII.

Ces inégalités sont contenues dans notre troisième équation :

$$-\frac{dd z^{I}}{dt^{2}} - (1+\lambda) z^{I} + 3\lambda u z^{I} + 3\lambda x^{I} w + 3 v \omega\, cos.\, t = 0;$$

Je me contenterai ici de mettre

$$u = b \cdot cos.\, 2p\,;\; w = \omega\, sin.\, r$$

&

$$x^{I} = a^{I} v \cos. t + b^{I} v \cos. (2p - t) + b^{II} v \cos. (2p + t)$$

de sorte que

$$b = -0,00718 ; b^{I} = +0,01868 ;$$
$$b^{II} = +0,00699 ; a^{I} = +0,00148.$$

De-là les deux derniers termes de notre équation donneront :

$$\tfrac{3}{2}(1+\lambda a^{I}) v\omega . \sin. (r-t) + \tfrac{3}{2}(1+\lambda a^{I}) v\omega . \sin. (r+t)$$
$$- \tfrac{3}{2}\lambda b^{I} v\omega . \sin. (2p - r - t) + \tfrac{3}{2}\lambda b^{I} v\omega .$$
$$\sin. (2p + r - b) - \tfrac{3}{2}\lambda b^{II} v\omega . \sin. (2p - r + t)$$
$$+ \tfrac{3}{2}\lambda b^{II} v\omega . \sin. (2p + r + t).$$

XIII.

Soit donc :

$$z^{I} = A' v\omega \sin. (r - t) + B' v\omega \sin. (r + t)$$
$$+ C' v\omega \sin. (2p - r - t) + D' v\omega \sin. (2p + r - t)$$
$$+ E' v\omega \sin. (2p - r + t) + F' v\omega \sin. (2p + r + t).$$

Et nous obtiendrons les six déterminations suivantes :

I. $((l-1)^2 - \lambda - 1)A' + \tfrac{3}{2}\lambda b(D' - E') + \tfrac{3}{2}(1+\lambda a^{I}) = 0.$

II. $((l+1)^2 - \lambda - 1)B' - \tfrac{3}{2}\lambda b(C' - F') + \tfrac{3}{2}(1+\lambda a^{I}) = 0.$

III. $((2m - l - 1)^2 - \lambda - 1)C' - \tfrac{3}{2}\lambda b . B' - \tfrac{3}{2}\lambda b^{I} = 0.$

IV. $((2m + l - 1)^2 - \lambda - 1)D' + \tfrac{3}{2}\lambda b A' + \tfrac{3}{2}\lambda b^{I} = 0.$

V. $((2m - l + 1)^2 - \lambda - 1)E' - \tfrac{3}{2}\lambda b A' - \tfrac{3}{2}\lambda b^{II} = 0.$

VI. $((2m + l + 1)^2 - \lambda - 1)F' + \tfrac{3}{2}\lambda b B' + \tfrac{3}{2}\lambda b^{II} = 0.$

D'où l'on trouvera :

$$A' = +0,07747 ; B' = -0,06327 ; C' = -0,06967 ;$$
$$D' = +0,00406 ; E' = +0,06055 ; F' = -0,00148.$$

Par

Par conſéquent

$$z^{I} = +0{,}07747 \cdot v\omega \cdot \sin.(r-t) - 0{,}06327 \cdot v\omega \cdot \sin.(r+t) - 0{,}06967 \cdot v\omega \cdot \sin.(2p-r-t) + 0{,}00406 \cdot v\omega \cdot \sin.(2p+r-t) + 0{,}06055 \cdot v\omega \cdot \sin.(2p-r+t) - 0{,}00148 \cdot v\omega \cdot \sin.(2p+r+t).$$

CONCLUSION.

Trouver le lieu de la Lune pour un tems quelconque.

Qu'on cherche pour ce tems propoſé, par les Tables des moyens mouvemens du Soleil & de la Lune.

1. L'Anomalie moyenne du Soleil . . . . . t.
2. L'Élongation moyenne de la Lune à l'oppoſition du Soleil . . . . . p.
3. L'Anomalie moyenne de la Lune . . . . q.
4. L'Argument de latitude de la Lune . . r.

Qu'on en forme les angles ſuivans :

$2p$; $3p$; $4p$; $2p-t$; $2p+t$; $2q$; $3q$; $q-t$; $q+t$; $p-q$; $p+q$; $2p-q$; $2p+q$; $3p-q$; $3p+q$; $4p-q$; $4p+q$; $2p-2q$; $2p+2q$; $2p-q-t$; $2p-q+t$; $2p+q-t$; $2p+q+t$; $2p-r-t$; $2p-r+t$; $2p-r$; $2p+r$; $p-r$; $p+r$; $2p+2r$; $2p-r-t$; $2p-r+t$; $2p+r-t$; $2p+r+t$; $q-r$; $q+r$; $2q-r$; $2q+r$; $2p-q-r$; $2p-q+r$; $2p-2q-r$; $2p-2q+r$; $2p-3q$; $2p+3q$;

Et nous obtiendrons pour nos trois coordonnées X, Y, Z les valeurs ſuivantes :

$$\frac{X}{a} = 1{,}0000240 - 0{,}53931 \cdot cc - 0{,}25012 \cdot \omega\omega$$
$$- 0{,}11411 \cdot a \cdot \cos. p$$
$$- (0{,}0071802 + 0{,}21986 \cdot cc - 0{,}01310 \cdot \omega\omega) \cos. 2p$$
$$+ 0{,}00300 \cdot a \cdot \cos. 3p$$
$$+ 0{,}0000061 \cdot \cos. 4p.$$
$$+ 0{,}00148 \cdot v \cdot \cos. t$$
$$+ 0{,}01868 \cdot v \cdot \cos. (2p - t)$$
$$+ 0{,}00699 \cdot v \cdot \cos. (2p + t)$$
$$+ (1 + 0{,}8899 \cdot cc) c \cdot \cos. q$$
$$+ 0{,}50962 \cdot cc \cdot \cos. 2q$$
$$- 0{,}38322 \cdot c^3 \cdot \cos. 3q$$
$$+ 1{,}6566 \cdot vc \cdot \cos. (q - t)$$
$$- 1{,}7983 \cdot vc \cdot \cos. (q + t)$$
$$+ 0{,}0467 \cdot ac \cdot \cos. (p - q)$$
$$- 0{,}20629 \cdot cc \cdot \cos. (2p - 2q)$$
$$- 0{,}12123 \cdot ac \cdot \cos. (p + q)$$
$$+ 0{,}00468 \cdot cc \cdot \cos. (2p + 2q)$$
$$+ (0{,}187947 - 0{,}5166 \cdot cc) c \cdot \cos. (2p - q)$$
$$- (0{,}002705 + 0{,}2455 \cdot cc) c \cdot \cos. (2p + q)$$
$$+ 0{,}17822 \cdot c^3 \cdot \cos. (2p - 3q)$$
$$+ 0{,}00113 \cdot c^3 \cdot \cos. (2p + 3q)$$
$$+ 0{,}01682 \cdot ac \cdot \cos. (3p - q)$$
$$- 0{,}00012 \cdot ac \cdot \cos. (3p + q)$$
$$- 0{,}000512 \cdot c \cdot \cos. (4p - q)$$

$$- 0{,}000012 . c . \cos.(4p + q)$$
$$+ 0{,}2302 . vc . \cos.(2p - q - t)$$
$$- 1{,}0772 . ac . \cos.(2p - q + t)$$
$$- 0{,}0067 . vc . \cos.(2p + q - t)$$
$$+ 0{,}0045 . vc . \cos.(2p + q + t)$$
$$+ 0{,}24723 . \omega\omega . \cos. 2r$$
$$- 0{,}01330 . \omega\omega . \cos.(2p - 2r)$$
$$+ 0{,}00042 . \omega\omega . \cos.(2p + 2r)$$

$$\frac{r}{a} = + 0{,}24168 . a . \sin. p$$
$$+ (0{,}0102118 + 0{,}09768 . cc - 0{,}01804 . \omega\omega) \sin. 2p$$
$$- 0{,}00287 . a \sin. 3p$$
$$+ 0{,}0000057 . \sin. 4p$$
$$+ 2{,}02314 . v . \sin. t$$
$$- 0{,}03476 . v . \sin.(2p - t)$$
$$- 0{,}00264 . v . \sin.(2p + t)$$
$$- (2{,}012729 + 0{,}4207 . cc) c . \sin. q$$
$$+ 0{,}25237 . cc . \sin. 2q$$
$$- 0{,}2996 . c^3 . \sin. 3q$$
$$- 0{,}2056 . vc . \sin.(q - t)$$
$$+ 0{,}5509 . vc . \sin.(q + t)$$
$$- 2{,}6343 . ac . \sin.(p - q)$$
$$+ 0{,}26228 . cc . \sin.(2p - 2q)$$
$$- 0{,}0554 . ac \sin.(p + q$$

$$+ 0{,}00464 \cdot cc \cdot \sin.(2p + 2q)$$
$$-(0{,}411802 - 1{,}3000 \cdot cc \cdot \sin.(2p - q)$$
$$-(0{,}003215 + 0{,}1960 \cdot cc)c \cdot \sin.(2p+q)$$
$$- 0{,}2850 \cdot c^3 \cdot \sin.(2p - 3q)$$
$$+ 0{,}0007 \cdot c^3 \cdot \sin.(2p + 3q)$$
$$- 0{,}0917 \cdot ac \cdot \sin.(3p - q)$$
$$+ 0{,}0014 \cdot ac \cdot \sin.(3p + q$$
$$- 0{,}000728 \cdot c \cdot \sin.(4p - q)$$
$$- 0{,}000025 \cdot c \cdot \sin.(4p + q)$$
$$+ 0{,}2604 \cdot vc \cdot \sin.(2p - q - t)$$
$$+ 1{,}5491 \cdot vc \cdot \sin.(2p - q + t)$$
$$+ 0{,}0345 \cdot vc \cdot \sin.(2p + q - t)$$
$$+ 0{,}0019 \cdot vc \cdot \sin.(2p + q + t)$$
$$- 0{,}24635 \cdot \omega\omega \cdot \sin. 2r$$
$$+ 0{,}02334 \cdot \omega\omega \cdot \sin.(2p - 2r)$$
$$- 0{,}00039 \cdot \omega\omega \cdot \sin.(2p + 2r)$$

$$\frac{Z}{a} = \omega \sin. r$$
$$+ 0{,}1803 \cdot a\omega \cdot \sin.(p - r)$$
$$+ 0{,}0656 \cdot a\omega \cdot \sin.(p + r)$$
$$+(0{,}036484 + 0{,}3498 \cdot cc)\omega \sin.(2p - r)$$
$$+(0{,}001877 + 0{,}2102 \cdot cc)\omega \sin.(2p + r)$$
$$-1{,}48582 \cdot c\omega \cdot \sin.(q - r)$$
$$-0{,}51163 \cdot c\omega \cdot \sin.(q + r)$$
$$- 0{,}22643 \cdot c\omega \cdot \sin.(2p - q - r)$$

$$- 0{,}12553 \cdot c\omega \cdot \sin.(2p - q + r)$$
$$+ 0{,}1195 \cdot cc\omega \cdot \sin.(2q - r)$$
$$+ 0{,}3850 \cdot cc\omega \cdot \sin.(2q + r)$$
$$+ 0{,}1522 \cdot cc\omega \cdot \sin.(2p - 2q - r)$$
$$- 0{,}0614 \cdot cc\omega \cdot \sin.(2p - 2q + r)$$
$$+ 0{,}07747 \cdot v\omega \cdot \sin.(r - t)$$
$$- 0{,}06327 \cdot v\omega \cdot \sin.(r + t)$$
$$- 0{,}06967 \cdot v\omega \cdot \sin.(2p - r - t)$$
$$+ 0{,}06055 \cdot v\omega \cdot \sin.(2p - r + t)$$
$$+ 0{,}00406 \cdot v\omega \cdot \sin.(2p + r - t)$$
$$- 0{,}00148 \cdot v\omega \cdot \sin.(2p + r + t)$$

où a marque la moyenne distance de la Lune au centre de la Terre dans l'écliptique;

c. L'excentricité de l'orbite de la Lune.

v. L'excentricité de l'orbite du Soleil ou de la Terre.

&

ω. La tangente de la plus grande latitude moyenne de la Lune.

De ces quatre Lettres a, c, ω & v, on ne connoît ici que la seule v, les autres trois doivent être déterminées par la comparaison de ces formules avec les observations; outre cela, cette comparaison fera aussi connoître ce qu'il faudra ajouter aux angles p, q & r; de sorte qu'il y aura en tout six constantes arbitraires à déterminer, ce qui constitue le caractère d'une intégrale complette des trois équations différentielles du second degré.

Or ayant trouvé les valeurs des trois coordonnées, on

en connoîtra par ce que j'ai dit au § 26 & ſuivans de la premiere Section, tout ce qu'il faut pour déterminer le lieu de la Lune.

Il me ſemble avoir pleinement ſatisfait à la Queſtion propoſée par L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES. La nouvelle Théorie de la Lune, que j'ai l'honneur de lui préſenter ici, fixe abſolument toutes les équations de ce Satellite; il n'y en a aucune qui ſoit reſtée incertaine, & maintenant il paroît bien conſtaté, que l'équation ſéculaire du mouvement de la Lune ne ſauroit être produite par les forces de l'attraction.

Errantemque canit Lunam. VIRG.

Cette Pièce eſt de M. EULER.

FIN.

E S S A I

D'UNE NOUVELLE MÉTHODE *POUR RÉSOUDRE LE PROBLÊME* DES TROIS CORPS,

Qui a remporté le Prix de l'Académie Royale des Sciences en 1772.

Par M. DE LA GRANGE.

AVERTISSEMENT.

CES recherches renferment une Méthode pour réſoudre le Problême des trois Corps, différente de toutes celles qui ont été données juſqu'à préſent. Elle conſiſte à n'employer dans la détermination de l'orbite de chaque Corps, d'autres élémens que les diſtances entre les trois Corps c'eſt-à-dire le triangle formé par ces Corps à chaque inſtant. Pour cela, il faut d'abord trouver les équations qui déterminent ces mêmes diſtances par le tems ; enſuite, en ſuppoſant les diſtances connues, il faut en déduire le mouvement relatif des Corps, par rapport à un plan fixe quelconque. On verra dans le premier Chapitre, comment je m'y ſuis pris pour remplir ces deux objets, dont le ſecond ſur-tout demande une Analyſe délicate & aſſez compliquée. A la fin de ce Chapitre, je raſſemble les principales formules que j'ai trouvées, & qui renferment la ſolution du Problême des trois Corps pris dans toute ſa généralité.

Le Chapitre ſecond a pour objet d'examiner comment, & dans quels cas les trois Corps pourroient ſe mouvoir; enſorte que leurs diſtances fuſſent toujours conſtantes, ou gardaſſent au moins entre elles des rapports conſtans : je trouve que ces conditions ne peuvent avoir lieu que dans deux cas; l'un, lorſque les trois Corps ſont rangés dans une même ligne droite, & l'autre, lorſqu'ils forment un triangle équilatéral; alors, chacun des trois Corps décrit autour des deux autres, des cercles ou des ſections coniques, comme s'il n'y avoit que deux Corps. Cette recherche n'eſt à la vérité que de pure curioſité; mais j'ai cru qu'elle ne ſeroit pas déplacée dans un Ouvrage qui roule principalement ſur le Problême des trois Corps, enviſagé dans toute ſon étendue.

Dans le troiſième Chapitre, je ſuppoſe que la diſtance de l'un des trois Corps aux deux autres ſoit fort grande, & j'applique la ſolution générale du Chapitre premier à cette hypothèſe, qui eſt, comme l'on ſçait, celle de la Terre, de la Lune & du Soleil.

Enfin, dans le quatrième Chapitre, je

traite en particulier de la Théorie de la Lune ; j'y donne les formules qui renferment cette Théorie, & je fais voir par un léger eſſai de calcul, comment on doit ſe ſervir de ces formules pour en déduire les inégalités du mouvement de la Lune autour de la Terre.

Le défaut de tems, & d'autres occupations indiſpenſables, ne m'ont pas permis d'entrer là-deſſus dans tout le détail néceſſaire pour répondre d'une manière convenable aux principaux Points de la Queſtion propoſée par l'Académie : auſſi ai-je d'abord héſité ſi je lui préſenterois ces Recherches pour le Concours ; & je ne m'y ſuis déterminé que par l'eſpérance que cette illuſtre Compagnie trouvera peut-être ma Méthode, pour réſoudre le Problême des trois Corps, digne de quelque attention, tant par ſa nouveauté & ſa ſingularité, que par les difficultés conſidérables de calcul qu'elle renferme.

Si l'Académie daigne honorer mon travail de ſon ſuffrage, ce ſera un puiſſant motif pour m'engager à le perfectionner, & je ne déſeſ-

père pas de pouvoir tirer de ma Méthode une Théorie de la Lune auſſi complète qu'on puiſſe le demander, dans l'état d'imperfection où eſt encore l'Analyſe.

ESSAI

SUR

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS.

Juvat integros accedere Fontes.

LUCR.

CHAPITRE PREMIER.

Formules générales pour la ſolution du Problême des trois Corps.

I.

SOIENT A, B, C les maſſes des trois corps qui s'attirent mutuellement en raiſon directe des maſſes, & en raiſon inverſe du quarré des diſtances ; ſoient nommées de plus x, y, z les coordonnées rectangles de l'orbite du corps B

autour du corps A, x^{I}, y^{I}, z^{I} les coordonnées rectangles de l'orbite du corps C autour du même corps A, coordonnées qu'on ſuppoſe toujours paralelles à trois lignes fixes & perpendiculaires entre elles; enfin ſoient r, r^{I}, r^{II}, les diſtances entre les corps A & B, A & C, B & C, enſorte que l'on ait

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2}$$
$$r^{I} = \sqrt{(x^{I_2} + y^{I_2} + z^{I_2})}$$
$$r^{II} = \sqrt{((x^{I} - x)^2 + (y^{I} - y)^2 + (z^{I} - z)^2)}$$

On aura, comme l'on ſait, en prenant l'élément du tems dt conſtant, les ſix équations ſuivantes.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r^{II_3}}\right)x + C\left(\frac{^{I}}{r^{I_3}} - \frac{^{I}}{r^{II_3}}\right)x^{I} = 0\\
&\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r^{II_3}}\right)y + C\left(\frac{^{I}}{r^{I_3}} - \frac{^{I}}{r^{II}}\right)y^{I} = 0\\
&\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r^{II_3}}\right)z + C\left(\frac{^{I}}{r^{I_3}} - \frac{^{I}}{r^{II_3}}\right)z^{I} = 0
\end{aligned}\right\} (A)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x^{I}}{dt^2} + \left(\frac{A+C}{r^{I_3}} + \frac{B}{r^{II_3}}\right)x^{I} + B\left(\frac{^{I}}{r^3} - \frac{^{I}}{r^{II_3}}\right)x = 0\\
&\frac{d^2y^{I}}{dt^2} + \left(\frac{A+C}{r^{I_3}} + \frac{B}{r^{II_3}}\right)y^{I} + B\left(\frac{^{I}}{r^3} - \frac{^{I}}{r^{II_3}}\right)y = 0\\
&\frac{d^2z^{I}}{dt^2} + \left(\frac{A+C}{r^{I_3}} + \frac{B}{r^{II_3}}\right)z^{I} + B\left(\frac{^{I}}{r^3} - \frac{^{I}}{r^{II_3}}\right)z = 0
\end{aligned}\right\} (B)$$

à l'aide deſquelles on pourra déterminer les orbites relatives des corps B & C autour du corps A.

Si on fait encore

$$x^{I} - x = x^{II},\ y^{I} - y = y^{II},\ z^{I} - z = z^{II},$$

enſorte

enſorte que x^{II}, y^{II}, z^{II} ſoient les coordonnées rectangles de l'orbite du corps C autour de B, on aura

$$r^{II} = \sqrt{x^{II2} + y^{II2} + z^{II2}}$$

& retranchant reſpectivement les trois premières équations des trois dernières, on aura ces trois ci :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x^{II}}{dt^2} + \left(\frac{B+C}{r^{II3}} + \frac{A}{r^3}\right)x^{II} + A\left(\frac{1}{r^{II3}} - \frac{1}{r^3}\right)x^{I} = 0\\
&\frac{d^2y^{II}}{dt^2} + \left(\frac{B+C}{r^{II3}} + \frac{A}{r^3}\right)y^{II} + A\left(\frac{1}{r^{II3}} - \frac{1}{r^3}\right)y^{I} = 0\\
&\frac{d^2z^{II}}{dt^2} + \left(\frac{B+C}{r^{II3}} + \frac{A}{r^3}\right)z^{II} + A\left(\frac{1}{r^{II3}} - \frac{1}{r^3}\right)z^{I} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (C)$$

qui exprimeront le mouvement relatif du corps C autour du corps B.

Il eſt bon de remarquer l'analogie qu'il y a entre ces neuf équations (A), (B), (C); c'eſt que les équations (A) ſe changent en les équations (B) en y changeant ſeulement B en C, x en x^{I}, y en y^{I}, z en z^{I}, r en r^{I} & réciproquement; & que de même ces équations ſe changent en les équations (C) en y changeant A en C, x en x^{II}, y en y^{II}, z en z^{II}, r en r^{II} & *vice verſa*; & la même analogie aura lieu dans toutes les formules que nous trouverons par la ſuite.

II.

Qu'on multiplie la première des équations (A) par y & la ſeconde par x, & qu'enſuite on les retranche l'une de l'autre, on aura

$$\frac{yd^2x - xd^2y}{dt^2} + C\left(\frac{1}{r^{I3}} - \frac{1}{r^{II3}}\right)(yx^{I} - xy^{I}) = 0.$$

Combinant de même les deux premières des équations (*B*) & les deux premières des équations (*C*) on aura ces deux ci :

$$\frac{y'd^2x'-x'dy^{2'}}{dt^2}+B\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)(xy'-yx)=0.$$

$$\frac{y''dx^{2''}-x''dy^{2''}}{dt^2}+A\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r^3}\right)x'y''-y'x'')=0.$$

Mais

$x''=x'-x$, $y''=y'-y$; donc $x'y''-y'x''=xy'-yx'$;

donc en ajoutant enſemble les trois équations précédentes, après avoir diviſé la première par C, la ſeconde par B & la troiſième par A, on aura celle-ci :

$$\frac{yd^2x-xd^2y}{Cdt^2}+\frac{y'd^2x'-x'd^2y'}{Bdt^2}+\frac{y''d^2x''-x''d^2y''}{Adt^2}=0.$$

On trouvera de la même manière ces deux autres équations :

$$\frac{zd^2x-xd^2z}{Cdt^2}+\frac{z'd^2x'-x'd^2z'}{Bdt^2}+\frac{z''d^2x''-x''d^2z''}{Adt^2}=0.$$

$$\frac{zd^2y-yd^2z}{Cdt^2}+\frac{z'd^2y'-y'd^2z'}{Bdt^2}+\frac{z''d^2y'-y''d^2y''}{Adt^2}=0.$$

De ſorte qu'on aura en intégrant

$$\left.\begin{aligned}\frac{ydx-xdy}{Cdt}+\frac{y'dx'-x'dy'}{Bdt}+\frac{y''dx'-x''dy''}{Adt}&=a\\ \frac{zdx-xdz}{Cdt}+\frac{z'dx'-x'dz'}{Bdt}+\frac{z''dx''-x''dz''}{Adt}&=b\\ \frac{zdy-ydz}{Cdt}+\frac{z'dy'-y'dz'}{Bdt}+\frac{z''dy''-y''dz''}{Adt}&=c\end{aligned}\right\}(D)$$

a, b, c étant des conſtantes arbitraires.

De plus, si on multiplie la première des équations (A) par $\frac{dx}{C}$, la première des équations (B) par $\frac{dx^{I}}{C}$, & la première des équations (C) par $\frac{dx^{II}}{A}$, & qu'ensuite on les ajoute ensemble, on aura, à cause de $x^{II}=x^{I}-x$,

$$\frac{dxd^2x}{Cdt^2}+\frac{dx^{I}d^2x^{I}}{Bdt^2}+\frac{dx^{II}d^2x^{II}}{Adt^2}+(A+B+C)\left(\frac{xdx}{Cr^3}+\frac{x^{I}dx^{I}}{Br'^3}+\frac{x^{II}dx^{II}}{Ar''^3}\right)=0.$$

On trouvera de même

$$\frac{dyd^2y}{Cdt^2}+\frac{dy^{I}d^2y^{I}}{Bdt^2}+\frac{dy^{II}d^2y^{II}}{Adt^2}+(A+B+C)\left(\frac{ydy}{Cr^3}+\frac{y^{I}dy^{I}}{Br'^3}+\frac{y^{II}dy^{II}}{Ar''^3}\right)=0,$$

$$\frac{dzd\zeta}{Cdt^2}+\frac{dz^{I}d^2z^{I}}{Adt^2}+\frac{dz^{II}d^2z^{II}}{Adt^2}+(A+B+C)\left(\frac{zd\zeta}{Cr^3}+\frac{z^{I}dz^{I}}{Br'^3}+\frac{z^{II}dz^{II}}{Ar''^3}\right)=0.$$

Donc, ajouant ensemble ces trois équations & mettant $r\,dr$ à la place de $x\,dx+y\,dy+z\,dz$, $r^{I}\,dr^{I}$ à la place de $x^{I}\,dx^{I}+y^{I}\,dy^{I}+z^{I}\,dz^{I}$, & $r^{II}\,dr^{II}$ à la place de $x^{II}\,dx^{II}+y^{II}\,dy^{II}+z^{II}\,dz^{II}$, on aura une équation intégrable dont l'intégrale sera

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{Cdt^2}+\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{Bdt^2}+\frac{dx''^2+dy''^2+dz''^2}{Adt^2}-2(A+B+C)\left(\frac{1}{Cr}+\frac{1}{Br'}+\frac{1}{Ar''}\right)=f\ldots(E)$$

f étant une constante arbitraire.

Ce ſont-là les ſeules intégrales exactes qu'on ait pu trouver juſqu'à préſent ; or, comme il y a en tout ſix variables x, y, z, x^{I}, y^{I}, z^{I}, il eſt clair que ſi on pouvoit trouver encore deux autres intégrales, le problème ſeroit réduit aux premières différences ; mais on ne ſauroit guères ſe flatter d'y parvenir dans l'état d'imperfection où eſt encore l'analyſe.

III.

Suppoſons pour abréger

$$u^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

$$u'^2 = \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{dt^2}$$

$$u''^2 = \frac{dx''^2 + dy''^2 + dz''^2}{dt^2}$$

enſorte que u, u^{I} & u^{II} expriment les vitèſſes relatives des corps B autour de A, C autour de B ; il eſt clair qu'on aura :

$$\frac{d^2.r^2}{2dt^2} = \frac{x d^2x + y d^2y + z d^2z}{dt^2} + u^2$$

$$\frac{d^2.r'^2}{2dt^2} = \frac{x^{I} d^2x^{I} + y d^2y^{I} + z^{I} d^2z^{I}}{dt^2} + u'^2$$

$$\frac{d^2.r''^2}{2dt^2} = \frac{x^{II} d^2x^{II} + y^{II} d^2y^{II} + z^{II} d^2z^{II}}{dt^2} + u''^2.$$

Donc mettant dans ces équations au lieu de

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}, \frac{d^2x^{I}}{dt^2}, \text{ \&c.}$$

leurs valeurs tirées des équations (A), (B), (C), & faiſant attention que

$x^2+y^2+z^2=r^2$, $x'^2+y'^2+z'^2=r'^2$, $x''^2+y''^2+z''^2=r''^2$,

$$xx^{I}+yy^{I}+zz^{I}=\frac{r^2+r'^2-r''^2}{2}$$

&

$$x^{I}x^{II}+y^{I}y^{II}+z^{I}z^{II}=x'^2+y'^2+z'^2-x^{I}x-y^{I}y-z^{I}z$$
$$=\frac{r'^2+r''^2-r^2}{2},$$

on aura, après avoir fait passer tous les termes du même côté.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2.r^2}{2dt^2}+\left(\frac{A+B}{r^3}+\frac{C}{r''^3}\right)r^2+\frac{C}{2}\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r''^3}\right)\\
&\qquad\left(r^2+r'^2-r''^2\right)-u^2=0\\
&\frac{d^2.r'^2}{2dt^2}+\left(\frac{A+C}{r'^3}+\frac{B}{r''^3}\right)r'^2+\frac{B}{2}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r''^3}\right)\\
&\qquad\left(r^2+r'^2-r''^2\right)\\
&\frac{d^2.r''^2}{2dt^2}+\left(\frac{B+C}{r''^3}+\frac{A}{r^3}\right)r''^2+\frac{A}{2}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\\
&\qquad\left(r'^2+r''^2-r^2\right)-u''^2=0.
\end{aligned}\right\}(F)$$

Donc, si on peut avoir les valeurs de u^2, u'^2 & u''^2 exprimées en r, r' & r'' seulement, on aura trois équations entre ces trois dernières variables & le tems t, à l'aide desquelles on pourra à chaque instant déterminer la position relative des corps.

IV.

Or, on a, en différentiant les valeurs de u^2, u'^2, & u''^2,

$$u\,du = \frac{dx\,d^2x + dy\,dy' + dz\,dz'}{dt^2}$$

$$u^{I}du^{I} = \frac{dx^{I}d^2x^{I} + dy^{I}d^2y^{I} + dz^{I}d^2z^{I}}{dt^2}$$

$$u^{II}du^{II} = \frac{dx^{II}d^2x^{II} + dy^{II}d^2y^{II} + dz^{II}d^2z^{II}}{dt^2}$$

donc, ſi on fait ici les mêmes ſubſtitutions que ci-deſſus, & qu'on ſuppoſe pour un moment

$$d\gamma = x^{I}dx + y^{I}dy + z^{I}dz$$

$$d\gamma^{I} = zdx^{I} + ydy^{I} + zdz^{I}$$

$$d\gamma^{II} = x^{I}dx^{II} + y^{I}dy^{II} + z^{I}dz^{II},$$

on aura, (à cauſe de

$xdx+ydy+zdz=rdr$, $x^{I}dx^{I}+y^{I}dy^{I}+z^{I}dz^{I}=r^{I}dr^{I}$,

&

$x^{II}dx^{II}+y^{II}dy^{II}+z^{II}dz^{II}=r^{II}dr^{II}$)

$$u\,du = -\left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r'^3}\right) r\,dr - C\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3}\right)d\gamma$$

$$u^{I}du^{I} = -\left(\frac{A+C}{r'^3} + \frac{B}{r''^3}\right) r^{I}dr^{I} - B\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3}\right)d\gamma^{I}$$

$$u^{II}du^{II} = -\left(\frac{B+C}{r''^3} + \frac{A}{r^3}\right) r^{II}dr^{II} - A\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right)d\gamma^{II}.$$

Soit pour abreger

$$dR = \frac{2rdr}{r''^3} + 2\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3}\right)d\gamma$$

$$dR^{I} = \frac{2r^{I}dr^{I}}{r''^3} + 2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)d\gamma^{I}$$

$$dR^{II} = \frac{2r^{II}dr^{II}}{r^3} + 2\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right)d\gamma^{II}$$

& l'on aura

$$u^2 = \frac{2(A+B)}{r} - CR$$

$$u'^2 = \frac{2(A+C)}{r^I} - BR^I$$

$$u''^2 = \frac{2(B+C)}{r^{II}} - AR^{II}$$

de sorte que les équations (F) deviendront

$$(G)\begin{cases} \frac{d^2.r^2}{2dt^2} - \frac{A+B}{r} + C\left(\frac{r^2}{r'^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3}\right)\right. \\ \qquad \left.(r^2+r'^2-r''^2)+R\right)=0 \\ \frac{d^2.r'^2}{2dt^2} - \frac{A+C}{r^I} + B\left(\frac{r'^2}{r'^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3}\right)\right. \\ \qquad \left.(r^2+r'^2-r''^2)+R^I\right)=0 \\ \frac{d^2.r''^2}{2dt^2} - \frac{B+C}{r''} + A\left(\frac{r''^2}{r^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right)\right. \\ \qquad \left.(r'^2+r''^2-r^2)+r^{II}\right)=0 \end{cases}$$

& il ne reſtera plus qu'à trouver les valeurs de

$$d\gamma,\ d\gamma^I \ \&\ d\gamma^{II}.$$

Pour cela je fais

$$d\rho = x^I dx + y^I dy + z^I dz - x dx^I - y dy^I - z dz^I.$$

& comme l'on a

$$xx^I + yy + zz^I = -\frac{r^2 + r'^2 - r''^2}{2},$$

on aura en différentiant

$$x dx^I + y dy^I + z dz^I + x^I dx + y^I dy + z^I dz = r dr + r^I dr^I - r^{II} dr^{II},$$

donc

$$d\gamma = \frac{rdr + r^{I}dr^{I} - r^{II}dr^{II} + d\rho}{2}$$

$$d\gamma^{I} = \frac{rdr + r^{I}dr^{I} - r^{II}dr^{II} - d\rho}{2}$$

& enſuite

$$d\gamma^{II} = r^{I}dr^{I} - d\gamma,$$

ſavoir

$$d\gamma^{II} = \frac{r^{I}dr^{I} + r^{II}dr^{II} - rdr - d\rho}{2}.$$

Tout ſe réduit donc maintenant à avoir la valeur de $d\rho$; pour y parvenir, je différentie, & j'ai

$$d^{2}\rho = x^{I}dx^{2} + y^{I}dy^{2} + z^{I}dz^{2} - xd^{2}x^{I} - yd^{2}y^{I} - zd^{2}z^{I};$$

je ſubſtitue à la place de $d^{2}x$, $d^{2}y$, $d^{2}z$, &c. les valeurs tirées des équations (A) & (B), & faiſant les autres ſubſtitutions convenables, je trouve

$$\frac{d^{2}\rho}{dt^{2}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{A+B}{r^{3}} + \frac{C}{r'^{3}} - \frac{A+C}{r^{3}} - \frac{B}{r^{3}}\right)(r^{2} + r'^{2} - r''^{2}) - C\left(\frac{1}{r^{3}} - \frac{1}{r'^{3}}\right)r'^{2} + B\left(\frac{1}{r^{3}} - \frac{1}{r''^{3}}\right)r^{2};$$

ou bien

$$\frac{2d^{2}\rho}{dt^{2}} + A\left(\frac{1}{r^{3}} - \frac{1}{r'^{3}}\right)(r^{2} + r'^{2} - r''^{2}) + B\left(\frac{1}{r^{3}} - \frac{1}{r''^{3}}\right)(r'^{2} - r^{2} - r''^{2}) + C\left(\frac{1}{r''^{3}} - \frac{1}{r^{3}}\right)(r^{2} - r'^{2} - r''^{2}) = 0.$$

V.

V.

Suppoſons, pour mettre nos formules ſous une forme plus ſimple,

$$\frac{r^2+r^{II2}-r^2}{2}=p \qquad \frac{1}{r^{I3}}-\frac{1}{r^{II3}}=q \qquad \frac{u^{I2}+u^{II2}-u^2}{2}=v$$

$$\frac{r^2+r^{II2}-r^{I2}}{2}=p^I \qquad \frac{1}{r^{I3}}-\frac{1}{r^{II3}}=q^I \qquad \frac{u^2+u^{II2}-u^{I2}}{2}=v^I$$

$$\frac{r^2+r^{I2}-r^{II2}}{2}=p^{II} \qquad \frac{1}{r^{I3}}-\frac{1}{r^3}=q^{II}=q-q^I$$

$$\frac{u^2+u^{I2}-u^{II2}}{2}=v^{II}$$

& l'on aura d'abord, pour la détermination de $d\rho$ cette équation

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}+Cpq-Bp^Iq^I-Ap^{II}q^{II}=0\ldots(A)$$

On aura enſuite

$$dV=\frac{dp^{II}+d\rho}{2},\ dV^I=\frac{dp^{II}-d\rho}{2},\ dV^{II}=\frac{dp-d\rho}{2}$$

d'où

$$dR=\frac{2rdr}{r^{II3}}+q(dp^{II}+d\rho)$$

$$dR^I=\frac{2r^Idr^I}{r^{II3}}+q^I(dp^{II}+d\rho)$$

$$dR^{II}=\frac{2r^{II}dr^{II}}{r^3}+q^{II}(dp-d\rho)$$

Mais

$$\frac{1}{r^{II3}}=\frac{1}{r^3}-q^I \ \&\ 2rdr=dp^I+dp^{II};$$

donc

$$\frac{2rdr}{r^{II}{}_3} = \frac{2dr}{r^2} - q^I(dp^I + dp^{II}) ;$$

on trouvera de même

$$\frac{2r^I dr^I}{r^{II}{}_3} = \frac{2dr^I}{r^I{}_2} - q(dp + dp^{II})$$

&

$$\frac{2r^{II} dr^{II}}{r^3} = \frac{2dr}{r^{II}{}_2} - q^I(dp^I + dp) ;$$

de sorte qu'en substituant ces valeurs, & faisant pour plus de simplicité

$$\left.\begin{aligned} dQ &= q^I dp^I - q^{II} dp^{II} - q d\rho \\ dQ^I &= q dp + q^{II} dp^{II} + q^I d\rho \\ dQ^{II} &= q dp + q^{II} dp^{II} + q^I d\rho \end{aligned}\right\} \ldots (I)$$

on aura

$$R = -\frac{2}{r} - Q , \quad R^I = -\frac{2}{r^I} - Q^I ,$$

$$R^{II} = -\frac{2}{r^{II}{}_2} - Q^{II} ,$$

& de-là

$$\left.\begin{aligned} u^2 &= \frac{2(A+B+C)}{2} + C\,Q \\ u^{I}{}_2 &= \frac{2(A+B+C)}{r^I} + B\,Q^I \\ u^{II}{}_2 &= \frac{2(A+B+C)}{r^{II}{}_2} + A\,Q^{II} \end{aligned}\right\} \ldots (J)$$

Maintenant on aura

$$\frac{r^2}{r^{II}{}_3} = \frac{1}{r} - q^I(p^I + p^{II})$$

&

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^{I}}-\frac{1}{r^{II}}\right)\left(r^{2}+r^{I2}-r^{II2}\right)=qp^{II};$$

donc ajoutant ces deux équations, & mettant q^{II} à la place de $q-q^{I}$, on aura

$$\frac{r^{2}}{r^{II3}}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^{I3}}-\frac{1}{r^{II3}}\right)\left(r^{2}+r^{I2}-r^{II2}\right)$$
$$=\frac{1}{r}-p^{I}q^{I}+p^{II}q^{II};$$

on trouvera de même

$$\frac{r^{I2}}{r^{II3}}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^{3}}-\frac{1}{r^{II3}}\right)\left(r^{2}+r^{I2}-r^{II2}\right)$$
$$=\frac{1}{r^{I}}-pq-p^{II}q^{II},$$

$$\frac{r^{II2}}{r^{3}}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^{I3}}-\frac{1}{r^{3}}\right)\left(r^{I2}+r^{II2}-r^{2}\right)$$
$$=\frac{1}{r^{II}}+p^{I}q^{I}+p^{II}q^{II};$$

donc faiſant toutes ces ſubſtitutions dans les équations (*G*) ou (*F*) des articles précédents, elles deviendront celles-ci,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^{2}.r^{2}}{2dt^{2}}-\frac{A+B+C}{r}-C(p^{I}q^{I}-p^{II}q^{II}+Q)=0\\&\frac{d^{2}.r^{I2}}{2dt^{2}}-\frac{A+B+C}{r}-B(pq+p^{II}q^{II}+Q^{I})=0\\&\frac{d^{2}.r^{II2}}{2dt^{2}}-\frac{A+B+C}{r^{II}}-A(-pq-p^{I}q^{I}+Q^{II})=0\end{aligned}\right\}(K)$$

Ainſi, on pourra, à l'aide de ces trois équations, déterminer les trois rayons r, r^{I} & r^{II} en t, ce qui donnera pour chaque inſtant la poſition relative des Corps entre eux.

Il eſt bon de remarquer que ſi on diviſe la première de ces équations par C ; la ſeconde par B , & la troiſième par A ; & qu'enſuite on les ajoute enſemble, on aura (à cauſe de $dQ + dQ^{I} + dQ^{II} = 0$, & par conſéquent $Q + Q^{I} + Q^{II} =$ *à une conſtante*) celle-ci,

$$\frac{d^2 . r^2}{2Cdt^2} + \frac{d^2 . r^{I2}}{2Bdt^2} + \frac{d^2 . r^{II2}}{2Adt^2} - (A+B+C)\left(\frac{1}{Cr} + \frac{1}{Br^{I}} + \frac{1}{Ar^{II}}\right)$$
$$= \text{à une conſtante} \ldots (L)$$

laquelle pourra tenir lieu d'une quelconque des trois équations (K).

V I.

On peut encore mettre les mêmes équations (K) ſous une autre forme que voici.

Je multiplie la première de ces équation par $d . r^2$ & je l'intégre enſuite pour avoir

$$\frac{(d . r^2)^2}{4dt^2} - 2(A+B+C)r - C\int (p^{I}q^{I} - p^{II}q^{II}) d . r^2$$
$$- C\int Q\, d . r^2 + L = 0,$$

L étant une conſtante arbitraire.

Or, $\int Q\, d . r^2 = Q\, r^2 - \int r^2\, dQ$; mais $dQ = q^{I} dp^{I} - q^{II} dp^{II} - q\, d\rho$; de plus, à cauſe de $r^2 = p^{I} + p^{II}$, on aura $(p^{I}q^{I} - p^{II}q^{II}) d . r^2 - r^2 (q^{I} dp^{I} - q^{II} dp^{II}) = - (p^{I}q - p^{II}q^{II}) (dp^{I} + dp^{II}) + (p^{I} + p^{II}) (q^{I} dp^{I} - q^{II} dp^{II}) = q (p^{II} dp^{I} - p^{I} dp^{II})$; de ſorte que, ſi on fait pour abréger $dP = q (p^{II} dp^{I} - p^{I} dp^{II} - r^2 d\rho)$, on aura, en négligeant la conſtante L qui peut être ſenſée contenue dans P, & diviſant toute l'équation par r^2,

$$\frac{dr^2}{dt^2} - \frac{2(A+B+C}{r} + C\left(\frac{P}{r^2} - Q\right) = 0.$$

Faisant de même

$$dP = q^{\mathrm{I}}(p^{\mathrm{II}}dp - pdp^{\mathrm{II}} + r^{\mathrm{I}2}dp)$$

&

$$dP^{\mathrm{II}} = q^{\mathrm{II}}(pdp^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}dp + r^{\mathrm{II}2}dp),$$

on trouvera par des opérations semblables aux précédentes

$$\frac{dr^{\mathrm{I}2}}{dt^2} - \frac{2(A+B+C)}{r^{\mathrm{I}}} + B\left(\frac{P^{\mathrm{I}}}{r^{\mathrm{I}2}} - Q^{\mathrm{I}}\right) = 0$$

$$\frac{dr^{\mathrm{II}2}}{dt^2} - \frac{2(A+B+C)}{r^{\mathrm{II}}} + A\left(\frac{P^{\mathrm{II}}}{r^{\mathrm{II}2}} - Q^{\mathrm{II}}\right) = 0.$$

Et si on retranche ces équations respectivement des équations (K) trouvées ci-dessus, qu'ensuite on divise les équations restantes par r, r^{I}, r^{II}, on aura ces trois-ci.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r^2} - C\left(\frac{p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{II}}}{r} + \frac{P}{r^2}\right) = 0\\
&\frac{d^2r^{\mathrm{I}}}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r^{\mathrm{I}2}} - B\left(\frac{pq + p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{II}}}{r^{\mathrm{I}}} + \frac{P^{\mathrm{II}}}{r^{\mathrm{II}2}}\right) = 0\\
&\frac{d^2r^{\mathrm{II}}}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r^{\mathrm{II}2}} - A\left(\frac{-pq - p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}}}{r^{\mathrm{II}}} + \frac{P^{\mathrm{II}}}{r^{\mathrm{II}2}}\right) = 0
\end{aligned}\right\} (M)$$

VII.

Nous avons donc réduit les six équations primitives (A), (B) qui renferment la solution du Problème des trois Corps pris dans toute sa généralité à trois autres équations entre les trois distances r, r^{I}, r^{II} & le temps t. Il est vrai que ces réduites renferment chacune deux signes d'intégration (ce qui est évident en substituant les valeurs de Q, Q^{I}, Q^{II}, ou de P, P^{I}, P^{II} & de $d\rho$) & qu'à cet égard elles sont moins simples que les équations primitives;

mais d'un autre côté elles ont l'avantage de ne renfermer aucun radical, ce qui me paroît d'une grande importance dans ces sortes de problêmes.

Supposons donc qu'on ait déterminé par les équations (K) ou (M) les trois variables r, r^{I}, r^{II} en t; on ne connoîtra encore par-là que la position relative des corps, c'est-à-dire le triangle que les trois Corps forment à chaque instant; ainsi il reste à voir comment on pourra déterminer ensuite l'orbite même de chaque corps, c'est-à-dire les six variables x, y, z, x^{I}, y^{I}, & z^{I}.

VIII.

Pour cet effet, nous remarquerons d'abord qu'en connoissant r, r^{I} & r^{II} on connoîtra aussi u, u^{I}, u^{II} & dV, dV^{I}, dV^{II} par les formeles de l'art 5. De sorte qu'on aura (en mettant p^{II} à la place de $\frac{r^2 + r^{I2} - r^{II2}}{2}$ & v^{II} à la place de $\frac{u^2 + u^{I2} - u^{II2}}{2}$) les dix équations suivantes.

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$
$$x^{I2} + y^{I2} + z^{I2} = r^{I2}$$
$$xx^{I} + yy^{I} + zz^{I} = p^{II}$$
$$xdx + ydy + zdz = rdr$$
$$x^{I}dx^{I} + y^{I}dy^{I} + z^{I}dz^{I} = r^{I}dr^{I}$$
$$x^{I}dx + y^{I}dy + z^{I}dz = dV$$
$$xdx^{I} + ydy^{I} + zdz^{I} = dV^{I}$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = u^2dt^2$$
$$dx^{I2} + dy^{I2} + dz^{I2} = u^{I2}dt^2$$
$$dxdx^{I} + dydy^{I} + dzdz^{I} = v^{II}dt^2.$$

Or, en regardant les quantités $x, y, z, x^{I}, y^{I}, z^{I}, dx, dy, dz, dx^{I}, dy^{I}, dz^{I}$, comme autant d'inconnues, il eſt clair que les équations précédentes ne ſuffiſent pas pour les déterminer, puiſqu'on auroit douze inconnues, & ſeulement dix équations; mais ſi on joint à ces équations les trois équations (*D*) de l'art. 2. On aura alors une équation de plus qu'il n'y a d'inconnues; & la difficulté ne conſiſtera qu'à réſoudre ces équations.

IX.

J'obſerve, à l'égard des équations de l'article précédent, qu'elles ne peuvent tenir lieu que de neuf équations, parce qu'en éliminant quelques-unes des inconnues il arrive que les autres s'en vont d'elles-mêmes, de ſorte qu'on tombe par ce moyen dans une équation où il n'entre plus que les quantités connues r^2, r^{I2}, p^{II}, &c. Pour le prouver de la manière la plus ſimple qu'il eſt poſſible, je prends d'abord les trois équations

$$xdx + ydy + zdz = rdr$$
$$x^{I}dx + y^{I}dy + z^{I}dz = dV$$
$$dx^{I}dx + dy^{I}dy + dz^{I}dz = v^{II}dt^{2};$$

& j'en tire par les régles ordinaires de l'élimination, les valeurs de dx, dy, dz; j'aurai en faiſant pour abréger

$$\alpha = y^{I}dz^{I} - z^{I}dy^{I},\quad \alpha^{I} = zdy^{I} - ydz^{I},\quad \alpha^{II} = yz^{I} - y^{I}z,$$
$$\beta = z^{I}dx^{I} - x^{I}dz^{I},\quad \beta^{I} = xdz^{I} - zdx^{I},\quad \beta^{II} = zx^{I} - z^{I}x,$$
$$\gamma = x^{I}dy^{I} - y^{I}dx^{I},\quad \gamma^{I} = ydx^{I} - xdy^{I},\quad \gamma^{II} = xy^{I} - yx^{I},$$
$$\delta = x(y^{I}dz^{I} - z^{I}dy^{I}) - y(x^{I}dz^{I} - z^{I}dx^{I}) + z(x^{I}dy^{I} - ydx^{I}),$$

j'aurai, dis-je

$$dx = \frac{\alpha r dr + \alpha^{I} dy + \alpha^{II} v^{II} dt^2}{\delta}$$

$$dy = \frac{\beta r dr + \beta^{I} dy + \beta^{II} v^{II} dt^2}{\delta}$$

$$dz = \frac{\gamma r dr + \gamma^{I} dy + \gamma^{II} v^{II} dt^2}{\delta}$$

Or, je remarque que l'on a

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(x^{I2}+y^{I2}+z^{I2})(dx^{I2}+dy^{I2}+dz^{I2}) -(x^I dx^I+y^I dy^I+z^I dz^I)^2=r^{I2}v^{I2}dt^2-(r^I dr^I)^2,$$

$$\alpha^{I2}+\beta^{I2}+\gamma^{I2}=(x^2+y^2+z^2)(dx^{I2}+dy^{I2}+dz^{I2}) -(x dx^I+y dy^I+z dz^I)^2=r^2 v^{I2}dt^2-dV^{I2},$$

$$\alpha^{II2}+\beta^{II2}+\gamma^{II2}=(x^2+y^2+z^2)(x^{I2}+y^{I2}+z^{I2}) -(xx^I+yy^I+zz^I)^2=r^2 r^{I2}-p^{II2},$$

$$\alpha\alpha^I+\beta\beta^I+\gamma\gamma^I=(x^I dx^I+y^I dy^I+z^I dz)(x dx^I+y dy^I+z dz^I)-(xx^I+yy^I+zz^I)(dx^{I2}+dy^{I2}+dz^{I2})=r^I dr^I dV^I-p^{II}v^{I2}dt^2,$$

$$\alpha\alpha^{II}+\beta\beta^{II}+\gamma\gamma^{II}=(x^I dx^I+y^I dy^I+z^I dz^I)(xx^I+yy^I+zz^I)-(x dx^I+y dy^I+z dz^I)(x^{I2}+y^{I2}+z^{I2})=p^{II}r^I dr^I-r^{I2}dV^I,$$

$$\alpha^I\alpha^{II}+\beta^I\beta^{II}+\gamma^I\gamma^{II}=(x dx^I+y dy^I+z dz^I)(xx^I+yy^I+zz^I)-(x^I dx^I+y^I dy^I+z dz)(x^2+y^2+z^2)=p^{II}dV^I-r^2 r^I dr^I;$$

de sorte que si on carre les trois équations précédentes, & qu'on les ajoute ensuite ensemble, on aura, après avoir multiplié par δ^2, & fait les substitutions convenables,

δ^2

$$\begin{aligned}\delta^2(dx^2+dy^2+dz^2) &= (rdr)^2(r^{I2}u^{I}dt^2 - r^{I2}dr^{I2})\\ &+ dV^2(r^2u^{I2}dt^2 - dV^{I2}) + (v^{II}dt^2)(r^2r^{I2}_{,} - p^{II2}_{,})\\ &+ 2rdrdV(r^{I}dr^{I}dV^{I} - p^{II}u^{I2}dt^2)\\ &+ 2rdrv^{II}dt^2(p^{II}r^{I}dr^{I} - r^{I2}dV^{I})\\ &+ 2dVv^{II}dt^2(p^{II}dv^{I} - r^2r^{I}dr^{I}).\end{aligned}$$

De même si on prend les trois équations

$$\begin{aligned}&xx + yy + zz = r^2\\ &x^{I}x + y^{I}y + z^{I}z - p^{II}\\ &xdx^{I} + ydy^{I} + zdz^{I} = dV^{I},\end{aligned}$$

& qu'on en tire les valeurs de x, y & z, il est facile de voir qu'on aura pour x, y & z les mêmes expressions que l'on a trouvées plus haut pour dx, dy & dz, en y changeant seulement rdr en r^2, dV en p^{II} & $v^{II}dt^2$ en dV^{I}; donc faisant les mêmes opérations & les mêmes substitutions que ci-dessus, on aura cette autre équation

$$\begin{aligned}\delta^2(x^2+y^2+z^2) &= r^4\left(r^{I2}u^{I2}dt^2 - (r^{I}dr^{I})^2\right)\\ &+ p^{II2}(r^2u^{I2}dt^2 - dV^{I2}) + dV^{I2}(r^2r^{I2}_{,} - p^{II2}_{,})\\ &+ 2r^2p^{II}(r^{I}dr^{I}dV^{I} - p^{II}u^{I2}dt^2)\\ &+ 2r^2dV^{I}(p^{II}r^{I}dr^{I} - r^{I2}dV^{I})\\ &2p^{II}dV^{I}(p^{II}dV^{I} - r^2r^{I}dr^{I}).\end{aligned}$$

Or on a $dx^2 + dy^2 + dz^2 = u^2dt^2$,
& $x^2+y^2+z^2=r^2$; donc on aura les deux équations suivantes.

$$\begin{aligned}\delta^2u^2dt^2 &= (rdr)^2(r^{I2}u^{I2}dt^2 - r^{I2}dr^{I2})\\ &+ dV^2(r^2u^{I2}dt^2 - dV^{I2})\\ &+ (vdt^2)^2(r^2r^{I2} - p^{II2})\end{aligned}$$

$$+ 2rdrdV(r^{I}dr^{I}dV^{I} - p^{II}u^{I2}dt^{2})$$
$$+ 2rdrv^{II}dt^{2}(p^{II}r^{I}dr^{I} - r^{I2}dV^{I})$$
$$+ 2dVv^{II}dt^{2}(p^{II}dV^{I} - r^{2}r^{I}dr^{I}),$$

$$\delta^{2}r^{2} = r^{4}(r^{I2}u^{I2}dt^{2} - r^{I2}dr^{I2})$$
$$+ p^{II2}(r^{2}u^{I2}dt^{2} - dV^{I2})$$
$$+ dV^{I}(r^{2}r^{I2} - p^{II2})$$
$$+ 2r^{2}p^{II}(r^{I}dr^{I}dV^{I} - p^{II}u^{I2}dt^{2})$$
$$+ 2r^{2}dV^{I}(p^{II}r^{I}dr^{I} - r^{I2}dV^{I})$$
$$+ 2p^{II}dV^{I}(p^{II}dV^{I} - r^{2}r^{I}dr^{I}).$$

D'où, chaſſant δ^{2}, on aura une équation entre les ſeules quantités connues r^{2}, r^{I2}, &c.

X.

Si on tire de la dernière équation la valeur de δ^{2}, on aura, en réduiſant & effaçant ce qui ſe détruit

$$\delta^{2} = r^{I2}(r^{2}u^{I2}dt^{2} - r^{2}dr^{I2} - dV^{I2})$$
$$+ 2p^{II}r^{I}dr^{I}dV^{I} - p^{II2}u^{I2}dt^{2}.$$

Et cette valeur de δ^{2} étant ſubſtituée dans l'autre équation, on aura :

$$r^{II}(r^{2}u^{I2}dt^{2} - r^{2}dr^{I2} - dV^{I2})u^{2}dt^{2}$$
$$+ (2p^{II}r^{I}dr^{I}dV^{I} - p^{II2}u^{I2}dt^{2})u^{2}dt^{2}$$
$$= (rdr)^{2}(r^{I2}u^{I2}dt^{2} - r^{I2}dr^{I2})$$
$$+ dV^{2}(r^{2}u^{I2}dt^{2} - dV^{I2})$$
$$+ (v^{II}dt^{2})^{2}(r^{2}r^{I2} - p^{II2})$$
$$+ 2rdrdV(r^{I}dr^{I}dV^{I} - p^{II}u^{I2}dt^{2})$$
$$+ 2rdrv^{II}dt^{2}(p^{II}r^{I}dr^{I} - r^{I2}dV^{I})$$
$$+ 2dVv^{II}dt^{2}(p^{II}dV^{I} - r^{2}r^{I}dr^{I});$$

ou bien, en ordonnant les termes,

$$(r^2r^{I2} - p^{II2})(u^2u^{I2} - v^{II2})\,dt^4$$
$$+ (rdr \cdot r^I dr^I - dV\,dV^I)^2$$
$$-(r^2(r^I dr^I)^2 - 2p^{II}r^I dr^I dV^I + r^I dV^{I2})u^2\,dt^2$$
$$-2(p^{II}(rdr.r^I dr^I + dV\,dV^I) - r^2r^I dV - r^{I2}rdrdV^I)v^{II}\times dt^2 = 0.$$

Or $dV = \frac{dp^{II}+dp}{2}$, & $dV^I = \frac{dp^{II}-dp}{2}$ (art. 5),

de plus on a, par les formules du même article,

$$r^2 = p^I + p^I + p^{II},\ r^{I2} = p + p^{II},\ r^{II} = p + p^I,$$

& de même

$$u^2 = v^I + v^{II},\ u^{I2} = v + v^{II},\ u^{II2} = v + v^I;$$

donc si on fait ces substitutions, & qu'on suppose pour plus de simplicité

$$M = p\left(\frac{2rdr}{dt}\right)^2 + p^I\left(\frac{dp^{II}}{dt}\right)^2 + p^{II}\left(\frac{dp^I}{dt}\right)^2$$
$$- 2\left(p^{II}\frac{dp^I}{dt} - p^I\frac{dp^{II}}{dt}\right)\frac{dp}{dt} + r^2\left(\frac{dp}{dt}\right)^2,$$

$$M^I = p^I\left(\frac{2r^I dr^I}{dt}\right)^2 + p\left(\frac{dp^{II}}{dt}\right)^2 + p^{II}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2$$
$$+ 2\left(p^{II}\frac{dp}{dt} - p\frac{dp^{II}}{dt}\right)\frac{dp}{dt} + r^{I2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2,$$

$$M^{II} = p^{II}\left(\frac{2r^{II}dr^{II}}{dt}\right)^2 + p^I\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + p\left(\frac{dp^I}{dt}\right)^2$$
$$+ 2\left(p\frac{dp^I}{dt} - p^I\frac{dp}{dt}\right)\frac{dp}{dt} + r^{II2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2,$$

l'équation suivante deviendra, après avoir été multipliée

par $\frac{16}{dt^4}$,

$$16(pp^{I}+pp^{II}+p^{I}p^{II})(vv^{I}+vv^{II}+v^{I}v^{II})$$
$$-4(\Sigma v+\Sigma^{I}v^{I}+\Sigma^{II}v^{II})$$
$$+\left(\frac{dpdp^{I}+dpdp^{II}+dp^{I}dp^{II}+dp^{2}}{dt^{2}}\right)^{2}=0\ldots(N).$$

Il faut donc que cette équation ait lieu en même-tems que les trois équations (K) de l'art. 5 ; de sorte que, comme elle ne contient d'ailleurs que les mêmes variables que les équations (K), & qu'elle eſt d'un ordre moins élevé d'une unité que celle-ci, on pourra la regarder comme une intégrale de ces mêmes équations (K), mais intègrale particulière à cauſe qu'elle ne renferme aucune nouvelle conſtante ; ainſi, ſi on intègre les équations (K) en y ajoutant les conſtantes néceſſaires, ces conſtantes devront être telles qu'elles ſatisfaſſent à l'équation (N). De ſorte que, ſi on ne veut pas ſe ſervir de cette dernière équation à la place de l'une des équations (K), il faudra néanmoins y avoir égard dans la détermination des conſtantes ; mais pour cela il ſuffira d'y ſuppoſer partout $t=0$.

Au reſte, nous ferons toujours uſage de cette équation pour déterminer la conſtante qui doit entrer dans la valeur de $\frac{dp}{dt}$ réſultante de l'intègration de l'équation (H) de l'art. 5.

XI.

Reprenons maintenant les équations (*D*) de l'art. 2, & faisant pour abreger

$$\lambda = y\,dx - x\,dy,\quad \lambda^{I} = y^{I}dx^{I} - x^{I}dy^{I},\quad \lambda^{II} = y^{II}dx^{II} - x^{II}dy^{II}$$

$$\mu = z\,dx - x\,dz,\quad \mu^{I} = z^{I}dx^{I} - x^{I}dz^{I},\quad \mu^{II} = z^{II}dx^{II} - x^{II}dz^{II}$$

$$\nu = z\,dy - y\,dz,\quad \nu^{I} = z^{I}dy^{I} - y^{I}dz^{I},\quad \nu^{II} = z^{II}dy^{II} - y^{II}dz^{II},$$

on aura, après avoir multiplié par dt,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda}{C} + \frac{\lambda^{I}}{B} + \frac{\lambda^{II}}{A} &= a\,dt \\ \frac{\mu}{C} + \frac{\mu^{I}}{B} + \frac{\mu^{II}}{A} &= b\,dt \\ \frac{\nu}{C} + \frac{\nu^{I}}{B} + \frac{\nu^{II}}{A} &= c\,dt \end{aligned}\right\} \ldots (O)$$

Or je trouve, comme plus haut,

$$\lambda^{2} + \mu^{2} + \nu^{2} = (x^{2} + y^{2} + z^{2})(dx^{2} + dy^{2} + dz^{2}) - (x\,dx + y\,dy + z\,dz)^{2} = r^{2}u^{2}dt^{2} - (r\,dr)^{2},$$

& par analogie

$$\lambda^{I2} + \mu^{I2} + \nu^{I2} = r^{I2}u^{I2}dt^{2} - (r^{I}dr^{I})^{2},$$

$$\lambda^{II2} + \mu^{II2} + \nu^{II2} = r^{II2}u^{II2}dt^{2} - (r^{II}dr^{II})^{2},$$

je trouve de même

$$\lambda\lambda^{I}+\mu\mu^{I}+\nu\nu^{I}=(xx^{I}+yy^{I}+zz^{I})(dxdx^{I}+dydy^{I}+dzdz^{I})$$
$$-(x^{I}dx+y^{I}dy+z^{I}dz)(xdx^{I}+ydy^{I}+zdz^{I})$$
$$=p^{II}v^{II}dt^{2}-dVdV^{I}=p^{II}v^{II}dt^{2}-\left(\frac{dp^{II}}{2}\right)^{2}+\left(\frac{dp}{2}\right)^{2},$$

& par analogie

$$\lambda\lambda^{II}+\mu\mu^{II}+\nu\nu^{II}=p^{I}v^{I}dt^{2}-\left(\frac{dp^{I}}{2}\right)^{2}+\left(\frac{dp}{2}\right)^{2},$$

$$\lambda^{I}\lambda^{II}+\mu^{I}\mu^{II}+\nu^{I}\nu^{II}=pvdt^{2}-\left(\frac{dp}{2}\right)^{2}+\left(\frac{dp}{2}\right)^{2}.$$

Donc ſi on fait pour plus de ſimplicité

$$\Pi=r^{2}u^{2}-\left(\frac{rdr}{dt}\right)^{2}$$

$$\Pi^{I}=r^{I2}u^{I2}-\left(\frac{r^{I}dr^{I}}{dt}\right)^{2}$$

$$\Pi^{II}=r^{II2}u^{II2}-\left(\frac{r^{II}dr^{II}}{dt}\right)^{2}$$

&

$$\Psi=p\,v-\left(\frac{dp}{2dt}\right)^{2}+\left(\frac{d\rho}{2dt}\right)^{2}$$

$$\Psi^{I}=p^{I}v^{I}-\left(\frac{dp^{I}}{2dt}\right)^{2}+\left(\frac{d\rho}{2dt}\right)^{2}$$

$$\Psi^{II}=p^{II}v^{II}-\left(\frac{dp^{II}}{2dt}\right)^{2}+\left(\frac{d\rho}{2dt}\right)^{2},$$

enſorte que l'on ait

$$\lambda^{2}+\mu^{2}+\nu^{2}=\Pi dt^{2},\ \lambda^{I2}+\mu^{I2}+\nu^{I2}=\Pi^{I}dt^{2}$$
$$\lambda^{II2}+\mu^{II2}+\nu^{II2}=\Pi^{II}dt^{2},\ \lambda^{I}\lambda^{II}+\mu^{I}\mu^{II}+\nu^{I}\nu^{II}=\Psi dt^{2}$$
$$\lambda\lambda^{II}+\mu\mu^{II}+\nu\nu^{II}=\Psi^{I}dt^{2},\ \lambda\lambda^{I}+\mu\mu^{I}+\nu\nu^{I}=\Psi^{II}dt^{2},$$

on aura, en carrant les trois équations (*O*) & les ajoutant enſemble,

$$\frac{\Pi}{C^2} + \frac{\Pi^{I}}{B^2} + \frac{\Pi^{II}}{A^2} + \frac{2\Psi}{AB} + \frac{2\Psi^{I}}{AC} + \frac{2\Psi^{II}}{BC}$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 \ldots (P).$$

Equation qui eſt auſſi comme l'on voit d'un ordre moins élevé d'une unité que les équations (*K*); & comme elle renferme la conſtante arbitraire $a^2 + b^2 + c^2$ qui ne ſe trouve point dans les équations (*K*), on peut la regarder comme une intégrale complette de ces mêmes équations.

XII.

On pourroit croire que l'équation (*E*) que nous avons trouvée dans l'art. 2 pourroit ainſi, en y ſubſtituant les valeurs de u, u^{I} & u^{II}, donner une nouvelle intégrale; mais il eſt facile de voir qu'il n'en réſulteroit qu'une équation identique, car l'équation dont il s'agit, ſe réduit d'abord à

$$\frac{u^2}{C} + \frac{u^{I2}}{B} + \frac{u^{II2}}{A} - 2(A+B+C)\left(\frac{1}{C^I} + \frac{1}{B^I} + \frac{1}{A^{II}}\right) = f;$$

& mettant pour u, u^{I} & u^{II} leurs valeurs tirées des formules (*J*), on aura, en rejettant ce qui ſe détruit

$$Q + Q^{I} + Q^{II} = -f$$

ce qui ne renferme aucune nouvelle condition, car les quantités Q, Q^{I}, Q^{II} ſont déja d'elles-mêmes telles que $dQ+dQ^{I}+dQ^{II}=0$ (art. 5).

Au reſte, ſi on combine l'équation $Q + Q^{I} + Q^{II} = -f$ avec les équations (*N*) & (*P*) après y avoir ſubſtitué les

valeurs de u, u^{I} & u^{II}, on pourra par le moyen de ces trois équations, déterminer les trois quantités Q, Q^{I} & Q^{II}, lesquelles ne renfermeront par conséquent que les variables finies r, r^{I}, r^{II} & leurs différentielles première dr, dr^{I}, dr^{II} avec la quantité $\frac{d\rho}{dt}$; ainsi substituant ces valeurs dans les équations (K), on aura trois équations du second ordre entre les variables r, r^{I} & r^{II}, dans lesquelles il n'y aura plus qu'à substituer la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$. Donc, si à l'aide d'une de ces équations on élimine la quantité $\frac{d\rho}{dt}$ des deux autres, on aura d'abord deux équations purement du second ordre entre les variables r, r & r^{II}, t; ensuite si on différentie la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$, & qu'on mette la valeur de $\frac{d\rho^{2}}{dt^{2}}$ dans l'équation (H), on aura une troisième équation entre les mêmes variables, qui ne sera que du troisième ordre. De sorte que l'on aura, par ce moyen, pour la détermination des variables r, r^{I}, & r^{II} deux équations différentielles du second ordre & une troisième; & ces équations suffiront, comme on le verra dans un moment pour la solution complette du Problème des trois Corps.

Nous croyons cependant qu'il est encore plus simple & plus commode pour le calcul, de substituer dans les équations (K) les valeurs de Q, Q^{I} & Q^{II} tirées des équations (J); car quoique les équations résultantes puissent monter

à

à des ordres plus élevés que le ſecond, elles auront toujours ce grand avantage que les variables s'y trouveront peu mêlées entr'elles, & que l'analogie qui y regne facilitera beaucoup leur réſolution.

XIII.

Des dix équations de l'art. 8 il n'en reſte donc plus que neuf, & des trois équations (*D*) ou (*O*) de l'art. 11 il n'en reſte plus que deux; de ſorte qu'on n'aura en tout que onze équations pour la détermination des ſix variables $x, y, z, x^{I}, y^{I}, z^{I}$ & de leurs différentielles dx, dy, &c. d'où l'on voit qu'il eſt impoſſible de déterminer ces variables directement & par les ſeules opérations de l'algèbre; mais on pourra en venir à bout au moyen d'une intégration, comme on va le voir.

Je ſuppoſe que l'on veuille connoître les valeurs de x, y, z on aura d'abord l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \ldots \quad (Q).$$

Enſuite, multipliant les trois équations (*O*) de l'art. 11 reſpectivement par λ, μ, ν, & les ajoutant enſemble, on aura

$$\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{C} + \frac{\lambda\lambda^{I}+\mu\mu^{I}+\nu\nu^{I}}{B} + \frac{\lambda\lambda^{II}+\mu\mu^{II}+\nu\nu^{II}}{A}$$
$$= (a\lambda + b\mu + c\nu)dt;$$

ou bien en faiſant les ſubſtitutions du même article

$$\left(\frac{\Pi}{C} + \frac{\Psi^{I}}{A} + \frac{\Psi^{II}}{B}\right)dt = a(y\,dx - x\,dy)$$
$$+ b(z\,dx - x\,dz) + c(z\,dy - y\,dz) \quad \ldots \quad (R).$$

Enfin, multipliant les mêmes équations (O) reſpectivement par ζ, $-y$, $-x$, & les ajoutant enſemble, on aura

$$\frac{\lambda\zeta - \mu y + \nu x}{C} + \frac{\lambda^{I}\zeta - \mu^{I}y + \nu^{I}x}{B} + \frac{\lambda^{II}\zeta - \mu^{II}y + \nu^{II}x}{A} = (a\zeta - by + cx)dt.$$

Or il eſt aiſé de voir que l'on a $\lambda\zeta - \mu y + \nu x = 0$, & que $-\lambda^{I}\zeta + \mu^{I}y - \nu^{I}x$ eſt la même quantité que nous avons déſignée plus haut par δ (art. 9), donc puiſqu'on a déja trouvé (art. 10)

$$\delta\zeta^{2} = (r^{2}r^{I2} - p^{II2})u^{I2}dt^{2} - r^{2}r^{I2}dr^{I2} + 2p^{II}r^{I}dr^{I}dV^{I} - r^{I2}dV^{I2},$$

on aura, en faiſant les ſubſtitutions du même art. 10,

$$(\lambda^{I}\zeta - \mu^{I}y + \nu^{I}x)^{2} = \left((pp^{I} + pp^{II} + p^{I}p^{II})u^{I2} - \frac{\Sigma^{I}}{4}\right)dt^{2}$$

& par analogie

$$(\lambda^{II}\zeta - \mu^{II}y + \nu^{II}x)^{2} = \left((pp^{I} + pp^{II} + p^{I}p^{II})u^{II2} - \frac{\Sigma^{II}}{4}\right)dt^{2}$$

De ſorte que l'équation ci-deſſus deviendra

$$\frac{\frac{1}{2}\nu(4pp^{I} + pp^{II} + p^{I}p^{II})u^{I2} - \Sigma^{I}}{B} + \frac{\frac{1}{2}\nu(4(pp^{I} + pp^{II} + p^{I}p^{II})u^{II2} - \Sigma^{II})}{A} = a\zeta - by + cx \quad \ldots\ldots (S)$$

Ainſi on aura trois équations (Q), (R) & (S) à l'aide deſquelles on pourra déterminer facilement les valeurs de x, y, ζ, dès qu'on connoîtra celles de r, r^{I}, & ν^{II}.

On peut trouver de ſemblables formules pour la détermination de x^{I}, y^{I}, ζ^{I}; & même ſans faire un nouveau

calcul, il suffira de changer dans les précédentes B en C, & C en B, d'accentuer les lettres qui n'ont point d'accent, & d'effacer l'accent de celles qui en ont un, sans toucher à celles qui ont deux accents. Il faut seulement observer que la quantité dp ne change point de valeur, mais seulement de signe lorsqu'on change entr'elles les masses A, B, C & les lettres accentuées, ce qui se voit clairement par l'équation (H) de l'art. 5.

XIV.

Supposons pour abréger

$$T = \frac{\Pi}{C} + \frac{\Psi'}{A} + \frac{\Psi''}{B},$$

$$Z = \frac{\nu\left(4\left(pp' + pp'' + p'p''\right)u''^2 - \Sigma''\right)}{2B} + \frac{\nu\left(4\left(pp' + pp'' + p'p''\right)u'^2 - \Sigma'\right)}{2A}$$

& l'on aura ces trois équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$az - by + cx = Z$$

$$a(ydx - xdy) + b(zdx - xdz) + c(zdy - ydz) (= Tdt.$$

Comme les constantes a, b, c sont arbitraires (art. 2), & ne dépendent que de la position du plan de projection des orbites des corps B & C autour du corps A, il est facile de voir qu'on peut prendre ce plan de manière que l'on ait $b = 0$ & $c = 0$; car pour cela il suffira qu'on ait $b = 0$ & $c = 0$ au commencement du mouvement, c'est-à-dire lorsque $t = 0$.

Suppoſant donc $b = 0$ & $c = 0$, on aura $az = Z$; & $a(ydx - xdy) = Tdt$; donc $z = \frac{Z}{a}$, & à cauſe de $x^2 + z^2 + z^2 = r^2$, on aura $x^2 + y^2 = r^2 - \frac{Z^2}{a^2}$; donc $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \frac{aTdt}{a^2r^2 - Z^2}$;

de ſorte qu'en faiſant $d\varphi = \frac{aTdt}{a^2r^2 - Z^2}$,

on aura $\frac{y}{z} = tang.\,\varphi$, & de-là

$$z = \frac{Z}{a}$$

$$y = \sqrt{\left(r^2 - \frac{Z^2}{a^2}\right)}\, sin.\,\varphi.$$

$$x = \sqrt{\left(r^2 - \frac{Z^2}{a^2}\right)}\, cor.\,\varphi.$$

XV.

Mais ſi on ne veut pas s'aſtreindre à la ſuppoſition de b & $c = 0$, ce qui oblige de prendre le plan de projection d'une manière déterminée : voici comment on pourra déterminer les quantités a, y & z avec toute la généralité poſſible.

Soit

$$lz - my + nx = X$$

$$\lambda z - \mu y + \nu x = Y$$

l, m, n, λ, μ, ν étant des coefficiens indéterminés; & X, Y deux nouvelles variables; on aura

$$YdX-XdY=(m\nu-n\mu)\,(ydx-xdy)$$
$$+(n\lambda-l\nu)\,(zdx-xdz)+(l\mu-m\lambda)\,(zdy-ydz),$$

donc faiſant

$$m\nu-n\mu=ka$$
$$n\lambda-l\nu=kb$$
$$l\mu-m\lambda=kc,$$

on aura l'équation (art. 14.)

$$YdX-XdY=kTdt.$$

Suppoſons maintenant que l'on ait $f(X^2+Y^2)+gZ^2=x^2+y^2+z^2$, ſubſtituant les valeurs de X, Y & Z en x, y & z, & comparant enſuite les termes qui contiennent les mêmes puiſſances de x, y & z, on aura ces ſix équations.

$$f(l^2+\lambda^2)+ga^2=1$$
$$f(m^2+\mu^2)+gb^2=1$$
$$f(n^2+\nu^2)+gc^2=1$$
$$f(lm+\lambda\mu)+gab=0$$
$$f(ln+\lambda\nu)+gac=0$$
$$f(mn+\mu\nu)+gbc=0,$$

leſquelles étant combinées avec les trois précédentes ſerviront à déterminer les neuf inconnues l, m, n, λ, μ, ν, f, g, k.

XVI.

Cela fait on aura donc, à cauſe de $x^2 + y^2 + z^2$, l'équation

$$f(X^2 + Y^2) + gZ^2 = r^2$$

d'où

$$f(X^2 + Y^2) = r^2 - gZ^2;$$

donc

$$\frac{YdX - XdY}{X^2 + Y^2} = \frac{fkTdt}{r^2 - gZ^2}.$$

Donc ſi on fait

$$d\varphi = \frac{fkTdt}{r^2 - gZ^2}$$

on aura

$$Y = \sqrt{\left(\frac{r^2 - gZ^2}{f}\right)} \, \text{ſin.}\, \varphi$$

$$X = \sqrt{\left(\frac{r^2 - gZ^2}{f}\right)} \, \text{coſ.}\, \varphi.$$

Ainſi on connoîtra les trois quantités X, Y & Z, à l'aide deſquelles on pourra déterminer x, y & z.

Pour cela on prendra les trois équations

$$lz - my + nx = X$$

$$\lambda z - \mu y + \nu x = Y$$

$$az - by + cx = Z$$

& on les ajoutera enſemble après les avoir multipliées reſpectivement 1°. par $fl, f\lambda, ga$, 2°. par $fm, f\mu, gb$,

3°. par fn, $f\nu$, gc; on aura sur le champ, en vertu des équations de l'art. précédent,

$$z = f(lX + \lambda Y) + gaZ$$
$$y = -f(mX + \mu Y) - gbZ$$
$$x = f(nX + \nu Y) + gcZ.$$

XVII.

Maintenant, comme on a supposé $x^2 + y^2 + z^2 = f(X^2 + Y^2) + gZ^2$, on aura, en substituant les valeurs de x, y, z qu'on vient de trouver, & comparant les termes homogènes,

$$f(l^2 + m^2 + n^2) = 1$$
$$f(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 1$$
$$g(a^2 + b^2 + c^2) = 1$$
$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$
$$la + mb + nc = 0$$
$$\lambda a + \mu b + \nu c = 0,$$

& ces équations devront être identiques avec les six qu'on a trouvées ci-dessus (art. 15), & pourront par conséquent être employées à la place de celles-là pour la détermination des inconnues l, m, &c.

Or, comme il faut satisfaire en même-tems à ces trois autres équations $m\nu - n\mu = ka$, $\nu l - l\nu = kb$, $l\mu - m\lambda = kc$ (art. 15) je remarque que si on ajoute ensemble ces dernières équations après les avoir multi-

pliées reſpectivement 1°. par l, m, n, 2°. par λ, μ, ν, on aura ces deux ci:

$$k(la+mb+nc)=0$$
$$k(\lambda a+\mu b+\nu c)=0,$$

leſquelles s'accordent avec la cinquième & la ſixième des précédentes; ainſi on peut déja réduire à une ſeule les trois équations dont il s'agit, & on y ſatisfera par la détermination de l'inconnue k. Or, ſi on ajoute enſemble les carrés de ces équations, on aura

$$k^2(a^2+b^2+c^2)=(m\nu-n\mu)^2+(n\lambda-l\nu)^2+(l\mu-m\lambda)^2$$
$$=(l^2+m^2+n^2)(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)-(l\lambda+m\mu+n\nu)^2$$
$$=\text{(en vertu des ſix équations ci-deſſus)}\ \frac{1}{f^2};$$

de ſorte qu'on aura

$$k=\frac{1}{f\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}.$$

Donc il n'y aura plus qu'à ſatisfaire aux ſix équations trouvées plus haut, c'eſt ce qu'on pourra exécuter de pluſieurs manières à cauſe qu'il y a plus d'indéterminées que d'équations.

On aura d'abord

$$g=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

enſuite, ſi on chaſſe λ des deux équations $l\lambda+m\mu+n\nu=0$, & $\lambda a+\mu b+\nu c=0$, on aura $(am-bl)\mu+(an-cb)\nu=0$, & chaſſant μ, on aura de même $(bl-am)\lambda+(bn-cm)\nu=0$, d'où je conclus qu'on aura

$$\lambda=$$

$$\lambda = (cm - bn)\Delta$$

$$\mu = (an - cl)\Delta$$

$$\nu = (bl - am)\Delta$$

Δ étant une inconnue qu'on déterminera par l'équation $f(\lambda^2+\mu^2+\nu^2) = 1$, laquelle donnera

$f\Delta^2\left((cm - bn)^2 + (an - cl)^2 + (bl - am)^2\right) = 1$; mais on a $(cm - bn)^2 + (an - cl)^2 + (bl - am)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(l^2 + m^2 + n^2) - (al + bm + cn)^2 = \frac{1}{fg}$, à cause de $a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{g}$, $l^2+m^2+n^2 = \frac{1}{f}$, & $al + bm + cn = 0$ par les équations ci-dessus ; donc on aura $\frac{\Delta^2}{g} = 1$, & $\Delta = \sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$; & il ne restera qu'à satisfaire à ces deux équations

$$f(l^2 + m^2 + n^2) = 1$$

$$la + mb + nc = 0.$$

Supposons pour plus de simplicité

$$a = h \cos. \alpha$$

$$b = h \sin. \alpha \cos. \varepsilon$$

$$c = h \sin. \alpha \sin. \varepsilon$$

l'on aura $\Delta = \sqrt{g} = \frac{1}{h}$, de sorte que $h = \sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$; & la seconde des deux équations précédentes deviendra $l \cos. \alpha + \sin. \alpha(m \cos. \varepsilon + n \sin. \varepsilon) = 0$; soit donc $l = \sin. \alpha \sin. n$, & l'on aura, en faisant pour plus de simplicité $f = 1$,

$$\sin.\alpha^2.\sin.\eta^2+m^2+n^2=1$$

$$\cos.\alpha.\sin.\eta+m\cos.\varepsilon+n\sin.\varepsilon=0.$$

Donc $m\cos.\varepsilon+n\sin.\varepsilon=-\cos.\alpha\sin.\eta$; donc $m^2+n^2-(m\cos.\varepsilon+n\sin.\varepsilon)=(m\sin.\varepsilon-n\cos.\varepsilon)^2=1-\sin.\alpha^2.\sin.\eta^2-\cos.\alpha^2.\sin.\eta^2=1-\sin.\eta^2=\cos.\eta^2$; & tirant la racine carrée, $m\sin.\varepsilon-n\cos.\varepsilon=\cos.\eta$; de sorte qu'on aura $m=\sin.\varepsilon\cos.\eta-\cos.\alpha.\cos.\varepsilon\sin.\eta$,

$n=-\cos.\varepsilon.\cos.\eta-\cos.\alpha.\sin.\varepsilon.\sin.\eta$; & de-là on trouvera les valeurs de λ, μ, ν par les formules précédentes.

On aura de cette manière

$$l=\sin.\alpha\sin.\eta$$

$$m=\sin.\varepsilon\cos.\eta-\cos.\alpha\cos.\varepsilon\sin.\eta$$

$$n=-\cos.\varepsilon\cos.\eta-\cos.\alpha\sin.\varepsilon\sin.\eta$$

$$\lambda=\sin.\alpha\cos.\eta$$

$$\mu=-\sin.\varepsilon\sin.\eta-\cos.\alpha\cos.\varepsilon\cos.\eta$$

$$\nu=\cos.\varepsilon\sin.\eta-\cos.\alpha\sin.\varepsilon\cos.\eta.$$

Si on substitue ces valeurs dans les expressions de x, y & z de l'art. 16, il est facile de voir que les quantités X, Y & $\frac{Z}{h}$ ne sont autre chose que les coordonnées rectangles de la même courbe qui est représentée par les coordonnées x, y, z, mais rapportée à un autre plan de projection, dont la position dépend des angles α, ε & η. En effet, si on considère les deux plans des coordonnées x, y, & des coordonnées X, Y, l'angle α sera celui de l'in-

climaiſon de ces deux plans, l'angle η ſera celui que la ligne d'interjection de ces plans fait avec l'axe des abſciſſes x, & l'angle ε ſera celui que l'axe des abſciſſes X comprend avec la même ligne d'interrection. Or, comme l'expreſſion des coordonnées X, Y & $\frac{Z}{h}$ eſt plus ſimple que celle des coordonnées x, y, z, il eſt clair que le plan de projection auquel appartiennent les coordonnées X, Y & $\frac{Z}{h}$ eſt plus propre que tout autre plan pour y rapporter les mouvemens des trois Corps, ou plutôt le mouvement relatif de deux de ces Corps autour du troiſième.

On voit donc que la poſition du plan de projection n'eſt point du tout indifférente, & que parmi tous les plans poſſibles qu'on peut faire paſſer par le corps A, il y en a un qui doit être choiſi de préférence, parce que les mouvemens des corps B & C autour de A ſont par rapport à ce plan les plus ſimples qu'il eſt poſſible.

Cette remarque, qui me paroît de quelque importance dans le Problème des trois Corps, n'avoit point encore été faite, parce que perſonne, que je ſache, n'avoit juſqu'à préſent enviſagé ce Problême d'une manière auſſi générale que nous venons de le faire.

XVIII.

Nous prendrons donc, à la place des coordonnées x, y, z, celles-ci X, Y, $\frac{Z}{h}$, pour repréſenter le mouvement du corps B autour de A; & comme l'on a, à

cauſe de $h = \frac{1}{\sqrt{g}}$, $X^2 + Y^2 + \left(\frac{Z}{h}\right)^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$;

& $Y = \sqrt{\left(r^2 - \left(\frac{Z}{h}\right)^2\right)} \, \textit{fin.}\, \varphi, X = \sqrt{\left(r^2 - \left(\frac{Z}{h}\right)^2\right)} \, \textit{cof.}\, \varphi$

(art. 15), il eſt clair que φ ſera l'angle décrit par le corps B autour de A dans le plan de projection, c'eſt-à-dire la longitude du corps B dans ce même plan; & que $\frac{Z}{hr}$ ſera le *ſinus* de la latitude. Ainſi on aura (art. 16) à cauſe de $f = 1$, $k = \frac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} = \frac{1}{h}$,

Pour le corps B

Rayon recteur de l'orbite . . . . r

Longitude . . . . $\int \frac{T dt}{h\left(r^2 - \left(\frac{Z}{h}\right)^2\right)}$

Sinus de la latitude . . . $\frac{Z}{hr}$

Pour le corps C

Rayon recteur de l'orbite . . . . r^1

Longitude . . . . $\int \frac{T^1 dt}{h\left(r^{12} - \left(\frac{Z^1}{h}\right)^2\right)}$

Sinus de la latitude . . . $\frac{Z^1}{hr^1}$.

Les valeurs de T & de Z ſont données par les formules de l'art. 14, & pour avoir celles de T^1 & Z^1, il n'y aura qu'à changer dans celles là l'accent o en ^{1} & ^{1} en o, & enſuite B en C & C en B.

Quant à la quantité h, c'eſt une conſtante arbitraire qui dépend du mouvement initial des corps ; mais il faudra la prendre telle qu'elle s'accorde avec l'équation (P) de l'art. 11 dans laquelle le ſecond membre eſt

$$= a^2 + b^2 + c^2 = h^2 ;$$

de ſorte qu'il n'y aura qu'à prendre pour h la racine carrée de la valeur du premier membre de cette équation lorſqu'on y fait $t = 0$.

XIX.

Les formules, que nous venons de trouver, ſervent à déterminer les orbites des B & C autour du corps A par rapport à un plan fixe paſſant par ce même corps ; mais il faut voir encore comment on peut déterminer par leur moyen, la poſition mutuelle de ces orbites. Pour cela, nous commencerons par remarquer que ſi on conſidère le triangle formé à chaque inſtant par les trois corps A, B, C, & dont les trois côtés ſont r, r^{I} & r^{II}, & qu'on nomme ζ, ζ^{I}, ζ^{II}, les trois angles oppoſés à ces côtés, on aura, comme on le ſçait, par la Géométrie élémentaire,

$$\cos.\zeta = \frac{r^{\mathrm{I}2} + r^{\mathrm{II}2} - r^2}{2r^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}} = \frac{p}{r^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}}$$

$$\cos.\zeta^{\mathrm{I}} = \frac{r^2 + r^{\mathrm{II}2} - r^{\mathrm{I}2}}{2rr^{\mathrm{II}}} = \frac{p^{\mathrm{I}}}{rr^{\mathrm{II}}}$$

$$\cos.\zeta^{\mathrm{II}} = \frac{r^2 + r^{\mathrm{I}2} - r^{\mathrm{II}2}}{2rr^{\mathrm{I}}} = \frac{p}{rr^{\mathrm{I}}}.$$

Or on a (art. 8) $p^{\mathrm{II}} = x\,x^{\mathrm{I}} + y\,y^{\mathrm{I}} + z\,z^{\mathrm{I}}$

donc $\cos.\zeta^{\mathrm{II}} = \frac{xx^{\mathrm{I}} + yy^{\mathrm{I}} + zz^{\mathrm{I}}}{rr^{\mathrm{I}}}$, ζ^{II} étant l'angle formé au centre du corps A par les rayons recteurs r, & r^{I} des deux autres corps B & C.

Qu'on imagine maintenant deux plans paſſants, l'un par le corps A, & par les deux points infiniment proches, dans leſquels s'eſt trouvé le corps B au commencement & à la fin du temps infiniment petit dt, & l'autre par le même corps A, & par les deux points infiniment proches, où le corps C étoit au commencement & à la fin du même temps dt; ces deux plans ſeront ceux des orbites des corps B & C autour de A, & ils ſe couperont néceſſairement dans une ligne droite paſſant par le corps A, laquelle ſera donc la ligne des nœuds des deux orbites.

Soit ω l'inclinaiſon de ces deux plans l'un à l'autre, ξ la diſtance du corps B à l'interſection des deux plans ou à la ligne des nœuds, c'eſt-à-dire l'angle compris entre le rayon r & la ligne des nœuds, & ξ^{I} la diſtance du corps C à la même ligne des nœuds, c'eſt-à-dire l'angle formé par le rayon r^{I} & la ligne des nœuds; ſi on imagine une ſphère décrite autour de A comme centre, & que par les points, où les deux rayons r, r^{I} & la ligne des nœuds, traverſent la ſurface de cette ſphère, dont nous ſuppoſerons le rayon égal à 1, où mène des arcs de grands cercles, on aura un triangle ſphérique, dont les trois côtés ſeront ξ, ξ^{I} & ζ^{II}, & dont l'angle oppoſé au côté ζ^{II} ſera ω; de ſorte qu'on aura par les formules connues

$$cof.\,\zeta^{II} = cof.\,\xi\ cof.\,\xi^{I} + ſin.\,\xi\ ſin.\,\xi^{I}\ cof.\,\omega,$$

donc $cof.\,\xi\ cof.\,\xi^{I} + ſin.\,\xi\ ſin.\,\xi^{I}\ cof.\,\omega = \frac{xx^{I}+yy^{I}+zz^{I}}{rr^{I}}$

Suppoſons maintenant que pendant le temps dt le corps B décrive autour de A l'angle infiniment petit $d\theta$, & que le corps C décrive l'angle $d\theta^{I}$, il eſt clair que, tandis que les lignes x, y, z, r, croiſſent de leurs différentiels dx, dy, dz, dr, l'angle ξ croîtra de $d\theta$, & l'angle ω demeurera le même, parce qu'on ſuppoſe que la poſition des plans des orbites des corps B & C eſt la

même au commencement & à la fin de l'instant dt ; de même en faisant croître les lignes x^{I}, y^{I}, z^{I}, r^{I} de leurs différentiels dx^{I}, dy^{I}, dz^{I}, dr^{I}, il n'y aura que l'angle ξ^{I} qui variera en croissant de $d\theta^{I}$. Or, comme l'équation précédente doit être identique & indépendante de la loi des mouvemens des corps B & C, il est clair qu'on pourra y faire varier les quantités x, y, z, r & ξ qui appartiennent au corps B indépendamment des quantités x^{I}, y^{I}, z^{I}, r^{I} & Z^{I} qui appartiennent au corps C, & *vice-versa* celles-ci indépendamment de celles-là ; d'où il suit qu'en faisant varier d'abord x, y, z, r & ξ, ensuite $x^{I}, y^{I}, z^{I}, r^{I}$ & ξ^{I} ; enfin les unes & les autres en même-temps, on tirera de l'équation dont il s'agit, les trois suivantes

$$(-\sin.\xi\cos.\xi^{I}+\cos.\xi\sin.\xi\cos.\omega)d\theta=$$
$$-\frac{(xx^{I}+yy^{I}+zz^{I})dr}{r^{2}r_{-}^{I}}+\frac{x^{I}dx+y^{I}dy+z^{I}dz}{rr_{-}^{I}},$$

$$(-\cos.\xi\sin.\xi^{I}+\sin.\xi\cos.\xi^{I}\cos.\omega)d\theta^{I}=$$
$$-\frac{(xx^{I}+yy^{I}+zz^{I})dr^{I}}{rr^{I2}}+\frac{xdx^{I}+ydy^{I}+zdz^{I}}{rr_{-}^{I}},$$

$$(\sin.\xi\sin.\xi^{I}+\cos.\xi\cos.\xi^{I}\cos.\omega)d\theta d\theta^{I}=$$
$$\frac{(xx^{I}+yy^{I}+zz^{I})drdr^{I}}{r^{2}r^{I2}}-\frac{(x^{I}dx+y^{I}dy+z^{I}dz)dr^{I}}{rr^{I2}},$$
$$-\frac{(xdx^{I}+ydy^{I}+zdz^{I})dr}{r^{2}r_{-}^{I}}+\frac{dxdx^{I}+dydy^{I}+dzdz^{I}}{rr_{-}^{I}}.$$

Donc si on fait dans toutes ces équations les substitutions de l'art. 8, on aura ces quatre-ci :

$$cof.\,\xi\ cof.\,\xi^{I} + fin.\,\xi\ fin.\,\xi^{I}\ cof.\,\omega = \frac{p^{II}}{rr^{I}_{\cdot}}$$

$$-fin.\,\xi\ cof.\,\xi^{I} + cof.\,\xi\ fin.\,\xi^{I}\ cof.\,\omega = -\frac{p^{II}dr + rdV}{r^{2}r^{I}d\theta}$$

$$-cof.\,\xi\ fin.\,\xi^{I} + fin.\,\xi\ cof.\,\xi^{I}\ cof.\,\omega = -\frac{p^{II}dr + r^{I}dr^{I}}{rr^{I2}d\theta^{I}}$$

$$fin.\,\xi\ fin.\,\xi^{I} + cof.\,\xi\ cof.\,\xi^{I}\ cof.\,\omega = \frac{p^{II}drdr^{I} - dVrdr^{I} - dV^{I}r^{I}dr + rr^{I}v^{II}dt^{2}}{r^{2}r^{I2}d\theta d\theta^{I}}.$$

Or, il eſt facile de concevoir que le carré du petit eſpace que parcourt le corps B dans le temps dt eſt exprimé par également par $dx^{2} + dy^{2} + dz^{2}$ & par $r^{2}d\theta^{2} + dr^{2}$, de ſorte qu'on aura $rd\theta = \sqrt{(dx^{2} + dy^{2} + dz^{2} - dr^{2})}$, & par conſéquent (art. 8 & 11) $d\theta = \frac{\sqrt{(u^{2}dt^{2} - dr^{2})}}{r} = \frac{dt\sqrt{\Pi}}{r^{2}}$

& de même $d\theta^{I} = \frac{\sqrt{(u^{I2}dt^{2} - dr^{I2})}}{r^{I}_{\cdot}} = \frac{dt\sqrt{\Pi^{I}}}{r^{I2}_{\cdot}}$.

Ainſi, les ſeconds membres des quatre équations précédentes ſeront tous donnés, dès qu'on connoîtra r, r^{I} & r^{II} en t (article cité); de ſorte qu'on aura quatre équations entre les trois inconnues ξ, ξ^{I} & ω par leſquelles on pourra non-ſeulement déterminer ces trois inconnues, mais encore avoir une équation entre les quantités r, r^{I}, r^{II}, u, u^{I}, &c. & cette équation ſera la même que celle qu'on a déja trouvée plus haut (art. 10) par une voie bien différente.

XX.

XX.

Suppoſons, pour abréger, que les équations précédentes ſoient repréſentées ainſi:

$$\begin{aligned}
&\cos.\xi\cos.\xi^{I}+\sin.\xi\sin.\xi^{I}\cos.\omega=\lambda\\
&\sin.\xi\cos.\xi^{I}-\cos.\xi\sin.\xi^{I}\cos.\omega=\mu\\
&\cos.\xi\sin.\xi^{I}-\sin.\xi\cos.\xi^{I}\cos.\omega=\nu\\
&\sin.\xi\sin.\xi^{I}+\cos.\xi\cos.\xi^{I}\cos.\omega=-\pi
\end{aligned}$$

en faiſant

$$\lambda=\frac{p^{II}}{rr^{I}},\ \mu=\frac{p^{II}dr+rdV}{r^{2}r^{I}d\theta},\ \frac{p^{II}dr+r^{I}dV^{I}}{rr^{I2}d\theta^{I}},$$
$$\pi=\frac{-p^{II}drdr^{I}+dVrdr^{I}+dV^{I}r^{I}dr-rr^{I}v^{II}dt^{2}}{r^{2}r^{I2}d\theta d\theta^{I}}.$$

& il eſt facile de réduire ces quatre équations à ces deux-ci:

$$\begin{aligned}
&\cos.(\xi\mp\xi^{I})\times(1\pm\cos.\omega)=\lambda\pm\pi,\\
&\sin.(\xi\mp\xi^{I})\times(1\pm\cos.\omega)=\lambda\pm\nu,
\end{aligned}$$

leſquelles, à cauſe de l'ambiguité des ſignes, équivalent réellement à quatre équations. Elevant ces deux équations au carré, & enſuite les ajoutant enſemble, on a

$$(1\mp\cos.\omega)^{2}=(\lambda\pm\pi)^{2}+(\mu\pm\nu)^{2}$$

d'où, à cauſe de l'ambiguité des ſignes, on tire

$$\begin{aligned}
&-\cos.\omega=\lambda\pi+\mu\nu\\
&1+\cos.\omega^{2}=\lambda^{2}+\mu^{2}+\nu^{2}+\pi^{2};
\end{aligned}$$

de ſorte qu'éliminant $cof.\,\omega$ on aura

$$1 + (\lambda\pi + \mu\nu)^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \pi^2.$$

Si on ſubſtitue dans cette équation les valeurs de λ, μ, ν, π, comme auſſi celles de $d\theta$ & de $d\theta^{I}$, on aura une équation qui ſera la même que l'équation (N) de l'art 10; ce qui peut ſervir à confirmer la bonté de nos calculs.

L'équation $-cof.\,\omega = \lambda\pi + \mu\nu$ donnera

$$cof.\,\omega = \frac{p^{II}v^{II}dt^2 - dV\,dV^{I}}{r^2r^{I2}d\theta\,d\theta^{I}} = \frac{\Phi^{II}}{V(\Pi\Pi^{I})}$$

ce qui ſera connoître l'inclinaiſon ω des deux orbites.

Connoiſſant ω, on connoîtra aiſément ξ & ξ^{I}; car en multipliant les deux équations

$$cof.(\xi + \xi^{I})\,(1 - cof.\,\omega) = \lambda + \pi,$$
$$cof.(\xi - \xi^{I})\,(1 + cof.\,\omega) = \lambda - \pi,$$

l'une par l'autre, on aura celle-ci:

$$\tfrac{1}{2}\,(cof.\,2\xi + cof.\,2\xi^{I})\,ſin.\,\omega^2 = \lambda^2 - \pi^2;$$

& de même les deux autres équations

$$ſin.(\xi + \xi^{I})(1 - cof.\,\omega) = \mu + \nu,\ ſin.(\xi - \xi^{I})(1 + cof.\,\omega) = \mu - \nu,$$

étant multipliées enſemble donneront

$$-\tfrac{1}{2}\,(cof.\,2\xi - cof.\,2\xi^{I})\,ſin.\,\omega^2 = \mu^2 - \nu^2$$

d'où l'on tire

$$cof.\,2\xi = \frac{\lambda^2 - \pi^2 - \mu^2 + \nu^2}{ſin.\,\omega^2}$$

$$cof.\,2\xi^{I} = \frac{\lambda^2 - \pi^2 + \mu^2 - \nu^2}{ſin.\,\omega^2},$$

ou bien en mettant à la place de π sa valeur $1 + cos.\,\omega^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2$ tirée de l'équation trouvée ci-dessus, on aura, à cause de $cos.\,\omega^2 = 1 - sin.\,\omega^2$,

$$cos.\,2\,\xi = 1 + \frac{2(\lambda^2 + \nu^2 - 1)}{sin.\,\omega^2}$$

$$cos.\,2\,\xi^{I} = 1 + \frac{2(\lambda^2 + \mu^2 - 1)}{sin.\,\omega\,2}$$

d'où l'on tire

$$sin.\,\xi = \frac{\sqrt{(1 - \lambda^2 - \nu^2)}}{sin.\,\omega}$$

$$sin.\,\xi^{I} = \frac{\sqrt{(1 - \lambda^2 - \mu^2)}}{sin.\,\omega},$$

c'est-à-dire, en substituant les valeurs de λ, μ, ν, & faisant attention que $r^2 d\theta^2 = u^2 dt^2 - dr^2$, & $r^{I2} d\theta^{I2} = u^{I2} dt^2 - dr^{I2}$,

$$sin.\,\xi = \frac{\sqrt{((r^2 r^{I2} - p^{II2})u^{I2} dt^2 - r^2 (r^I dr^I)^2 + 2p^{II}(r^I dr^I) dV^I - r^{I2} dV^{I2})}}{r r^{I2}\, sin.\,\omega\, d\theta^I}$$

$$sin.\,\xi^{I} = \frac{\sqrt{((r^2 r^{I2} - p^{II2})u^2 dt^2 - r^{I2}(r dr)^2 + 2p^{II}(r dr) dV - r^2 dV^2)}}{r^I r^2\, sin.\,\omega\, d\theta};$$

ou bien art. 13

$$sin.\,\xi = \frac{\sqrt{(4(pp^I + pp^{II} + p^I p^{II})u^{I2} - \Sigma^I)}}{2r\sqrt{\Pi^I}.\,sin.\,\omega}$$

$$sin.\,\xi^{I} = \frac{\sqrt{(4(pp^I + pp^{II} + p^I p^{II})u^2 - \Sigma)}}{2r^I\sqrt{\Pi}.\,sin.\,\omega}.$$

XXI.

Si on veut que les trois Corps se meuvent dans un

même plan, on aura alors $\omega = 0$, & par conſéquent $cof.\,\omega = 1$, & $ſin.\,\omega = 0$; donc

$$\mathfrak{M} = 4(pp^{I} + pp^{II} + p^{I}p^{II})u^{2},$$

$$\mathfrak{M}^{I} = 4(pp^{I} + pp^{II} + p^{I}p^{II})u^{I2},$$

& par analogie

$$\mathfrak{M}^{II} = 4(pp^{I} + pp^{II} + p^{I}p^{II})u^{II2}.$$

De ſorte que les quantités Z & Z^{I} (art. 14) ſeront nulles, & par conſéquent les mouvemens des trois Corps s'exécuteront dans le même plan que nous avons pris pour le plan de projection (art. 18). Or, ſi on ſubſtitue les valeurs de u^{2}, u^{I2}, u^{II2} tirées des équations précédentes dans l'équation (P) de l'art. 11, on aura une équation en r, r^{I}, r^{II} & $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dr^{I}}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$ par laquelle on pourra déterminer cette dernière quantité $\frac{dp}{dt}$; ſubſtituant enſuite la valeur de $\frac{dp}{dt}$ dans celles de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ & $\mathfrak{M}^{II}$, on aura les valeurs de u^{2}, u^{I2}, & u^{II2} exprimées en r, r^{I}, r^{II} & $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dr^{I}}{dt}$, $\frac{dr^{II}}{dt^{2}}$ ſeulement; ainſi mettant ces valeurs de u^{2}, u^{I2}, u^{II2} dans les équations (F) de l'art. 3, on aura enfin trois équations en r, r^{I}, r^{II} & t, leſquelles ſeront ſimplement différentielles du ſecond ordre, au lieu que les équations générales (K) de l'art. 5 montent au quatrième ordre, lorſqu'on les délivre des ſignes d'intégration.

Au reſte, je crois que dans le cas même dont il s'agit, ces dernières équations ſeront toujours préférables, parce qu'elles ont l'avantage ſingulier de ne renfermer aucun

radical, ce qui n'auroit point lieu dans les équations où l'on employeroit les valeurs de u, u^{I}, u^{II} déterminées par les équations ci-deſſus, valeurs qui renfermeroient néceſſairement des radicaux carrés.

RÉCAPITULATION.

XXII.

Pour réſumer ce qui vient d'être démontré dans ce Chapitre ſoient nommées.

$\left.\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}\right\}$ les maſſes des trois Corps.

$\left.\begin{matrix} r \\ r^{I} \\ r^{II} \end{matrix}\right\}$ les diſtances entre les Corps $\left\{\begin{matrix} A \text{ \& } B \\ A \text{ \& } C \\ B \text{ \& } C \end{matrix}\right.$

& ſuppoſant pour abréger

$$p = \frac{r^{I2} + r^{II2} - r^{2}}{2}, \quad q = \frac{1}{r^{I3}} - \frac{1}{r^{II3}}$$

$$p^{I} = \frac{r^{2} + r^{II2} - r^{I2}}{2}, \quad q^{I} = \frac{1}{r^{3}} - \frac{1}{r^{II3}}$$

$$p^{II} = \frac{r^{2} + r^{I2} - r^{II2}}{2}, \quad q^{II} = \frac{1}{r^{I3}} - \frac{1}{r^{3}} = q - q^{I}$$

on aura, en prenant l'élement du tems dt pour conſtant,

$$\frac{d^{2}p}{dt^{2}} + Cpq - Bp^{I}q^{I} - Ap^{II}q^{II} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (H)$$

$$\left.\begin{aligned} dQ &= q^{I}dp^{I} - q^{II}dp^{II} - qdp \\ dQ^{I} &= qdp + q^{II}dp^{II} + q^{I}dp \\ dQ^{II} &= -qdp - q^{I}dp^{I} + q^{II}dp \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (I)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2.r^2}{2dt^2} - \frac{A+B+C}{r} - C(p^{I}q^{I} - p^{II}q^{II} + Q) &= 0 \\ \frac{d^2.r^{I2}}{2dt^2} - \frac{A+B+C}{r^{I}} - B(pq + p^{II}q^{II} + Q^{I}) &= 0 \\ \frac{d^2.r^{II2}}{2dt^2} - \frac{A+B+C}{r^{II}} - A(-pq - p^{I}q^{I} + Q^{II} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (M)$$

Ces équations ſerviront à déterminer les valeurs des diſtances r, r^{I}, r^{II} en t; après quoi on pourra trouver directement & ſans aucune intégration les valeurs de tous les autres élémens, d'où dépend la détermination des orbites des corps B & C autour du corps A.

En effet ſi l'on nomme

$$\left.\begin{matrix} u \\ u^{I} \\ u^{II} \end{matrix}\right\} \text{la vîteſſe du corps} \left\{\begin{matrix} B \\ C \\ C \end{matrix}\right. \text{autour de} \left\{\begin{matrix} A \\ A \\ C \end{matrix}\right.$$

on aura d'abord

$$\left.\begin{aligned} u^{2} &= \frac{2(A+B+C)}{r} + C\,Q \\ u^{I2} &= \frac{2(A+B+C)}{r^{I}} + B\,Q^{I} \\ u^{II2} &= \frac{2(A+B+C)}{r^{II}} + A\,Q^{II} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (I)$$

Si l'on nomme enſuite

φ l'angle parcouru par le corps B autour de A dans un plan ſuppoſé fixe & paſſant par A; c'eſt-à-dire, la longitude de B.

Ψ l'angle de la latitude de B par rapport à ce même plan.

φ^{I} la longitude de C.

Ψ^{I} ſa latitude;

& qu'on faſſe pour abréger

$$P=pp+pp^{II}+p^{I}p^{II}=r^{2}r^{I2}-p^{II2}=2r^{2}r^{I2}+2r^{2}r^{II2}$$
$$+2r^{I2}r^{II2}-r^{4}-r^{I4}-r^{II4}=(r+r^{I}+r^{II})\,(r+r^{I}-r^{II})$$
$$(r-r^{I}+r^{II})\,(r-r^{I}-r^{II}),$$

$$M=p\left(\frac{d.r^{2}}{dt}\right)^{2}+p^{I}\left(\frac{dv^{II}}{dt}\right)^{2}+p^{II}\left(\frac{dp^{I}}{dt}\right)^{2}$$
$$-2\left(p^{II}\frac{dp^{I}}{dt}-p^{I}\frac{dp^{II}}{dt}\right)\frac{d\rho}{dt}+r^{2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^{2},$$

$$M^{I}=p^{I}\left(\frac{d.r^{I2}}{dt}\right)^{2}+p\left(\frac{dp^{II}}{dt}\right)^{2}+p^{II}\left(\frac{dp}{dt}\right)^{2}$$
$$+2\left(p^{II}\frac{dp}{dt}-p\frac{dp^{II}}{dt}\right)\frac{d\rho}{dt}+r^{I2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^{2},$$

$$M^{II}=p^{II}\left(\frac{d.r^{II2}}{dt}\right)^{2}+p^{I}\left(\frac{dp}{dt}\right)^{2}+p\left(\frac{dp^{I}}{dt}\right)^{2}$$
$$+2\left(p\frac{dp^{I}}{dt}-p^{I}\frac{dp}{dt}\right)\frac{d\rho}{dt}+r^{II2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^{2},$$

$$\Pi=r^{2}u^{2}-\left(\frac{d.r^{2}}{2dt}\right)^{2},$$

$$\Pi^{I} = r^{I2}u^{I2} - \left(\frac{d.r^{I2}}{2dt}\right)^{2}$$

$$\Pi^{II} = r^{II2}u^{II2} - \left(\frac{d.r^{II2}}{2dt}\right)^{2}$$

$$\Psi = p\,v - \left(\frac{dp}{2dt}\right)^{2} + \left(\frac{d\rho}{2dt}\right)^{2}$$

$$\Psi^{I} = p^{I}v^{I} - \left(\frac{dp^{I}}{2dt}\right)^{2} + \left(\frac{d\rho}{2dt}\right)^{2}$$

$$\Psi^{II} = p^{II}v^{II} - \left(\frac{dp^{II}}{2dt}\right)^{2} + \left(\frac{d\rho}{2dt}\right)^{2},$$

en ſuppoſant

$$v = \frac{u^{I2} + u^{II2} - u^{2}}{2},$$

$$v^{I} = \frac{u^{2} + u^{II2} - u^{I2}}{2},$$

$$v^{II} = \frac{u^{2} + u^{I2} - u^{II2}}{2},$$

on aura ſur le champ

$$\sin.\Psi = \frac{\frac{1}{B}V(4Pu^{I2} - \Sigma^{I}) + \frac{1}{A}V(4Pu^{II2} - \Sigma^{II})}{2hr},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\frac{\Pi}{C} + \frac{\Psi^{I}}{A} + \frac{\Psi^{II}}{B}}{hr^{2}\cos.\Psi^{2}},$$

&

$$\sin.\Psi^{I} = \frac{\frac{1}{C}V(4Pu^{2} - \Sigma) + \frac{1}{A}V(4Pu^{II2} - \Sigma^{II})}{2hr^{I}},$$

$$\frac{d\varphi^{I}}{dt} = \frac{\frac{\Pi^{I}}{B} + \frac{\Psi}{A} + \frac{\Psi^{II}}{C}}{hr^{I2}\cos.\Psi^{I2}},$$

Il

Il faut remarquer que ces formules renferment deux conſtantes qui ne ſont pas arbitraires, mais qui doivent être déterminées par des équations particulières ; ce ſont, l'une la conſtante h, & l'autre la conſtante qui peut être ajoutée à la valeur de $\frac{dv}{dt}$ déduite de l'équation (H) par la voie de l'intégration.

Voici donc les équations qui ſerviront à déterminer ces conſtantes

$$(N) \ldots 16P\mu - 4\left(\Sigma v + \Sigma^{I} v^{I} + \Sigma^{II} v^{II}\right) + \left(\frac{dpdp^{I} + dpdp^{II} + dp^{I}dp^{II} + dp^{2}}{dt^{2}}\right)^{2} = 0,$$

en ſuppoſant

$$\zeta^{II} = vv^{I} + vv^{II} + v^{I}v^{II} = u^{2}u^{I2} - v^{II2} = 2u^{2}u^{I2} + 2u^{2}u^{II2} + 2u^{I2}u^{II2} - u^{I4} - u^{4} - u^{II4} ;$$

&

$$(P) \ldots \frac{\Pi}{C^{2}} + \frac{\Pi^{I}}{B^{2}} + \frac{\Pi^{II}}{A^{2}} + 2\left(\frac{\Psi}{AB} + \frac{\Psi^{I}}{AC} + \frac{\Psi^{II}}{BC}\right) = h^{2}.$$

On pourroit, ſi on vouloit, employer ces équations à la place de deux quelconques des équations (K) ; mais comme elles ſont aſſez compliquées, il vaudra mieux ne s'en ſervir que dans la détermination des conſtantes dont il s'agit ; & pour cela, il eſt clair qu'on y pourra ſuppoſer partout $t = 0$.

Or, ſi, pour plus de ſimplicité, on ſuppoſe que, lorſque $t = 0$, on ait $\frac{dr}{dt} = 0$, $\frac{dr^{I}}{dt} = 0$, & que de plus les rayons r, r^{I} concident, enſorte que l'angle ζ^{II} compris

entre ces rayons (art. 19) ſoit nul, ce qui eſt toujours permis lorſque cet angle eſt variable, on aura à cauſe de $r^{II2} = r^2 + r^{I2} - 2rr^I \cos.\zeta^{II}$ (article cité), $r^{II2} = (r^I - r)^2$, & $\frac{d^{II}}{dt} = 0$; donc $\frac{dp}{dt} = 0$, $\frac{dp^I}{dt} = 0$, $\frac{dp^{II}}{dt} = 0$;

de ſorte que l'équation (*N*) deviendra

$$16PU - 4(r^2u + r^{I2}v^I + r^{II2}v^{II})\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^4 = 0;$$

mais à cauſe de $r^{II2} - (r^I - r)^2$ on aura $P = 0$; donc auſſi $\frac{d\rho}{dt} = 0$. Ainſi, il faudra prendre la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$, enſorte qu'elle devienne nulle lorſque $t = 0$.

L'équation (*P*) ſe ſimplifiera auſſi beaucoup par les mêmes ſuppoſitions, & elle deviendra

$$h^2 = \frac{r^2u^2}{C^2} + \frac{r^{I2}u^{I2}}{B^2} + \frac{r^{II2}u^{II2}}{A^2} + 2\left(\frac{pv}{AB} + \frac{p^Iv^I}{AC} + \frac{p^{II}v^{II}}{BC}\right) \ldots (P^I)$$

où il faudra prendre pour r, r^I, r^{II}, u, u^I, & u^{II} les valeurs qui répondent à $t = 0$.

Quant aux conſtantes qui pourront entrer dans les valeurs de Q, Q^I & Q^{II}, elles ſeront entiérement arbitraires, & ne dépendront que des valeurs initiables de u, u^I, u^{II}, qui ſont à volonté.

Enfin, ſi l'on nomme encore

$d\theta$ l'angle élémentaire décrit par le corps *B* autour du corps *A* dans l'inſtant dt,

$d\theta^I$ l'angle correſpondant décrit par le corps *C* autour de *A*,

ω l'inclinaiſon mutuelle des orbites des corps *B* & *C* autour de *A*;

ξ la distance du corps B au nœud de ces deux orbites,

ξ^{I} la distance du corps C au même nœud,

on aura

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\gamma\Pi}{r^2}, \quad \frac{d\theta^{I}}{dt} = \frac{\gamma\Pi^{I}}{r^{I2}},$$

$$cos.\ \omega = \frac{\Psi^{II}}{\gamma(\Pi\Pi^{I})},$$

$$sin.\ \xi = \frac{\gamma(4Pu^{I2} - \Sigma^{I})}{2r\,sin.\,\omega\,\gamma\Pi^{I}},$$

$$sin.\ \xi^{I} = \frac{\gamma(4Pu^{2} - \Sigma)}{2r^{I}\,sin.\,\omega\,\gamma\Pi}.$$

CHAPITRE II.

Solution du Problême des trois Corps dans différens cas.

XXIII.

Nous allons examiner dans ce Chapitre quelques cas particuliers, où le Problême des trois Corps ſe ſimplifie beaucoup & admet une ſolution exacte ou preſqu'exacte ; quoique ces cas n'aient pas lieu dans le ſyſtême du monde, nous croyons cependant qu'ils méritent l'attention des Géomètres, parce qu'il en peut réſulter des lumières par la ſolution générale du Problême des trois Corps.

XXIV.

Le premier cas qui ſe préſente eſt celui où les trois diſtances r, r^{I}, r^{II} ſeroient conſtantes, enſorte que le triangle formé par ces corps demeurât toujours le même, & ne fît que changer de poſition.

On aura dans ce cas $dr=0$, $dr^{I}=0$, $dr^{II}=0$, & par conſéquent auſſi, $dp=0$, $dp^{I}=0$, $dp^{II}=0$; donc les trois équantions (K) deviendront

$$\left.\begin{aligned} &\frac{A+B+C}{r} + C(p^{I}q^{I} - pq + Q) = 0 \\ &\frac{A+B+C}{r^{I}} + B(pq + p^{II}q^{II} + Q) = 0 \\ &\frac{A+B+C}{r^{II}} + A(-pq - p^{I}q^{I} + Q^{II} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (a)$$

d'où l'on voit que les quantités Q, Q^{I}, Q^{II} ſeront pareillement conſtantes, enſorte qu'on aura $dQ = 0$, $dQ^{I} = 0$, $dQ^{II} = 0$, moyennant quoi les équations (I) ſe réduiront à celles-ci : $q\,dp = 0$, $q^{I}\,dp = 0$, $q^{II}\,dp = 0$, leſquelles donneront ou $q = 0$, $q^{I} = 0$, $q^{II} = 0$, ou $dp = 0$; examinons ſéparément ces deux cas.

XXV.

Soit d'abord $q = 0$, $q^{I} = 0$, $q^{II} = 0$, donc $r = r^{I} = r^{II}$; de ſorte que le triangle formé par les trois Corps ſera équilatère : les équations (a) donneront donc

$$CQ = BQ^{I} = AQ^{II} = -\frac{A+B+C}{r}$$

& ces valeurs étant ſubſtituées dans les formules (I) on aura

$$u^{2} = u^{I2} = u^{II2} = \frac{A+B+C}{r}.$$

Maintenant on aura

$$p = p^{I} = p^{II} = \frac{r^{2}}{2},\quad v = v^{I} = v^{II} = \frac{u^{2}}{2},$$

donc $P = \frac{3r^{4}}{4}$, & $U = \frac{3u^{4}}{4}$; de plus l'équation (H) donnera $\frac{d^{2}\rho}{dt^{2}} = 0$, par conſéquent $\frac{d\rho}{dt} = \alpha$

α étant une conſtante arbitraire qui doit ſatisfaire à l'équation (N).

Or, on trouve $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{I} = \mathfrak{M}^{II} = r^{2}\alpha$; de ſorte que l'équation dont nous parlons, deviendra

$9r^4u^4 - 6r^2u^2\alpha^2 + \alpha^4 = 0$, c'eſt-à-dire $(3r^2u^2 - \alpha^2)^2 = 0$; d'où $\alpha^2 = 3r^2u^2 = 3(A+B+C)r$.

Ainſi, on aura ſatisfait à toutes les équations du Problême; de ſorte que la valeur de r demeurera indéterminée; d'où il s'enſuit que le ſyſtême des trois Corps peut ſe mouvoir de manière que les trois Corps forment toujours un triangle quelconque équilatéral.

Ayant trouvé

$$P = \frac{3r^4}{4}, \quad M = M^{I} = M^{II} = r^2\alpha^2 = 3r^{II}u^2,$$

on aura

$$4Pu^2 - M = 0, \quad 4Pu^{I2} - M^{I} = 0, \quad 4Pu^{II2} - M^{II} = 0;$$

donc $\mathit{ſin.}\ \Psi = 0$, & $\mathit{ſin.}\ \Psi^{I} = 0$; d'où l'on voit que les trois Corps ſeront toujours néceſſairement dans un même plan.

On trouve enſuite $\Pi = \Pi^{I} = \Pi^{II} = r^2u^2$,

$$\Psi = \Psi^{I} = \Psi^{II} = pv + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{r^2u^2}{4} + \frac{3r^2u^2}{4} = r^2u^2;$$

donc à cauſe de $\Psi = 0$, & $\Psi^{I} = 0$, on aura

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi^{I}}{dt} = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)\frac{u^2}{h},$$

mais l'équation (P^{I}, donnera

$$h^2 = \left(\frac{1}{C^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{A^2} + \frac{2}{AB} + \frac{2}{AC} + \frac{2}{BC}\right)r^2u^2$$

ou bien

$$h^2 = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{B} + \frac{1}{A}\right)^2 r^2u^2,$$

par conséquent

$$h = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) ru ;$$

donc

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi^{I}}{dt} = \frac{u}{r} = V\left(\frac{A+B+C}{r^3}\right.$$

Ainsi les corps B & C ne feront que tourner autour du corps A avec une vîtesse angulaire constante

$$\& = V\left(\frac{A+B+C}{r^3}\right.$$

XXVI.

Examinons maintenant l'autre cas, où $\frac{dt}{dt} = 0$ sans que q, q^{I} & q^{II} soient nuls ; & substituons d'abord dans les équations (I) les valeurs de CQ, BQ^{I}, & AQ^{II} tirées des équations (a) ci-dessus, on aura

$$\left.\begin{aligned} u^2 &= \frac{A+B+C}{r} - C(p^{I}q^{I} - p^{II}q^{II}) \\ u^{I2} &= \frac{A+B+C}{r^{I}} - B(pq + p^{II}q^{II}) \\ u^{II2} &= \frac{A+B+C}{r^{II}} - A(-pq - p^{I}q^{I}) \end{aligned}\right\} \ldots (b)$$

d'où l'on voit que les vîtesses relatives des corps seront aussi constantes, mais non pas égales entr'elles comme dans le cas précédent.

Or, puiſqu'il faut que $\frac{dp}{dt} = 0$, on aura donc auſſi $\frac{d^2p}{dt} = 0$, & l'équation (H) deviendra

$$Cpq - Bp^{I}q^{I} - Ap^{II}q^{II} = 0 \ldots (C)$$

Enſuite l'équation (N) deviendra (à cauſe de $dr = 0$, $dr^{I} = 0$, $dr^{II} = 0$, & $dp = 0$, $dp^{I} = 0$, $dp^{II} = 0$, $dp = 0$) $16PU = 0$, ſavoir $P = 0$, ou $U = 0$; ainſi, en combinant l'une ou l'autre de ces équations avec l'équation précédente (C), on pourra, par leur moyen, déterminer deux quelconques des trois indéterminées r, r^{I}, r^{II} & le Problème ſera réſolu.

Suppoſons d'abord $P = 0$, l'on aura

$$(r + r^{I} + r^{II})(r + r^{I} - r^{II})(r - r^{I} + r^{II})(r - r^{I} - r^{II}) = 0,$$

donc puiſque r, r^{I} & r^{II} ſont ſuppoſées poſitives, on aura ces équations

$$r + r^{I} - r^{II} = 0, \text{ ou } r - r^{I} + r^{II} = 0, \text{ ou } r - r^{I} - r^{II} = 0;$$

d'où l'on tire

$$r^{II} = r + r^{I}, \text{ ou } r^{I} = r + r^{II}, \text{ ou } r = r^{I} + r^{II};$$

c'eſt-à-dire que l'une des trois diſtances doit être égale aux deux autres, ce qui montre que les trois corps doivent être toujours rangés dans une même ligne droite.

Imaginons que les trois corps A, B, C ſoient rangés de ſuite dans la même direction, enſorte que l'on ait $r^{II} = r^{I} - r$, & faiſant pour plus de ſimplicité $r^{I} = mr$, il n'y aura qu'à ſubſtituer dans l'équation (c), mr à la place

place de r^{I}, & $(m-1)r$ à la place de r^{II}; l'inconnue r s'en ira, & l'on aura une équation qui servira à déterminer m. On trouvera donc

$$p = \frac{m^2+(m-1)^2-1}{2}\, r^2 = (m^2-m)r^2$$

$$p^{I} = \frac{1+(m-1)^2-m^2}{2}\, r^2 = (1-m)r^2$$

$$p^{II} = \frac{1+m^2-(m-1)}{2}\, r^2 = mr^2$$

$$q = \left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{(m-1)^3}\right)\frac{1}{r^3} = -\frac{3m^2-3m+1}{m(m-1)^3} \times \frac{1}{r^3}$$

$$q^{I} = \left(1 - \frac{1}{(m-1)^3}\right)\frac{1}{r^3} = \frac{m^3-3m^2+3m}{(m-1)^3} \times \frac{1}{r^3}$$

$$q^{II} = \left(\frac{1}{m^3} - 1\right)\frac{1}{r^3} = \frac{1-m^3}{m^3} \times \frac{1}{r^3};$$

& ces substitutions étant faites dans l'équation (c) elle deviendra après avoir été multipliée par $m^2(m-1)^2r$,

$$C(-3m^2+3m-1) + Bm^2(m^2-3m+3) - Am^2(m-1)^2(1-m^3) = 0 \ldots (d),$$

laquelle étant ordonnée par rapport à m, montera au cinquième degré, & aura par conséquent toujours une racine réelle.

Il est bon de remarquer ici que, quoique nous ayons supposé $r^{II} = r^{I} - r$, la solution n'en renfermera pas moins tous les cas possibles, à cause que les distances r, r^{I} & r^{II} étant prises sur une même ligne droite, peuvent être positives ou négatives, suivant la différente position des corps.

Maintenant, à cauſe de $dr = 0$, $dr^{I} = 0$, $dr^{II} = 0$, & $d\rho = 0$, on aura $\mathfrak{M} = 0$, $\mathfrak{M}^{I} = 0$, $\mathfrak{M}^{II} = 0$; de ſorte que, comme on a déja $P = 0$, on aura *ſin.* $\downarrow = 0$ & *ſin.* $\downarrow^{I} = 0$ ce qui montre que les trois Corps doivent ſe mouvoir dans un plan fixe.

XXVII.

Suppoſons maintenant l'autre facteur U égal à zero, on aura

$$U = vv^{I} + vv^{II} + v^{I}v^{II} = u^{2}u^{I2} - v^{II2} = 0 :$$

Or, les équations (*b*) donnent

$$\frac{u^{2}}{r^{2}} - \frac{u^{I2}}{r^{I2}} = -(A+B+C)\,q^{II} - \frac{C}{r^{2}}\,(p^{I}q^{I} - p^{II}q^{II}) + \frac{B}{r^{I2}}\,(pq + p^{II}q^{II}),$$

d'où, en multipliant par $r^{2}\,r^{I2}$, & mettant à la place de r^{2} & r^{I2} leurs valeurs $p^{I} + p^{II}$, & $p + p^{II}$, on aura (à cauſe de $q^{II} = q - q^{I}$) $r^{I2}u^{2} - r^{2}u^{I2} = (-Cq + Bq^{I} - Aq^{II})P + (Cpq - Bp^{I}q^{I} - Ap^{II}q^{II})p^{II}$; mais $Cpq - Bp^{I}q^{I} - Ap^{II}q^{II} = 0$ par l'équation (*c*), donc on aura ſimplement

$$r^{I2}u^{2} - r^{2}u^{I2} = (-Cq + Bq^{I} - Aq^{II})P,$$

& l'on trouvera de même par analogie

$$r^{II2}u^{2} - r^{2}u^{II2} = (Cq + Bq^{I} - Aq^{II})P,$$
$$r^{II2}u^{I2} - r^{I2}u^{II} = (Cq + Bq^{I} + Aq^{II})P ;$$

d'où il eſt facile de tirer

$$p^{II}u^2 - r^2v^{II} = -CqP,$$

$$p^{II}u^{I2} - r^{I2}v^{II} = -Bq^IP,$$

& par conſéquent

$$v^{II} = \frac{p^{II}u^2 + CqP}{r^2} = \frac{p^{II}u^{I2} + Bq^IP}{r^{I2}};$$

donc

$$v^{II2} = \frac{p^{II2}u^2u^{I2} + p^{II}P(Bq^Iu^2 + Cqu^{I2}) + BCqq^IP^2}{r^2r^{I2}},$$

& de-là, à cauſe de $P = r^2r^{I2} - p^{II2}$,

$$U = u^2u^{I2} - v^{II2} = \frac{P}{r^2r^{I2}}\left(u^2u^{I2} - p^{II}(Bq^Iu^2 + Cqu^{I2})\right.$$

$$\left. - BCqq^IP\right) = \frac{P}{r^2r^{I2}}\left((u^2 - Cqp^{II})(u^{I2} - Bq^Ip^{II})\right.$$

$$\left. - BCr^2r^{I2}qq^I\right).$$

Mais les mêmes équations (*b*) donnent

$$u^2 - Cqp^{II} = -\left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r^{II3}}\right)r^2,$$

&

$$u^{I2} - Bq^Ip^{II} = -\left(\frac{A+C}{r^3} + \frac{B}{r^{II3}}\right)r^{I2};$$

donc, ſubſtituant ces valeurs auſſi bien que celles de q & q^I, on aura

$$U = P\left(\left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r^{II3}}\right)\left(\frac{A+C}{r^3} + \frac{B}{r^{II3}}\right)\right.$$

$$\left. - BC\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{II3}}\right)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{II3}}\right)\right),$$

ou bien

$$U = P\left(\frac{A^2}{r^3 r^{I3}} + \frac{B}{r^{I3} r^{II3}} + \frac{C^2}{r^{I3} r^{II3}} + \frac{AB}{r^3}\left(\frac{1}{r^{I3}} + \frac{1}{r^{II3}}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{AC}{r^{I3}}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^{II3}}\right) + \frac{BC}{r^{II3}}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^{I3}}\right)\right).$$

D'où l'on voit que l'équation $U = 0$ ne peut donner que celle-ci $P = 0$, l'autre facteur de U ne pouvant jamais devenir nul, à cause que les rayons r, r^I, r^{II} & les mapes A, B, C sont des quantités positives.

XXVIII.

L'équation $P = 0$ étant donc la seule qui puisse satisfaire au cas que nous examinons, ce cas n'aura lieu, comme nous l'avons vu plus haut, que lorsque les trois Corps seront rangés dans une même ligne droite, & que leurs distances seront dans le rapport exprimé par l'équation (*d*).

Or, nous avons déja trouvé que les trois Corps doivent se mouvoir dans un plan fixe; de sorte que, connoissant la vîtesse u du corps B autour de A, il n'y aura qu'à la diviser par r pour avoir la vîtesse angulaire des corps B & C; mais si l'on veut faire usage des formules générales de l'art. 22, on remarquera qu'à cause de $P = 0$, on a (art. 27) $\frac{u^2}{r^2} = \frac{u^{I2}}{r^{I2}} = \frac{u^{II2}}{r^{II2}}$; mais les équations (*b*) donnent

$$\frac{u^2}{C} + \frac{u^{I2}}{B} + \frac{u^{II2}}{A} = (A+B+C)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^I} + \frac{1}{r^{II}}\right);$$

donc ſubſtituant les valeurs précédentes de u^{I2}, & u^{II2}, & faiſant pour abréger,

$$= K \frac{(A+B+C)\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^{I2}} + \frac{1}{r^{II2}}\right)}{\frac{r^2}{C} + \frac{r^{I2}}{B} + \frac{r^{II2}}{A}}$$

on aura

$$u^2 = kr^2, \text{ \& de même } u^{I2} = kr^{I2}, \; u^{II2} = kr^{II2};$$

donc auſſi

$$v = kp, \; v^I = kp^I, \; v^{II} = kp^{II}.$$

Ainſi, on aura (art. 22)

$$\Pi = kr^4, \; \Pi^I = kr^{I4}, \; \Pi^{II} = kr^{II4},$$

$$\Psi = kp^2, \; \Psi^I = kp^{I2}, \; \Psi^{II} = kp^{II2};$$

mais à cauſe de $P=0$, on a

$$p^2 = r^{I2}r^{II2}, \; p^{I2} = r^2 r^{II2}, \; p^{II2} = r^2 r^{I2};$$

donc

$$\Psi = kr^{I2}r^{II2}, \; \Psi^I = kr^2 r^{II2}, \; \Psi^{II} = kr^2 r^{I2};$$

donc l'équation (P) deviendra

$$h^2 = k\left(\frac{r^2}{C} + \frac{r^{I2}}{B} + \frac{r^{II2}}{A}\right)^2;$$

d'où

$$h = \left(\frac{r^2}{C} + \frac{r^{I2}}{B} + \frac{r^{II2}}{A}\right)\sqrt{k};$$

enſuite, à cauſe de $\psi = 0$ & $\psi^I = 0$,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi^I}{dt} = \frac{k}{h}\left(\frac{r^2}{C} + \frac{r^{I2}}{B} + \frac{r^{II2}}{A}\right) = \sqrt{k}.$$

XXIX.

Nous avons ſuppoſé ci deſſus que les rayons r, r^{I}, r^{II} étoient conſtans, & nous avons vu que cela ne peut avoir lieu que dans deux cas; ſavoir, lorſque ces trois rayons ſont égaux entr'eux, & lorſque l'un d'eux eſt égal à la ſomme des deux autres. Suppoſons maintenant que ces trois rayons ſoient ſeulement dans un rapport conſtant entr'eux, & voyons dans quel cas cette condition pourra avoir lieu. Soit donc $r^{I} = mr$, & $r^{II} = nr$, m & n étant des quantités conſtantes, & l'on aura d'abord (art. 22),

$$p = \mu r^{2},\ p^{I} = \mu^{I} r^{2},\ p^{II} = \mu^{II} r^{2}$$

$$q = \frac{\pi}{r^{3}},\ q^{I} = \frac{\pi^{I}}{r^{3}},\ q^{II} = \frac{\pi^{II}}{r^{3}}$$

en faiſant pour abréger

$$\mu = \frac{m^{2}+n^{2}-1}{2}\,\pi = \frac{1}{m^{3}} - \frac{1}{n^{3}}$$

$$\mu^{I} = \frac{1+n^{2}-m^{2}}{2}\,\pi^{I} = 1 - \frac{1}{n^{3}}$$

$$\mu^{II} = \frac{1+m^{2}-n^{2}}{2}\,\pi^{II} = \frac{1}{m^{3}} - 1 = \pi - \pi^{I}.$$

Donc l'équation (H) deviendra

$$\frac{d^{2}\rho}{dt^{2}} + (C\mu\pi - B\mu^{I}\pi^{I} - A\mu^{II}\pi^{II})\rho$$

ou bien, en faiſant pour abréger,

$$\lambda = C\mu\pi - B\mu^{I}\pi^{I} - A\mu^{II}\pi^{II},$$

$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{\lambda}{r} = 0$, & intégrant $\frac{d\rho}{dt} = \alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}$;

α étant une conſtante arbitraire égale à la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$ lorſque $t = 0$.

Enſuite on aura

$$dQ = 2(\mu^{I}\pi^{I} - \mu^{II}\pi^{II})\frac{dr}{r^2} - \pi\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3}$$

$$dQ^{I} = 2(\mu\pi + \mu^{II}\pi^{II})\frac{dr}{r^2} + \pi^{I}\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3}$$

$$dQ^{II} = 2(-\mu\pi - \mu^{I}\pi^{I})\frac{dr}{r^2} + \pi^{II}\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3}$$

donc, en intégrant,

$$Q = -\frac{2(\mu^{I}\pi^{I} - \mu^{II}\pi^{II})}{r} - \int\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3} + k$$

$$Q^{I} = -\frac{2(\mu\pi + \mu^{II}\pi^{II})}{r} + \pi^{I}\int\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3} + k^{I}$$

$$Q^{II} = -\frac{2(-\mu\pi - \mu^{I}\pi^{I})}{r} + \pi^{II}\int\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3} + k;$$

k, k^{I} & k^{II} étant des conſtantes arbitraires.

Faiſant toutes ces ſubſtitutions dans les équations (K) & diviſant enſuite la ſeconde par m^2 & la troiſième par n^2, elles deviendront celles-ci :

$$\frac{d^2.r^2}{2dt^2} - \frac{A + B + C(1 - \mu^{I}\pi^{I} + \mu^{II}\pi^{II})}{r} + C\pi\int\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3} - Ck = 0,$$

$$\frac{d^2.r^2}{2dt^2} - \frac{A + B + C(1 - (\mu\pi - \mu^{II}\pi^{II})m)}{m^2 r} - \frac{B\pi^{I}}{m^2}\int\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r^3}\right)\frac{dt}{r^3} - \frac{Bk}{m^2} = 0,$$

$$\frac{d^2.r^2}{2dt^2} - \frac{A+B+C(1+\mu\pi+\mu^{I}\pi^{I})n)}{n^3 r} - \frac{A\pi^{II}}{n^2}\int\left(\alpha-\lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^2}$$

$$- \frac{Ak}{n^2} = 0,$$

lesquelles devront être identiques ; de sorte qu'on aura ces conditions à remplir :

$$1^{\circ}.\ A+B+C(1-\mu^{I}\pi^{I}+\mu^{II}\pi^{II})$$
$$= \frac{A+B+C(1-(\mu\pi-\mu^{II}\pi^{II})m)}{m^2}$$
$$= \frac{A+B+C(1+(\mu\pi+\mu^{I}\pi^{I})n)}{n^2};$$

$$2^{\circ}.\ C\pi = -\frac{B\pi^{I}}{m^2} = -\frac{A\pi^{II}}{n^2},$$

ou bien

$$\alpha = 0 \ \&\ \lambda = 0;$$

$$3^{\circ}.\ Ck = \frac{Bk}{m^2} = \frac{Ak^{II}}{n^2}.$$

Ces deux dernières conditions peuvent toujours se remplir par le moyen des constantes indéterminées k, k^{I} & k^{II} ; ainsi la difficulté ne consiste qu'à satisfaire à celles des n°. 1 & 2.

Or, si on fait pour abréger

$$\delta = \mu\mu+\mu\mu^{II}+\mu^{I}\mu^{II} = (1+m+n)(1+m+n)$$
$$(1-m+n)(1-m-n),$$

on pourra réduire les deux équations du n°. 1 à celle-ci par des transformations analogues à celles de l'article 27,

...(e).

$$\left.\begin{array}{l}(-C\pi+B\pi^{I}-A\pi^{II})\delta+\mu^{II}\lambda=0\\(C\pi+B\pi^{I}-A\pi^{II})\delta-\mu^{I}\lambda=0\end{array}\right\}\ \ldots\ (e).$$

Ainſi, il n'y aura qu'à combiner ces deux équations avec celles du n°. 2, ſavoir $C\pi=-\frac{B\pi^{I}}{m^{2}}=-\frac{A\pi^{II}}{n^{2}}$, ou bien $\alpha=0$ & $\lambda=0$; ce qui fait deux cas que nous allons examiner ſéparément.

XXX.

Soit d'abord $C\pi=-\frac{B\pi^{I}}{m^{2}}=-\frac{A\pi^{II}}{n^{2}}$,

donc $\pi^{I}=-\frac{m^{2}C\pi}{B}$, & $\pi^{II}=-\frac{n^{2}C\pi}{A}$;

mais on a $\pi-\pi^{I}-\pi^{II}=0$ (art. 29):

donc $\pi\left(1+\frac{m^{2}C}{B}+\frac{n^{2}C}{A}\right)=0$,

ſavoir $\pi\left(\frac{1}{C}+\frac{m^{2}}{B}+\frac{n^{2}}{A}\right)=0$.

Or, il eſt viſible que la quantité $\frac{1}{C}+\frac{m^{2}}{B}+\frac{n^{2}}{A}$ ne ſauroit jamais devenir nulle, à cauſe que les maſſes A, B, C, ſont des quantités poſitives; ainſi, il faudra que l'on ait $\pi=0$, & par conſéquent auſſi $\pi^{I}=0$, $\pi^{II}=0$; or, dans ce cas, on aura $\lambda=0$, & les deux équations (e) ci-deſſus auront lieu d'elles-mêmes; de ſorte que toutes les conditions ſe trouveront remplies, & le Problême des trois Corps ſera réſoluble exactement dans l'hypothèſe de

$\pi = 0$, $\pi^{I} = 0$, $\pi^{II} = 0$, ce qui donnera $n = m = 1$, & par conſéquent $r = r^{I} = r^{II}$; c'eſt à-dire, les diſtances entre les corps égales entr'elles, comme dans le cas de l'art. 14; mais avec cette différence, que dans le cas préſent, elles peuvent être variables.

Pour connoître le mouvement des Corps dans ce cas, on reprendra les équations différentielles de l'art. 29, leſquelles, en faiſant $f = Ck = Bk^{I} = Ak^{II}$, ſe réduiſent à cette équation unique

$$\frac{d.r^2}{2dt^2} - \frac{A+B+C}{r} - f = 0;$$

multipliant par $d.r^2$, & intégrant enſuite, on aura

$$\left(\frac{d.r^2}{2dt^2}\right)^2 - 2(A+B+C)r - fr^2 = H, \text{ } H \text{ étant une}$$

conſtante arbitraire; & de-là

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{(H+2(A+B+C)r+fr^2)}}$$

moyennant quoi on connoîtra t en r, & *vice-verſa*; r en t.

Maintenant, puiſque $\pi = 0$, $\pi^{I} = 0$, $\pi^{II} = 0$, on aura $Q = k$, $Q^{I} = k^{I}$, $Q^{II} = k^{II}$; donc (art. 22)

$$u^2 = u^{I2} = u^{II2} = \frac{2(A+B+C)}{r} + f.$$

De plus, ayant $\lambda = 0$, on aura $\frac{d\rho}{dt} =$ & cette conſtante α devra être déterminée, enſorte qu'elle ſatisfaſſe à l'équation (N) : on peut donner pour cela à t telle valeur qu'on voudra; mais en ne faiſant aucune ſuppoſition par-

ticulière, l'équation (*N*) devra être identique avec celle que nous avons trouvée ci-deſſus, pour la détermination de r; & leur comparaiſon donnera la valeur de α.

En effet, à cauſe de $r=r^{I}=r^{II}$, on aura $p=p^{I}=p^{II}=\frac{r^2}{2}$ donc $P=\frac{3r^4}{4}$; & de même, à cauſe de $u=u^{I}=^{II}$, on aura $v=v^{I}=v^{II}=\frac{u^2}{2}$ donc $U=\frac{3u^4}{4}$;

enſuite $M=M^{I}=M^{II}=\frac{r^2}{2}\left(\frac{2rdr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2$

$+r^2\alpha^2=3r^2\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2+r^2\alpha^2$;

& l'équation (*N*) deviendra

$$qr^4u^4-bu^2\left(3r^2\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2+r^2\alpha^2\right)+3\left(\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2+\alpha^2\right)^2=0,$$

ou bien

$$\left(3r^2u^2-3\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2-\alpha^2\right)^2=0;$$

d'ou l'on tire

$$3r^2u^2-3\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2-\alpha^2=0.$$

Or, on a déja trouvé $u^2=\frac{2(A+B+C)}{r}+f$,

donc ſubſtituant cette valeur, & réſolvant l'équation, il viendra

$$dt=\frac{rdr}{\sqrt{\left(-\frac{\alpha^2}{3}+2(A+B+C)r+fr^2\right)}}$$

Comparant donc cette équation avec la précédente, on aura $H = -\frac{\alpha^2}{3}$, & par conſéquent $\alpha = \sqrt{(-3H)}$; d'où l'on voit que H doit être néceſſairement une quantité négative.

On aura enſuite

$$\Pi = \Pi^{I} = \Pi^{II} = r^2 u^2 - \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 = \frac{\alpha}{3},$$

&

$$\Psi = \Psi^{I} = \Psi^{II} = \frac{r^2 u^2}{4} - \left(\frac{rdr}{2dt}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\alpha^2}{4 \cdot 3} + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{3};$$

donc l'équation (P) deviendra

$$\frac{\alpha}{3}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{B} + \frac{1}{A}\right)^2 = h^2,$$

d'où l'on tire

$$h = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{B} + \frac{1}{A}\right).$$

Or, puiſqu'on a déja trouvé $M = M^{I} M^{II}$

$= 3r^2\left(\frac{rd\cdot}{dt}\right)^2 + r^2\alpha^2$, & que $3r^2u^2 - 3\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 - \alpha^2 = 0$,

on aura $M = M^{I} = M^{II} = 3r^4u^2$;

d'ailleurs on a $4P = 3r^4$, & $u = u^{I} = u^{II}$;

donc on aura

$4Pu^2 - M = 0$, $4Pu^{I2} - M^{I} = 0$, $4Pu^{II2} - M^{II} = 0$;

& par conſéquent *fin.* $\psi = 0$, & *fin.* $\psi^{I} = 0$;

c'eſt-à-dire, $\psi = 0$ & $\psi^{I} = 0$; ce qui montre que les

B & C doivent se mouvoir dans un même plan fixe passant par le corps A.

Maintenant, si on substitue dans les expressions de $\frac{d\varphi}{dt}$, & $\frac{d\Psi^{I}}{dt}$ les valeurs de Π, Π^{I}, Ψ, Ψ^{I}, Ψ^{II}, & de h trouvées ci-dessus, on aura $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\Psi^{I}}{dt} = \frac{\alpha}{r^2 V}$;

& par conséquent en substituant la valeur ci-dessus de dt

$$d\varphi = \frac{dr}{rV\left(-1 + \frac{6(A+B+C)}{\alpha^2} r + \frac{3f}{\alpha^2} r^2\right)}$$

qui est l'équation polaire d'une section conique, rapportée au foyer, & dans laquelle $\frac{2(A+B+C)}{-f}$ est le grand axe, & $\frac{2\alpha^2}{3(A+B+C)}$ le paramètre.

Ainsi, les corps B & C décriront dans ce cas autour du corps A deux sections coniques semblables & égales, dont l'espece & la forme dépendront des quantités arbitraires f, & α, lesquelles pourront se déterminer par les équations $\alpha^2 = 3r^2u^2 - 3\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2$, & $f = u^2 - \frac{3(A+B+C)}{r}$ en donnant à u, r & $\frac{dr}{dt}$ les valeurs qui conviennent au premier instant.

XXXI.

Reſte à examiner le cas où $\alpha = 0$, & $\lambda = 0$; or, la ſuppoſition de $\lambda = 0$ réduit d'abord les équations (*e*) à celles-ci,

$$(-C\pi + B\pi^{I} - A\pi^{II})\delta = 0$$
$$(C\pi + B\pi^{I} - A\pi^{II})\delta = 0,$$

leſquelles donnent ou $= 0$, ou bien

$C\pi + B\pi^{I} - A\pi^{II} = 0$, & $C\pi + B\pi^{I} - A\pi^{II} = 0$;

c'eſt-à-dire, $C\pi = 0$ & $B\pi^{I} - A\pi^{II} = 0$.

Or, j'obſerve d'abord que ces deux dernières équations ſont inutiles; car on auroit d'abord $\pi = 0$, enſuite, à cauſe de $\pi^{II} = \pi = \pi^{I}$, on auroit $\pi^{II} = -\pi^{I}$; de ſorte que l'équation $B\pi^{I} - A\pi^{II} = 0$ deviendroit $(B + A)\pi^{I} = 0$, ce qui donneroit $\pi^{I} = 0$; on auroit donc $\pi = \pi^{I} = \pi^{II} = 0$, ce qui rentre dans le cas que nous avons examiné ci-deſſus.

Il faut donc faire $\delta = 0$, de ſorte que la ſolution du Problême ſera renfermée dans ces trois équations

$\delta = 0$, $\lambda = 0$, & $\alpha = 0$.

La première donnera (art. 29)

$$(1 + m + n)(1 + m - n)(1 - m + n)(1 - m - n) = 0$$

donc $1 \pm m \pm n = 0$,

& par conſéquent $r \pm r^{I} \pm r^{II} = 0$,

c'eſt-à-dire, que l'une des trois diſtances r, r^{I}, r^{II} doit être égale aux deux autres, & conſéquemment que les trois Corps doivent être toujours rangés dans une même ligne droite.

Ce cas eſt donc analogue à celui de l'art. 26, mais il eſt plus général en ce que les diſtances entre les corps peuvent être variables, pourvu que leurs rapports ſoient conſtans.

On déterminera ces rapports par l'équation $\lambda = 0$, & pour cela on pourra ſuppoſer, comme dans l'article cité, que les trois corps A, B, C, ſoient diſpoſés de ſuite dans une même ligne droite, enſorte que $r^{II} = r^{I} - r$, ce qui donnera $n = m - 1$; on ſubſtituera donc cette valeur de n dans l'expreſſion de λ de l'art. 29, & l'on aura une équation en m qui ſera la même que l'équation (d) de l'art. 26. Mais il faut voir encore ſi la condition de $\alpha = 0$ peut avoir lieu; & comme la conſtante α doit être déterminée par l'équation (N), tout ſe réduit à ſavoir ſi cette équation peut ſubſiſter en y faiſant $\alpha = 0$, c'eſt-à-dire $\frac{dp}{dt} = 0$ à cauſe de $\frac{dp}{dt} = \alpha - \lambda \int \frac{dt}{r}$ (art. 29) & de $\lambda = 0$.

Or, en ſuppoſant $\frac{dp}{dt}$ & ſubſtituant pour r^{I}, r^{II} & p, p^{I}, p^{II}, leurs valeurs (article cité) on aura

$$P = (\mu\mu^{I} + \mu\mu^{II} + \mu^{I}\mu^{II})r^{4},$$

$$M = (\mu + \mu^{I}\mu^{II^{2}} + \mu^{II}\mu^{I^{2}})r^{2}\left(\frac{rdr}{dt}\right)^{2},$$

$$M^{I} = (\mu^{I}m^{4} + \mu\mu^{II^{2}} + \mu^{II}\mu^{2})r^{2}\left(\frac{rdr}{dt}\right)^{2},$$

$$M^{II} = (\mu^{II}n^{4} + \mu^{I}\mu^{2} + \mu\mu^{I^{2}})r^{2}\left(\frac{rdr}{dt}\right)^{2},$$

$$\frac{dp\,dt^{I}+dp\,dt^{II}+a\,dt^{I}\,dt^{II}-dp}{at^{2}} = (\mu\mu^{I}+\mu\mu^{II}+\mu^{I}\mu^{II})\left(\frac{2r\,dr}{dt}\right)^{2};$$

mais par la nature des quantités μ, μ^{I}, μ^{II}, on a $\mu^{I}+\mu^{II}=1$, $\mu+\mu^{II}=m^{2}$, $\mu+\mu^{I}=n^{2}$: de plus, on a, en vertu de l'équation $\Delta=0$,

$$\mu\mu^{I}+\mu\mu^{II}+\mu^{I}\mu^{II}=0;$$

donc on aura auſſi

$$\mu+\mu^{I}\mu^{II}+\mu^{II}\mu^{I}=0,\quad \mu^{I}m^{4}+\mu\mu^{II}+\mu^{II}\mu^{2}=0,$$
$$\mu^{II}n^{4}+\mu^{I}\mu^{2}+\mu\mu^{I}=0:$$

de ſorte que toutes les quantités précédentes P, Σ, &c. ſeront nulles, & conſéquemment l'équation (N) ſe trouvera vérifiée d'elle-même.

XXXII.

Maintenant, il eſt clair qu'à cauſe de $\alpha=0$, & $\lambda=0$, les trois équations différentielles de l'art. 29 ſe réduiront à celle-ci.

$$\frac{d^{2}.r^{2}}{2dt^{2}}-\frac{F}{r}-f=0$$

en faiſant pour abréger

$$F=A+B+C(1-\mu^{I}\pi^{I}+\mu^{II}\pi^{II}),$$
$$\&\ f=Ck\,\frac{Bk^{I}}{m^{2}}=\frac{Ak^{II}}{n^{2}}.$$

Cette

Cette équation étant donc multipliée par $d.r^2$, & enſuite intégrée, donnera

$$\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 - 2Fr - fr^2 = H,$$

H étant une conſtante arbitraire;
d'ou l'on tire

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{(H+2Fr+fr^2)}},$$

moyennant quoi on déterminera t en r, & par conſéquent r & t.

De plus, ſi, dans les équations (J) de l'art. 22, on ſubſtitue les valeurs de Q, Q^I, Q^{II} de l'art. 29, on aura en vertu des équations du numero 1 du même article

$$u^2 = \frac{2F}{r} + f,\ u^{I2} = \frac{2m^2F}{r} + m^2f,\ u^{II2} = \frac{2n^2F}{r} + n^2f,$$

donc

$$v = \frac{2uF}{r} + \mu f,\ v^I = \frac{2u^IF}{r} + \mu^I f,\ = \frac{2\mu^{II}F}{r} + \mu^{II}f.$$

De-là on trouvera

$$\Pi = 2Fr + fr^2 - \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 = -H,$$

$$\Pi^I = m^2\left(2Fr + fr^2 - \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2\right) = -Hm^4;$$

$$\Pi^{II} = Hn^4,$$

$$\Psi = \mu^2\left(2Fr + fr^2 - \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2\right) = -H\mu^2 = -Hm^2n^2,$$

$$\Psi^{I} = -H\mu^{I2} = -Hn^2,$$

$$\Psi^{II} = -H\mu^{II2} = -Hm^2,$$

à cauſe de $\mu\mu^{I} + \mu\mu^{II} + \mu^{I}\mu^{II} = 0$,

& par conſéquent $\mu^2 = m^2n^2$, $\mu^{I2} = n^2$, $\mu^{22} = m^2$.

Donc, ſi on ſubſtitue ces valeurs dans l'équation (P), elle deviendra

$$-H\left(\frac{1}{C} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{A}\right)^2,$$

d'où

$$h = \left(\frac{1}{C} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{A}\right)\sqrt{-H},$$

d'où l'on voit que H doit être une quantité négative.

Or, à cauſe de $P = 0$, & de $\mathfrak{M} = 0$, $\mathfrak{M}^{I} = 0$, $\mathfrak{M}^{II} = 0$, on aura *ſin.* $\downarrow = 0$ & *ſin.* $\downarrow^{I} = 0$, ce qui montre que les deux corps B & C doivent ſe mouvoir dans un même plan fixe paſſant par le corps A, & l'on trouvera enſuite pour les angles de rotation

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\psi^{I}}{dt} = \frac{-H}{hr^2}\left(\frac{1}{C} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{A}\right) = \frac{\sqrt{-H}}{r^2}.$$

Et ſi l'on ſubſtitue la valeur de dt, trouvée ci-deſſus, on aura

$$d\varphi = \frac{dr}{r\sqrt{\left(-1 + \frac{2F}{-H}r + \frac{f}{-H}r^2\right)}}$$

équation polaire d'une ſection conique, rapportée au foyer, dans laquelle $\frac{2F}{f}$ ſera le grand axe, & $-\frac{2H}{F}$ le paramètre.

XXXIII.

Nous venons donc de voir que le Problême des trois Corps eſt réſoluble exactement, ſoit que les diſtances entre les trois corps ſoient conſtantes, ou qu'elles gardent ſeulement entr'elles des rapports conſtants, & cela dans deux cas : ſavoir lorſque les trois diſtances ſont égales entr'elles, enſorte que les trois corps forment toujours un triangle équilatere, & lorſque l'une des diſtances eſt égale à la ſomme ou à la différence des deux autres, enſorte que les trois corps ſe trouvent toujours rangés en ligne droite.

Or, ſi on ſuppoſe que les diſtances r, r^{I}, r^{II} ſoient variables, mais de manière que leurs valeurs ne s'écartent que très-peu de celles qu'elles ddvroient avoir, pour que l'un des cas précédens eût lieu, il eſt clair que le Problême ſera réſoluble à très-peu-près, & par les méthodes connues d'approximation ; mais nous n'entrerons pas ici dans ce détail, qui nous écarteroit trop de notre objet principal.

J'avoue au reſte qu'on pourroit réſoudre les Problêmes précédens d'une manière plus ſimple par les formules ordinaires du Problême des trois Corps entre les rayons rec-

teurs & les angles décrits par ces rayons, ſi on vouloit ſe borner d'abord à l'hypothèſe que les corps ſe meuvent dans un même plan fixe ; mais il ne ſeroit pas aiſé, ce me ſemble, d'en venir à bout par les mêmes formules, ſi on ſuppoſoit, comme nous l'avons fait, que les corps puſſent ſe mouvoir dans des plans différens.

CHAPITRE III.

Modification des formules du Chapitre premier, pour le cas où l'on suppose que l'un des trois Corps soit éloigné des deux autres.

XXXIV.

Le cas que nous allons examiner a lieu dans le Système du Monde, par rapport à ces trois Planètes, le Soleil, la Terre, & la Lune, dont les deux dernières sont beaucoup plus éloignées de la primière qu'elles ne le sont l'une de l'autre; mais nous ne considérons ici le cas dont il s'agit, que d'une manière générale, & seulement pour voir quelles modifications, cette supposition doit apporter aux formules générales de l'article 22.

Supposons donc que le corps C soit beaucoup plus éloigné des corps A & B que ceux-ci ne le sont entr'eux, ensorte que les quantités r^{I} & r^{II} soient fort grandes par rapport à la quantité r; pour cela nous prendrons une quantité i que nous supposerons constante & très-petite, & nous ferons $r^{I} = \frac{R}{i}$, $r^{II} = \frac{R^{I}}{i}$, ensorte que R & R^{I} soient des quantités finies & comparables à r. Or si on nomme, comme dans l'article 19, ζ^{II} l'angle formé au centre du corps A par les rayons recteur r & r^{I} des corps

B & C, on aura $cof.\ \zeta^{II} = \frac{r^2 + r'^2 - r''^2}{2rr'}$

d'où $r''^2 = r'^2 - 2rr'\ cof.\ \zeta^{II} + r^2$,

ou bien $R'^2 = R^2 - 2iRr\ cof.\ \zeta^{II} + i^2 r^2$.

Donc, si on fait $z = r\ cof.\ \zeta^{II}$,

on aura $R'^2 = Q^2 - 2iRz + i^2 r^2$;

donc $r'^2 = \frac{R^2}{i^2}$, $r''^2 = \frac{R^2}{i^2} - \frac{2Rz}{i} + r^2$,

De-là on aura

$$\frac{1}{r'} = \frac{i}{R}, \quad \frac{1}{r''} = \frac{i}{R} + \frac{i^2(2Rz - ir^2)}{2R^3}$$

$$+ \frac{3i^3(2Rz - ir^2)^2}{8R^5} + \frac{5i^4(2Rz - ir^2)^3}{16R^7} + \&c.$$

$$= \frac{i}{R} + \frac{i^2 z}{R^2} + \frac{i^3(3z^2 - r^2)}{2R^3} + \frac{i^4(5z^3 - 3zr^2)}{2R^4} + \&c$$

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{i^3}{R^3}, \quad \frac{1}{r''^3} = \frac{i^3}{R^3} + \frac{3i^4(2Rz - ir^2)}{2R^5}$$

$$+ \frac{15i^5(2Rz - ir^2)^2}{8R^7} + \frac{35i^6(2Rz - ir^2)^3}{16R^9} + \&c.$$

$$= \frac{i^3}{R^3} + \frac{3i^4 z}{R^4} + \frac{i^5(15z^2 - 3r^2)}{2R^5} + \frac{i^6(35z^3 - 15zr^2)}{2R^6} + \&c,$$

Donc (art. 22),

$$p = \frac{R^2}{i^2} - \frac{Rz}{i}, \quad p' = -\frac{Rz}{i} + r^2, \quad p'' = \frac{Rz}{i},$$

$$q = -\frac{3i^4 z}{R^4} - \frac{i^5(15z^2 - 3r^2)}{2R^5} - \frac{i^6(35z^3 - 15zr^2)}{2R^6} - \&c$$

$$q^{\mathrm{I}} = \frac{1}{r^3} - \frac{i_3}{R^3} - \frac{3i^4\zeta}{R^4} - \frac{i^5(15\zeta^2 - 3r^2}{2R^5}$$
$$- \frac{i^6(35\zeta^3 - 15\zeta r^2)}{2R^6} - \&c.$$

$$q^{\mathrm{II}} = -\frac{1}{r^3} + \frac{i^3}{R^3};$$

& de-là

$$p\,q = -\frac{3i^2\zeta}{R^2} - \frac{i^3(9\zeta^2 - 3r^2)}{2R^3} - \frac{i^4(10\zeta_3 - 12\zeta r^2)}{2R^4} - \&c.$$

$$p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}} = -\frac{R\zeta}{ir^3} + \frac{1}{r} + \frac{i^1 2}{R^2} + \frac{i^3(3\zeta^2 - r^2)}{R^3}$$
$$+ \frac{i^4(15\zeta^3 - 9r^2\zeta}{2R^4} + \frac{i^5(35\zeta^4 - 30\zeta^2r^2 + 3r^4)}{2R^5} + \&c.$$

$$p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{II}} = -\frac{R\zeta}{ir^3} + \frac{i^2 2}{R^2}.$$

O, comme $p\,q$ eſt une quantité très-petite de l'ordre de i^2, & que $p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}}, p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{II}}$ ſont des quantités fort grandes de l'ordre de $\frac{1}{i}$, il eſt clair qu'en ſubſtituant les valeurs de ces quantités drns l'équation (H), les termes $C\,p\,q$, $B\,p^{\mathrm{I}}\,q^{\mathrm{I}}$, $A\,p^{\mathrm{II}}\,q^{\mathrm{II}}$ ne pourront être homogènes, à moins que la maſſe C ne ſoit infiniment grande de l'ordre $\frac{1}{i^3}$ vis-à-vis des deux autres.

Suppoſons donc $C = \frac{D}{i^3}$, & l'équation (H) de l'art. 22 deviendra après les ſubſtitutions

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2}+\frac{1}{t}\left(\frac{(A+B)R}{r^3}-\frac{3D}{R^2}\right)z-\frac{B}{r}-\frac{D(5\zeta^2-3r^2)}{2R^3}$$
$$-\frac{iD(10\zeta^3-12\zeta r^2)}{2R^4}-\&c.=0;$$

d'où l'on voit que la quantité $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ eſt de l'ordre de $\frac{1}{i}$, de ſorte que la quantité $\frac{d\rho}{dt}$ ſera auſſi du même ordre.

Donc, ſi on fait, pour abréger,

$$\frac{d\sigma}{dt}=\left(\frac{(A+B)R}{r^3}-\frac{3D}{R^2}\right)z$$
$$-i\left(\frac{B}{r}+\frac{3D(3\zeta^2-r^2)}{2R^3}\right)$$
$$-i^2\left(\frac{D(5\zeta^3-6\zeta r^2)}{R^4}\right)$$
$$-\&c.\ldots\ldots\ldots\ldots(f)$$

on aura $\frac{d\rho}{dt}=-\frac{\sigma}{i}$ & il faudra prendre la valeur de σ, telle qu'elle ſoit nulle lorſque $t=0$.

XXXV.

$$qdp=-\frac{6i^2\zeta dR}{R^3}-\frac{i^3((15\zeta^2-3r^2)dR-3\zeta d.R\zeta)}{R^4}-\&c.$$

$$q^1dp^1=-\frac{d.R\zeta}{ir}\frac{2dr}{r^2}+\frac{i^2d.R\zeta}{R^3}+\frac{i(3\zeta d.R\zeta-Rd.r^2)}{R^4}$$
$$+\frac{i^3(15\zeta^2-3r^2)d.R\zeta-6R\zeta d.r^2)}{2R^5}$$

$$+\frac{i^3((35\zeta^3-15\zeta r^2)d.R\zeta-(15\zeta^2-3r^2)Rd.r^2)}{2R^6}+\&c.$$

$$q^{II}dp^{II}=-\frac{d.R\zeta}{ir^3}+\frac{i^2d.R\zeta}{R}.$$

De sorte que les valeurs de dQ, dQ^{I} & dQ^{II} deviendront

$$dQ=\frac{2dr}{r^2}+i^3\left(-\frac{d.r^2}{R^3}+\frac{3\zeta(d.R\zeta-\sigma dt)}{R^4}\right)$$
$$+i^4\left(-\frac{3\zeta d.r^2}{R^4}+\frac{(15\zeta^2-3r^2)(d.R\zeta-\sigma dt)}{2R^5}\right.$$
$$+i^5\left(-\frac{(15\zeta^2-3r^2)d.r^2}{2R^5}+\frac{(35\zeta^3-15\zeta r^2)(d.R\zeta-\sigma dt)}{2R^6}\right)$$
$$+\&c.$$

$$dQ^{I}=-\frac{1}{i}\left(\frac{d.R\zeta+\sigma dt}{r^3}\right)+i^2\left(\frac{-h\zeta dR+d.R\zeta+\sigma dt}{R^3}\right)$$
$$+\&c.$$

$$dQ^{II}=\frac{1}{i}\left(\frac{d.R\zeta+\sigma dt}{r^3}\right)-\frac{2dr}{r^2}-i^2\left(\frac{-6\zeta dR+d.R\zeta+\sigma dt}{R^3}\right)$$
$$-\&c.$$

Donc, faisant toutes ces substitutions dans les équations (K), elles deviendront

$$\frac{d^2.r^2}{2dt^2}-\frac{A+B}{r}-D\left(\frac{3\zeta^2-r^2}{R^3}+\int\left(-\frac{dr^2}{R^3}+\frac{3\zeta(d.R\zeta-\sigma dt)}{R^4}\right)\right)$$
$$-iD\left(\frac{15\zeta^3-9r^2\zeta}{2R^4}+\int-\frac{3\zeta d.r^2}{R^4}+\frac{(15\zeta^2-3r^2)(d.R\zeta-\sigma dt}{2R^5}\right)\right)$$

$$-i^2D\left(\frac{35\zeta^4-30\zeta^2r^2+3r^4}{2R^5}+\int\left(-\frac{(15\zeta^2-3r^2)d.r^2}{2R^5}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(35\zeta^3-15\zeta r^2)(d.R\zeta-\sigma dt)}{2R^5}\right)\right)$$

$$-\&c. = \textit{à une constante} \ldots\ldots (g)$$

$$\frac{d^2.R^2}{2i^2dt^2}-\frac{D}{i^3R}+\frac{B}{i}\left(\frac{R\zeta}{r^3}+\int\frac{d.R\zeta+\sigma dt}{r^3}\right)$$

$$-\frac{i(A+B)}{R}-\&c. = \textit{à une constante.}$$

$$\frac{d^2.R^2}{2i^2dt^2}-\frac{d^2.R\zeta}{idt^2}+\frac{d^2.r^2}{idt^2}-\frac{D}{i^2R}$$

$$-\frac{1}{i}\left(\frac{D\zeta}{R^3}+A\left(\frac{R\zeta}{r^3}+\int\left(\frac{d.R\zeta+\sigma dt}{r^3}\right)\right)\right)$$

$$-\frac{D(3\zeta^2-r^2)}{3R^5}-\frac{A}{r}-i\left(\frac{D(5\zeta^3-3\zeta r^2)}{2R^4}+\frac{A+B}{R}\right)$$

$$-\&c. = \textit{à une constante};$$

dont les deux dernières se réduisent à celles-ci :

$$\frac{d^2.R^2}{2dt^2}-\frac{D}{R}+iB\left(\frac{R\zeta}{r^3}+\int\left(\frac{d.R\zeta+\sigma dt}{r^3}\right)\right)+\frac{i^3(A+B)}{R}$$

$$+\&c. = \textit{à une constante} \ldots\ldots (h).$$

$$\frac{d^2.R\zeta}{dt^2}+\frac{D\zeta}{R^3}+(A+B)\left(\frac{R\zeta}{r^3}+\int\left(\frac{d.R\zeta+\sigma dt}{r^3}\right)\right)$$

$$-i\left(\frac{B}{r}+\frac{D(3\zeta^2-r^2)}{2R^5}+D\int\left(-\frac{d.r^2}{R^5}+\frac{3\zeta(d.R\zeta-\sigma dt)}{R^5}\right)\right)$$

$$-i^2D\left(\frac{5\zeta^3-3\zeta r^2}{R^4}+\int\left(-\frac{3\zeta d.r^2}{R^4}+\frac{(15\zeta^2-3r^2)(d.R\zeta-\sigma dt)}{2R^5}\right)\right)$$

$$-\&c. = \textit{à une constante} \ldots\ldots (i).$$

Ainſi, on aura à la place des équations (k) de l'art. 22 les trois équations (g), (h) & (i) dans leſquelles on n'a négligé que les quantités très-petites de l'ordre de i^3 & des ordres ſuivans ; & ces équations ſerviront à trouver les valeurs de r, R & ζ en t ; moyennant quoi le Problême ſera réſolu dans toute ſa généralité, puiſqu'il ne s'agira plus enſuite que de ſubſtituer ces valeurs dans les formules qui donnent les latitudes & les longitudes des corps B & C (art. 22). Or, comme la ſuppoſition de i très-petit ſimplifie auſſi beaucoup les ſubſtitutions dont il s'agit, nous allons donner encore les valeurs de $\sin.\psi$, $\sin.\psi^{I}$ & de $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\varphi^{I}}{dt}$, exprimé en r, R & ζ ; mais nous ne pouſſerons pas la préciſion au-delà des quantités de l'ordre de i.

XXXVI.

Pour cela nous commencerons par chercher les valeurs des vîteſſes u, u^{I}, u^{II} ; or, ſi dans les équations (J) on ſubſtitue à la place des quantités CQ, BQ^{I}, AQ^{II} leurs valeurs tirées des équations (k) on a en général

$$u^2 = \frac{d^2.r^2}{2dt^2} + \frac{A+B+C}{r} - C\,(p^{I}q^{I} - p^{II}q^{II})$$

$$u^{I2} = \frac{d^2.r^{I2}}{2dt^2} + \frac{A+B+C}{r} - B\,(pq + p^{II}q^{II})$$

$$u^{II2} = \frac{d^2.r^{II2}}{2dt^2} + \frac{A+B+C}{r^{II2}} - A\,(-pq - p^{I}q^{I}).$$

Donc faiſant ici les mêmes ſubſtitutions que ci-deſſus ; & ſuppoſant pour abreger

$$(K)\begin{cases} L = \frac{d^2.r^2}{2dt^2} + \frac{A+B}{r} - \frac{D(3\zeta^2-r^2)}{R^3} \\ M = \frac{d^2.R^2}{2dt^2} + \frac{D}{R} \\ N = \frac{d^2.R\zeta}{dt^2} + \frac{(A+B)R\zeta}{r^3} - \frac{D\zeta}{R^3} \end{cases}$$

on aura

$$u^2 = L - \frac{iD(15\zeta^2-9r^2\zeta)}{2R^5} - \&c.$$

$$u^{I_2} = \frac{M}{i^2} + \frac{BR\zeta}{ir^3} + \&c.$$

$$u^{II_2} = \frac{N}{i^2} + \frac{1}{i}\left(\frac{BR\zeta}{r^3} - N\right) + L - \frac{B}{r} + \frac{3D(3\zeta^2-r^2)}{2R^3} + \&c.$$

Or on a

$$P = pp^I + pp^{II} + p^Ip^{II} = pr^2 + p^Ip^{II} = \frac{R^2(r^2-\zeta^2)}{i^2};$$

donc

$$4Pu^2 = \frac{LR^2(r^2-\zeta^2)}{i^2} - \frac{D(r^2-\zeta^2)(15\zeta^3-9r^2\zeta)}{2iR^2} - \&c.$$

$$4Pu^I = \frac{MR^2(r^2-\zeta^2)}{i^4} + \frac{BR^3\zeta(r^2-\zeta^2)}{i^3r^3} + \&c.$$

$$4Pu^{II_2} = \frac{NR^2(r^2-\zeta^2)}{i^4} + \frac{BR^3\zeta(r^2-\zeta^2)}{i^3r^3} - \frac{NR^2(r^2-\zeta^2)}{i^3} - \&c$$

De plus, en faiſant pour abréger

$$\Gamma = \frac{R^2(d.r^2)^2 + r^2(d.R\zeta)^2 - 2R\zeta d.R\zeta d.r^2}{dt^2}$$
$$+ \frac{2\sigma(R\zeta d.r^2 - r^2 d.R\zeta)}{dt} + r^2\sigma^2$$

$$\Delta = \frac{R^2(d.R\zeta)^2 + r^2(d.R^2)^2 - 2R\zeta d.R\zeta d.R^2}{dt}$$
$$+ \frac{2\sigma(R^2 d.R\zeta - R\zeta d.R^2)}{dt} + R^2\sigma^2$$

$$\Lambda = \frac{R\zeta(d.R^2 d.r^2 - (d.R\zeta)^2 - d.(R^2r^2)}{dt^2}$$
$$- \frac{\sigma(R^2 d.r^2 - r^2 d.R^2)}{dt} - R\zeta\sigma^2$$

on aura

$$M = \frac{\Gamma}{i^2}, \quad M^{I} = \frac{\Delta}{i^2}, \quad M^{II} = \frac{\Delta}{i^2} + \frac{2\Lambda}{i^2} + \frac{\Gamma}{i^2},$$

donc ſubſtituant ces valeurs dans les expreſſions de *ſin* $\downarrow$, & *ſin.* $\downarrow^{I}$, & faiſant encore

$$h = \frac{k}{i^2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)$$

$$\lambda = B^2(r^2 - z^2)\left(M + \frac{iRR}{r^3}\right) - \frac{\Delta}{4}$$

$$\mu = R^2(r^2 - z^2)N + \frac{\Lambda}{2}$$

on aura aux quantités de l'ordre i^2 près.

$$\left.\begin{aligned} \text{ſin.}\downarrow &= \frac{AV\lambda + BV(\lambda - i\mu)}{k(A+B)r} \\ \text{ſin.}\downarrow^{I} &= \frac{iBV(\lambda - i\mu)}{k(A+B)R} \end{aligned}\right\} \therefore (l)$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned} \sin.\psi &= \frac{V\lambda}{k\,r} - \frac{iB\mu}{2k(A+B)rV\lambda} \\ \sin.\psi^{I} &= \frac{iBV\lambda}{k(A+B)R} \end{aligned}\right\} \ldots (l^{I})$$

la quantité k étant une conſtante qu'on déterminera par l'équation (P^{I}) comme on le verra ci-deſſous.

Ainſi, on connoîtra par ces formules les latitudes ψ & ψ^{I} des corps B & C par rapport à un plan fixe paſſant par A.

On voit par-là qu'on aura à très peu-près

$$\frac{\sin.\psi^{I}}{\sin.\psi} = \frac{iBr}{(A+B)R} = \frac{Br}{(A+B)r^{3}}$$

ce qui donne un rapport bien ſimple & très-remarquable entre les latitudes des corps B & C.

XXXVII.

On trouvera enſuite

$$\Pi = Lr^{2} = \left(\frac{d.r^{2}}{2dt}\right)^{2} - \frac{iD(15\zeta^{2}-9r^{2}\zeta)r^{2}}{2R^{4}} - \&c.$$

$$\Pi^{I} = \frac{1}{i^{4}}\left(MR^{2} - \left(\frac{d.R^{2}}{2dt}\right)^{2}\right) + \&c.$$

$$\Pi^{II} = \frac{1}{i^{4}}\left(MR^{2} - \left(\frac{d.R^{2}}{2dt}\right)^{2}\right) + \frac{1}{i^{3}}\left(\frac{BR^{3}\zeta}{r^{4}} - NR^{2} - 2MR\zeta - \frac{d.R^{2}d.R\zeta}{dt^{2}}\right) + \&c.$$

&, à cauſe de

$$v = \frac{M}{i^2} + \frac{1}{i}\left(\frac{BR\zeta}{r^3} - \frac{N}{2}\right) + \&c.$$

$$v^{I} = -\frac{N}{2i} + L - \frac{B}{2r} + \frac{3D(3\zeta^2 - r^2)}{4R^5} + \&c.$$

$$v^{II} = \frac{N}{2i} + \frac{B}{2r} - \frac{3D(3\zeta^2 - r^2)}{4R^5} + \&c.$$

on aura de même

$$\Psi = \frac{1}{i^4}\left(MQ^2 - \left(\frac{d.R^2}{2dt}\right)^2\right) + \frac{1}{i^3}\left(\frac{BR^2\zeta}{r^3} - \frac{NR^2}{2} - MR\zeta + \frac{d.R^2 d.R\zeta}{2dt^2}\right) + \&c.$$

$$\Psi^{I} = \frac{1}{i^2}\left(NRz - \left(\frac{d.R\zeta}{2dt}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{4}\right) + \frac{1}{i}\left(-\left(L - \frac{B}{2r} + \frac{3D(3\zeta^2 - r^2)}{4R^5}\right)Rz - \frac{Nr^2}{2} + \frac{d.R\zeta d.r^2}{2dt^2}\right) + \&c.$$

$$\Psi^{II} = \frac{1}{i^3}\left(NRz - \left(\frac{d.R\zeta}{2dt}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{4}\right) + \frac{1}{i}\left(\frac{B}{2r} - \frac{3D(3\zeta^2 - r^2)}{4R^5}\right)Rz + \&c.$$

Donc, ſi on ſubſtitue ces valeurs dans les expreſſions de $\frac{dp}{dt}$, & $\frac{d\varphi^2}{dt}$, & qu'on faſſe pour abréger

$$\pi = NRz - \left(\frac{d.R\zeta}{2dt}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{4}$$

$$\varepsilon = \frac{BR\zeta}{2r} - \frac{3D(3\zeta^2 - r^2)\zeta}{4R^2}$$

$$\varkappa = -LRz - \frac{Nr^2}{2} + \frac{d.Rz\,d.r^2}{2dt^2}$$

$$\rho = MR^2 - \left(\frac{d.R^2}{2dt}\right)^2$$

$$\nu = -MRz - \frac{NR^2}{2} - \frac{d.R^2\,d.Rz}{2dt^2}$$

on aura

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\pi + i\left(\varepsilon + \frac{B}{A+B}\varkappa\right)}{kr^2\cos.\psi^2} \\ \frac{d\varphi^{\mathrm{I}}}{dt} &= \frac{\rho + iB\left(\frac{R\zeta}{r^3} + \frac{\nu}{A+B}\right)}{kR^2\cos.\psi^{\mathrm{II}2}} \end{aligned}\right\} \ldots(m).$$

XXXVIII.

Voyons maintenant comment on doit déterminer la conſtante k & les autres conſtantes du Problême. Pour cela, on ſuppoſera, comme dans l'art. 22 que, lorſque $t =$, on ait $\frac{dr}{dt} = 0$, $\frac{d\zeta^{\mathrm{I}}}{dt} = 0$, & $\zeta^{\mathrm{II}} = 0$; par conſéquent $\frac{dr}{dt} = 0$, $\frac{dR}{dt} = 0$, $z = r$, & $\frac{d\zeta}{dt} = 0$,

à cauſe

à cauſe de $z = r\,cof.\,\zeta^{II}$; & l'équation (P^{I}) de l'article cité, donnera

$$k^2 = M\,R^2 + iB\left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{2MRr+NR^2}{A+B}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (n),$$

d'où l'on tirera aiſément la valeur de k en ayant ſoin de rapporter les valeurs de R, r, & de M, N au point où $t = 0$.

De plus, on ſe ſouviendra que la valeur de σ doit être priſe, enſorte qu'elle ſoit nulle lorſque $t = 0$.

XXXIX.

Au reſte, il eſt bon de remarquer que dès que l'on aura trouvé les latitudes ψ & ψ^{I}, on pourra avoir aiſément les valeurs des vîteſſes en longitude $\frac{d\varphi}{dt}$ & $\frac{d\varphi^{I}}{dt}$ par le moyen des viteſſes réelles u & u^{I}.

En effet, nommant $d\theta$ l'angle décrit par le rayon r dans le tems dt on aura, comme nous l'avons vu dans l'art 19 $u^2\,dt^2 = r^2\,d\theta^2 + dr^2$; or il eſt facile de voir que $d\theta^2 = cof.\,\psi^2 d\varphi^2 + d\psi^2$, donc $u^2dt^2 = r\,cof.\psi^2 d\varphi^2 + r^2 d\psi^2 + dr^2$; donc

$$(m)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{\sqrt{\left(\frac{u^2}{r^2} - \left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dr}{rdt}\right)^2\right)}}{cof.\,\Psi} \\ \text{\& de même} \\ \dfrac{d\varphi^{I}}{dt} = \dfrac{\sqrt{\left(\frac{u^{I2}}{r^{I2}} - \left(\frac{d\Psi^{I}}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dr^{I}}{r^{I}dt}\right)^2\right)}}{cof.\,\Psi} \end{cases}$$

donc en ſubſtituant les valeurs de u^2 & u^{I2}, on aura

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{V\left(\frac{L}{r^2} - \frac{d\Psi^2}{dt^2} - \left(\frac{dr}{rdt}\right)^2 - \frac{iD(1+\zeta^3 - qr^2\zeta)}{2R^4r^2}\right)}{cof.\,\Psi}$$

$$\frac{d\varphi^I}{dt} = \frac{V\left(\frac{M}{R^2} - \frac{d\Psi^{I2}}{dt^2} - \left(\frac{dR}{Rdt}\right)^2 + \frac{iB\zeta}{Rr^3}\right)}{cof.\,\Psi^I}$$

Ces formules peuvent quelquefois être plus commodes que les précédentes, ſur-tout lorſque les quantités r, R varient très-peu, & que les latitudes ψ, ψ^I ſont fort petites.

CHAPITRE IV.

De la théorie de la Lune.

§ I.

Application des formules du Chapitre précédent à cette théorie.

XL.

POUR faire cette application, il n'y a qu'à imaginer que le corps A que nous avons regardé comme immobile & auquel nous avons rapporté les mouvemens des deux autres, ſoit la Terre, que le corps B ſoit la Lune, & que le corps C que nous avons ſuppoſé beaucoup plus éloigné du corps A que ne l'eſt le corps B ſoit le ſoleil, dont la diſtance à la Terre eſt en effet trés- grande par rapport à la diſtance entre la Terre & la Lune. Ainſi r ſera le rayon recteur de l'orbite de la Lune autour de la Terre, r^{I} le rayon recteur de l'orbite apparente du Soleil, & r^{II} ſera la diſtance rectiligne entre le Soleil & la Lune.

De plus ψ repréſentera la latitude de la Lune par rapport à un plan fixe que nous prendrons pour l'écliptique, & ψ^{I} repréſentera la latitude du Soleil, φ ſera la longitude de la Lune, & φ^{I} celle du Soleil comptées à l'ordinaire dans l'écliptique

Pour ſavoir quel eſt ce plan que nous prenons ici pour l'écliptique, & que nous avons vu dans le Chapitre premier être celui par rapport auquel les mouvemens des corps B & C ſont les plus ſimples qu'il eſt poſſible, nous remarquerons que après les ſuppoſitions de l'article 38, on trouve, (lorſque $t = 0$) $\lambda = 0$, $\mu = 0$, & $\nu = 0$; de ſorte qu'on aura (auſſi article 36 form. l) $\psi = 0$, & $\psi^{I} = 0$; donc puiſqne on a en même tems

$\frac{dr}{dt} = 0$, $\frac{dr^{2}}{dt} = 0$ & $\zeta^{II} = 0$ (art. 38), il s'enſuit que le plan dont il s'agit eſt celui dans lequel le Soleil & la Lune ſe trouvent en même-tems, lorſqu'ils ſont à la fois en conjonction, & dans leurs apſides.

Maintenant, puiſque nous avons fait (art. 34) $r = \frac{R}{i}$ on aura $\frac{r}{r^{1}} = i\,\frac{r}{R}$; de ſorte que ſi on ſuppoſe (ce qui eſt permis) que les valeurs moyennes de r, & de R ſoient égales à l'unité, on aura i égal à la valeur moyenne de $\frac{r}{r^{1}}$, c'eſt-à-dire $i = \frac{parall.\ \odot}{parall.\ moy.\ \mathbb{C}}$; or, en prenant 57′ 30″ pour la parallaxe horizontale moyenne de la Lune, & 9″ pour celle du Soleil, on auroit $i = \frac{9}{3450} = \frac{1}{383}$ à très peu-près; d'où l'on voit que la quantité i ſera en effet très-petite.

Or, comme les obſervations nous apprennent que les orbites de la Lune & du Soleil ſont preſque circulaires, il eſt clair que les variations des quantités r & R devront être fort petites ; de ſorte que ſi on fait $r^2 = 1 + x$, $R^2 = 1 + X$, x & X devront être des quantités aſſez petites par rapport à l'unité ; & de plus, elles ne devront contenir aucun terme conſtant, autrement les valeurs moyennes de r & R ne ſeroient plus $= 1$ contre l'hypothèſe.

Donc le carré de la vîteſſe angulaire de la Lune $\frac{u^2}{r^2}$ ſera à-peu-près $= L = A + B - D(3z^2 - 1)$ & le carré de la vîteſſe angulaire du Soleil autour de la Terre $\frac{U^2}{r^2}$ 2 ſera à-peu-près $= M = D$; (art. 36) ; mais on ſait que la vîteſſe angulaire de la Lune eſt à celle du Soleil environ comme 13 à 1 ; de ſorte que leurs carrés ſont à-peu près entr'eux comme 169 à 1 : d'où l'on voit que la quantité D doit être beaucoup plus petite que la quantité $A + B$, & cela dans une raiſon peu différente de 1 à 169. Donc, ſi on ſuppoſe, ce qui eſt permis, $A + B = 1$, & qu'on faſſe $D = \alpha^2$, on aura $\alpha = \frac{1}{13}$ environ, & α^2 ſera preſque $= 2i$; enſorte que l'on pourra regarder les quantités i & α^2 comme du même ordre.

De plus, on a, comme l'on ſait $\frac{\mathbb{C}}{\odot} = i^3 \mathfrak{C}$, le nombre $\mathfrak{C}$ étant par la théorie de la préceſſion des équinoxes

de M. d'Alembert = environ $\frac{7}{3}$, & par celles des marées de M. Daniel Bernouilli = $\frac{5}{2}$; donc puisque $\mathfrak{C} = B$, & $\odot = C\frac{D}{i^3}$ (art. 34) on aura $B = \mathfrak{C}D = \mathfrak{C}\alpha^2$; ainsi, les quantités B & D seront à-peu-près du même ordre i.

Au reste, pour ce qui regarde la vraie valeur de α, il faudra la déterminer par le rapport connu entre le mouvement moyen du Soleil & celui de la Lune, rapport qui est, suivant les nouvelles Tables de M. Meyer de $11^s\,29^\circ\,45'\,40''$, 7 à $160^s\,9^\circ\,23'\,5''\,\frac{1}{2}$, quant au coëficient $\mathfrak{C}$ qui est encore assez incertain; comme il se trouve partout multiplié par les coëficients très petits α^2 & i, il suffira de le connoître à-peu près, puisque l'erreur, qui en pourroit résulter, ne seroit que de l'ordre de i^2.

XLI.

On fera donc toutes ces substitutions dans les formules du Chapitre précédent; & mettant pour plus de simplicité y à la place de Rz, on aura

$$(p)\ldots\frac{d^2\varpi}{dt^2} = y(1+x)^{-\frac{3}{2}} - 3\alpha^2 y(1+X)^{-\frac{3}{2}}$$
$$-i\alpha^2\left(\mathfrak{C}(1+x)^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{9}{2}y^2(1+X)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{3}{2}(1+x)(1+X)^{-\frac{3}{2}}\right)$$
$$-i^2\alpha^2\left(5y^3(1+X)^{-\frac{7}{2}} - 6y(1+x)^{-\frac{5}{2}}\right)$$
$$-\ \&c.$$

$$(q)\ldots\frac{d^2x}{2dt^2}=-(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\alpha^2\Big(3y^2(1+x)^{-\frac{5}{2}}-(1+x)(1+X)^{-\frac{3}{2}}$$

$$-\int(1+X)^{-\frac{3}{2}}dx+3\int y(1+X)^{-\frac{5}{2}}(dy-\sigma dt)\Big)$$

$$-i\alpha^2\Big(\tfrac{15}{2}y^3(1+X)^{-\frac{7}{2}}-\tfrac{9}{2}y(1+x)(1+X)(1+X)^{-\frac{5}{2}}$$

$$-3\int y(1+X)^{-\frac{5}{2}}dx+\tfrac{1}{5}\int y^2(1+X)^{-\frac{7}{2}}(dy-\sigma dt)$$

$$-\tfrac{1}{2}\int(1+x)(1+X)^{-\frac{5}{2}}(dy-\sigma dt)\Big)$$

$$-i^2\alpha^2\Big(\tfrac{35}{2}y^4(1+X)^{-\frac{9}{2}}-15y^2(1+X)^{-\frac{7}{2}}$$

$$+\tfrac{3}{2}(1+x)^2(1+X)^{-\frac{5}{2}}-\tfrac{15}{2}\int y^2(1+X)^{-\frac{5}{2}}(1+x)dx$$

$$+\tfrac{35}{2}\int y^3(1+X)^{-\frac{9}{2}}(dy-\sigma dt)$$

$$-\tfrac{15}{2}\int y(1+x)(1+X)^{-\frac{7}{2}}(dy-\sigma dt)\Big)$$

$$-\&c.=\textit{à une constante.}$$

$$(r)\ldots\ldots\frac{d^2X}{2dt^2}=-\alpha^2(1+X)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+i\alpha^2\mathfrak{C}\Big(y(1+x)^{-\frac{3}{2}}+\int(1+x)^{-\frac{3}{2}}(dy+\sigma dt)\Big)$$

$$+\&c.\ \textit{à une constante.}$$

$$(\int)\ldots\frac{d^2y}{dt^2}+y(+x)^{-\frac{3}{2}}+\alpha^2y(1+X)^{-\frac{3}{2}}+\int(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$(dy+\sigma dt)-i\alpha^2\big(6(+x)^{-\frac{1}{2}}+\tfrac{3}{2}y^2(1+X)^{-\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{2}$$

$$(1+X)^{-\frac{3}{2}}-\int(1+X)^{-\frac{3}{2}}dx+3\int y\,(1+X)^{-\frac{5}{2}}$$

$$(dy-\sigma dt)\big)-i^2\alpha^2\big(5y^3(1+X)^{-\frac{7}{2}}-3y(1+x)(1+X)-\tfrac{5}{2}$$

$$-3\int y(1+X)^{-\frac{5}{2}}dx+\tfrac{15}{2}\int y^2(1+X)^{-\frac{7}{2}}(dy-\sigma dt)$$

$$-\tfrac{3}{2}\int(1+x)\ (1+X)^{-\frac{5}{2}}(dy-\sigma dt)\big)$$

$$-\&c.=\textit{à une conſtante.}$$

Or, comme les quantités x & X ſont aſſez petites, on aura aſſez exactement

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{5x^3}{16}+\frac{35x^4}{128}-\&c.$$

$$(1+x)^{-\frac{3}{2}}=1-\frac{3x}{2}+\frac{15x^2}{8}-\frac{35x^3}{16}+\&c.$$

$$(1+X)^{-\frac{1}{2}}=i-\frac{x}{2}+\frac{3X^2}{8}-\frac{5X^3}{16}+\frac{35X^4}{128}-\&c.$$

$$(1+X)^{-\frac{3}{2}}=1-\frac{3X}{2}+\frac{15X^2}{8}-\frac{35X^3}{16}+\&c.$$

$$(1+X)^{-\frac{5}{2}}=1-\frac{5X}{2}+\frac{35X^2}{8}\ \frac{105X^3}{16}+\&c.$$

(1+X)

$$(1+X)^{-\frac{7}{2}}=1-\frac{7X}{2}+\frac{63X^2}{8}-\text{ \&c.}$$

$$(1+X)^{-\frac{9}{2}}=1-\frac{19}{X}+\frac{99X^2}{8}-\text{ \&c.}$$

De ſorte qu'en ſubſtituant ces valeurs dans les équations précédentes, & mettant de plus dans les trois dernieres la valeur de σ tirée de la premiere par l'intégration, on aura trois équations en x, X, y, & t qui ſeront intégrables du moins par approximation par les méthodes connues, puiſque les variables y ſeront toutes ſous une forme rationelle & entiere.

XLII.

Enſuite on aura (art. 36)

$$L=\frac{d^2x}{2dt^2}+(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\alpha^2\left(3y^2(1+X)^{-\frac{5}{2}}-(1+x)\,(1+X)^{-\frac{3}{2}},\right)$$

$$M=\frac{d^2X}{2dt^2}+\alpha^2(1+X)^{-\frac{1}{2}},$$

$$N=\frac{d^2y}{dt^2}+y(1+x)^{-\frac{3}{2}}-\alpha^2y(1+X)^{-\frac{3}{2}},$$

& de là

$$\lambda=M(1+x)\ \ (1+X)-y^2)-\tfrac{1}{4}(1+X)\left(\frac{dy}{dt}+\sigma\right)^2$$

$$+\frac{ydx}{2dt}\left(\frac{dy}{dt}+\sigma\right)+\tfrac{1}{4}(1+x)\,\frac{d\,X^2}{dt^2}$$

$$+i\mathfrak{G}\alpha^2\left((1+x)^{-\frac{1}{2}}(1+X)^{\frac{3}{2}}-y^2(1+x)^{-\frac{3}{2}}(1+X)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\mu=N\left((1+x)(1+X)-y^2\right)-\frac{y}{2}\left(\sigma^2+\frac{dy^2}{dt^2}-\frac{dxdX}{dt^2}\right)$$
$$-\frac{dx}{2dt}\left(\frac{dy}{dt}+(1+X)\sigma\right)-\frac{dX}{2dt}\left(\frac{dy}{dt}-(1+x)\sigma\right),$$

moyennant quoi on aura

$$(t)\begin{cases}\sin.\psi=\dfrac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{k}\left(\sqrt{\lambda}-\dfrac{i\mathfrak{G}\alpha^2}{2}\times\dfrac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\right)\\[2ex]\sin.\psi^1=\dfrac{i\mathfrak{G}\alpha^2(1+X)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda}}{k}\end{cases}$$

enfin, les formules de l'art. 39 donneront

$$(u)\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}=\dfrac{1}{\cos.\psi}\sqrt{\left(L(1+x)^{-1}-(1+x)^{-2}\dfrac{dx^2}{4dt^2}-\dfrac{d\psi^2}{dt^2}\right.}\\[2ex]\qquad\left.-i\alpha^2\left(\dfrac{15}{2}y^3(1+x)^{-1}(1+X)^{-\frac{7}{2}}-\dfrac{9}{2}y(1+X)^{-\frac{5}{2}}\right)\right)\\[2ex]\dfrac{d\varphi^1}{dt}=\dfrac{1}{\cos.\psi^1}\sqrt{\left(M(1+X)^{-1}-(1+X)^{-2}\dfrac{dX}{4dt^2}\right.}\\[2ex]\qquad\left.-\dfrac{d\psi^{12}}{dt^2}+i\mathfrak{G}\alpha^2y(1+X)^{-1}(1+x)^{-\frac{3}{2}}\right)\end{cases}$$

& quant à la conſtante k on la déterminera par l'équation

$$(x)\ldots k^2=M\left(1+X-2i\mathfrak{G}\alpha^2(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+X)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$+i\mathfrak{G}\alpha^2\left((1+x)^{-\frac{3}{2}}(1+X)^{\frac{3}{2}}-N(1+X)\right)$$

en y faiſant $t=0$.

On ſe ſouviendra au reſte que les valeurs de x, X & y doivent être priſes, enſorte que $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ ſoient nulles, lorſque $t=0$, & que y devienne alors

$$=Rr=(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+X)^{\frac{1}{2}};$$

de plus, il faudra auſſi que la valeur de σ tirée par l'intégration de l'équation (p) ſoit telle qu'elle s'évanouiſſe lorſque $t=0$.

---

§ 2.

De l'intégration des équations qui donnent les mouvemens de la Lune & du Soleil.

XLIII.

Le Problême des mouvemens de la Lune & du Soleil ſe réduit à la recherche des quantités x, X, & y, leſquelles dépendent de l'intégration des équations (q), (r), (s), de l'art: 41. à quoi il faut joindre l'équation (p) comme ſubſidiaire. Si les variables x, X, y ne ſe trouvoient dans les équations que ſous la forme linaire, l'intégration ſeroit facile par les méthodes connues; or il eſt aiſé de voir que les termes où ces variables ſe trouvent multipliées entr'elles ſont tous fort petits à cauſe que les coëficiers α^2 & i ſont très-petits & que les variables x & X ſont auſſi ſuppoſées

fort petites ; ainſi on poura d'abord négliger les termes dont nous venons de parler, pour pouvoir trouver les premieres valeurs approchées des variables, & ces valeurs ſerviront enſuite à en trouver d'autres plus exactes & ainſi deſuite.

Pour donner un eſſai du calcul qu'il faudra faire pour cet objet, nous rejetterons d'abord dans les équations du § précédent tous les termes multipliés par i ; & qui dépendent de la parallaxe du Soleil ; l'erreur ſera d'autant plus petite que ces termes ſont en même-tems multipliés par la quantité très-petie α^2.

De cette manière, les équations (p), (q), (r), (s), deviendront

$$(\alpha)\ldots \frac{d\sigma}{dt} = y(1+x)^{-\frac{3}{2}} - 3\alpha^2 y(1+X)^{-\frac{3}{2}}$$

$$(\beta)\ldots \frac{d^2x}{dt^2} - 2(1+x)^{-\frac{1}{2}} - 2\alpha^2(3y^2(1+X)^{-\frac{5}{2}} - (1+x)(1+X)^{-\frac{3}{2}} - \int(1+X)^{-\frac{3}{2}}dx + 3\int y(1+X)^{-\frac{5}{2}}(dy - \sigma dt) = \text{à une conſtante.}$$

$$(\gamma)\ldots \frac{d^2X}{dt^2} - 2\alpha^2(1+X)^{-\frac{1}{2}} = \text{à une conſtante}$$

$$(\delta)\ldots \frac{d^2y}{dt^2} + y(1+x)^{-\frac{3}{2}} + \alpha^2 y(1+X)^{-\frac{3}{2}} + \int(1+x)^{-\frac{1}{2}}dy + \sigma dt) = \text{à une conſt.}$$

où il n'y aura plus qu'à réduire en ſerie les puiſſances de $1+x$ & $1+X$.

XLIV.

Négligeons encore les produits de deux ou de plusieurs dimensions de x & X, on aura, à la place des équations précédentes, celles-ci :

$$\frac{d\sigma}{dt} = y\left(2 - 3\alpha^2 - \frac{3x}{2} + \frac{9\alpha^2 X}{2}\right),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1+4\alpha^2)x - \frac{3x^2}{4} - 2\alpha^2\left(3y^2\left(1 - \frac{5X}{2}\right) + \frac{3X}{2} + 3\int 1\left(-\frac{5X}{2}\right)y(dy - \sigma dt)\right) = const.$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \alpha^2 X = const.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y\left(1 + \alpha^2 - \frac{3x}{2} - \frac{3\alpha^2 X}{2}\right) + \left(\int 1 - \frac{3x}{2}\right)(dy + \sigma dt) = const.$$

lesquelles en substituant la valeur de σ se réduisent à ces trois-ci :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \alpha^2 X = const. \quad . \quad . \quad . \quad (\zeta).$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1+4\alpha^2)x - \frac{3x^2}{2} - 3\alpha^2\left(3y^2 - (1-3\alpha^2)\left(\int y dt\right)^2 + 3\int y dt \int y x dt\right) + 3\alpha^2\left((5y^2 - 1)X + 5\int X y dy + 9\alpha^2 \int y dt \int y X dt\right) = const. \quad . \quad . \quad . \quad (\zeta).$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (2+\alpha^2)y + (1-3\alpha^2)\int dt\int y\,dt$$

$$-\frac{3}{2}\left(xy+\int x\,dy+\int dt\int yx\,dt+(1-3\alpha^2)\int x\,dt\int y\,dt\right)$$

$$-\frac{3\alpha^2}{2}\left(Xy-3\int dt\int yX\,dt\right)$$

$$= const. \ldots\ldots (n).$$

L V.

Comme les variables x & X ſont ſuppoſées fort petites vis-à-vis de la variable y qui eſt finie, on peut d'abord négliger dans l'équation (n) les termes qui renferment x & X; on aura ainſi cette première équation approchée

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (2+\alpha^2)y + (1-3\alpha^2)\int dt\int y\,dt = const.$$

laquelle étant différentiée deux fois devient

$$\frac{d^4y}{dt^2} + (2+\alpha^2)\frac{d^2y}{dt^2} + (1-3\alpha^2)y = 0$$

qui eſt intégrable par les méthodes connues.

Pour en trouver l'intégrable, il n'y a qu'à ſuppoſer $y = f\cos.(pt+a)$, ou bien, puiſqu'on veut que $\frac{dy}{dt} = 0$, lorſque $t = 0$, on fera ſimplement $y = f\cos. pt$, & l'on aura, après les ſubſtitutions, cette équation en p

$$p^4 - (2+\alpha^2)p^2 + 1 - 3\alpha^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$p^2 = 1 + \frac{\alpha^2}{2} \pm 2\alpha\sqrt{\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right)}$$

d'où l'on tire

$$p^2 = 1 + \frac{\alpha^2}{2} \pm 2\alpha\sqrt{\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)}$$

ou bien en négligeant les puiſſances de α plus hautes que la ſeconde

$$p^2 = 1 \pm 2\alpha + \frac{\alpha^2}{2}$$

&

$$p = 1 \pm \alpha - \frac{\alpha^2}{2}.$$

Donc dénotant par p l'une de ces valeurs, & par q l'autre, on aura

$$y = f \cos. pt + q \cos. qt$$

f & g étant des conſtantes indéterminées qui doivent être telles que lorſque $t = 0$ on ait $y = R = 1$; ce qui donne $f + g = 1$.

Cherchons maintenant d'après cette première valeur approchée de y, celle de $\sin. \downarrow$ par les formules (t) de l'article 42 ; on aura, en négligeant les quantités x & X, $M = \alpha^2$; donc auſſi $k^2 = \alpha^2$, & $k = \alpha$ (équation (x)) ; donc

$$\lambda = \alpha^2(1 - y^2) - \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dt} + \sigma\right)^2,$$

&

$$\sin. \downarrow = \frac{\nu\lambda}{\alpha}.$$

Or $\frac{dy}{dt} = -pf\,sin.\,pt - qg\,sin.\,qt$,

$$\sigma = \int y\,dt = \frac{f\,sin.\,pt}{p} + \frac{g\,sin.\,qt}{q},$$

Donc

$$\frac{dy}{dt} + \sigma = \frac{f(1-p^2)}{p}\,sin.\,pt + \frac{g(1-q^2)}{q}\,sin.\,qt.$$
$$= \mp 2\alpha\,(f\,sin.\,pt - g\,sin.\,qt)$$

en négligeant les puiſſances ſupérieures de α; donc

$$\lambda = \alpha^2\big(1 - (f\,cos.\,pt + g\,cos.\,qt)^2$$
$$-(f\,sin.\,pt - g\,sin.\,qt)^2\big) =,$$

$$\alpha^2\big(1 - f^2 - g^2 - 2fg(cos.\,pt\,.\,cos.\,qt - sin.\,pt\,.\,sin.\,qt)\big)$$
$$= \alpha^2\,1 - f^2 - g^2 - 2fg\,cos.\,(p+q)t\,;$$

mais $f + g = 1$; donc $1 = f^2 + g^2 + 2fg$; donc

$$\lambda = 2\alpha^2 fg\big(1 - cos.(p+q)t\big) = 4\alpha^2 fg \times \big(sin.\,\tfrac{p+q}{2}\,t\big)^2;$$

donc enfin

$$sin.\,\downarrow = 2\sqrt{fg} \times sin.\,\tfrac{p+q}{2}\,t.$$

Or, comme on doit avoir $f+g=1$, on peut ſuppoſer

$$f = (cos.\,\tfrac{l}{2})^2 \;\&\; g = (sin.\,\tfrac{l}{2})^2;$$

& l'on aura

$$sin.\,\downarrow = sin.\,l \times sin.\,\tfrac{p+q}{2}\,t,$$

l'angle

l'angle l étant arbitraire & dépendant de l'inclinaiſon primitive de l'orbite de la Lune : en effet, il eſt clair que la plus grande valeur de $\sin.\downarrow$ ſera $= \sin. l$ de ſorte que l exprimera la plus grande latitude, c'eſt à dire l'inclinaiſon de l'orbite ; donc puiſqu'on ſait par les obſervations que l'inclinaiſon de l'orbite lunaire eſt aſſez petite, & d'environ $5° 8'$, la conſtante g ſera toujours très-petite & la conſtante f preſqu'égale à l'unité ; car on aura à peu près

$$g = (\sin. 2°, 34')^2 = \text{environ } \frac{1}{500};$$

de ſorte que la quantité g eſt encore plus petite que la quantité i qui exprime le rapport des parallaxes de la Lune & du Soleil ; d'où il s'enſuit qu'on pourra négliger ſans ſcrupule les termes qui ſe trouveront multipliés par le carré & les puiſſances plus hautes de g.

XLVI.

Il eſt facile de voir, par l'expreſſion de $\sin.\downarrow$ qu'on vient de trouver que l'angle $\frac{p+q}{2}t$ n'eſt autre choſe que la diſtance de la Lune au nœud, c'eſt-à-dire l'argument de latitude ; d'où il s'enſuit que ſi on retranche cet angle de la longitude de la Lune dans ſon orbite, on aura la longitude du nœud. Donc, ſi ht denote la longitude moyenne de la Lune, on aura $\left(h - \frac{p+q}{2}\right)t$ pour la longitude moyenne du nœud ; or, les longitudes

moyennes étant à peu-près les mêmes dans les orbites des planètes & dans l'écliptique, ht sera la valeur moyenne de φ, & h sera par conséquent égale à ce qu'il doit y avoir de constant dans la valeur de $\frac{d\varphi}{dt}$. Or, les formules de l'article 42 donnent, en rejettant x & ψ,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{L} = \sqrt{(1 - \alpha^2(3y^2 - 1))},$$

& à cause de $y = f \cos. pt$, on aura

$$h = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{3f^2}{2} - 1\right)\alpha^2\right)} = 1 - \frac{\alpha^2}{4}$$

à-peu-près.

Mais on a aussi $\frac{p+q}{2} = 1 - \frac{\alpha^2}{4}$, d'où l'on voit que la position du nœud est fixe du moins par cette première approximation; ce qui ne doit pas paroître surprenant vu que les valeurs de p & q ne peuvent tout au plus être censées exactes qu'aux quantités de l'ordre de α^2 près.

Pour savoir maintenant laquelle des deux valeurs

$1 \pm \alpha - \frac{\alpha^2}{4}$ doit être prise pour p; on remarquera qu'en supposant l'inclinaison de l'orbite nulle, on a

$y = f \cos. pt = \cos. pt$; mais on a $y = R\zeta$ (article 41)

$= Rr \cos. \zeta^{II} = \cos. \zeta^{II}$ (article 34), donc

$\cos. pt = \cos. \zeta^{II}$ & $pt = \zeta^{II} = \varphi - \varphi^{I}$

puisque ζ^{II} n'est autre chose que l'angle compris entre les deux rayons r & r^{I}; donc $p = h - h^{I}$, en nommant ht,

& $h^1 t$ les valeurs moyennes de φ, & de φ^1 ; or on a déja trouvé $h = 1 - \frac{\alpha^2}{4}$; & pour avoir h^1, on prendra la partie conſtante de $\frac{d\varphi^1}{dt}$ qui eſt $= \sqrt{M} = \alpha$; de ſorte que

$h^1 = \alpha$, & par conſéquent $p = 1 - \alpha - \frac{\alpha^2}{4}$;

donc $q = 1 + \alpha - \frac{\alpha^2}{4}$.

Ainſi, il faudra toujours avoir ſoin dans la ſuite de prendre pour p une valeur telle que ſes deux premiers termes ſoient $1 -$, & pour q une valeur dont les deux premiers termes ſoient $1 + \alpha$; cette remarque eſt d'autant plus importante que les quantités p & q ſeront données dorenavant par des équations particulieres dont chacune montera cependant au quatrième degré, comme on le verra ci-après.

XLVII.

Ayant trouvé la première valeur approchée de y, on la ſubſtituera dans l'équation (ζ) qui donne la valeur de x, en y négligeant d'abord les termes, où x & y ſont mêlés ; ce qui la réduit à celle-ci :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (1 + 4\alpha^2)x - \alpha^2(9y^2 - 3(\int y dt)^2) = const.$$

or, puiſque

$$y = f \cos. pt + g \cos. qt,$$

on aura, en négligeant les g^2,

$$y^2 = f^2 \cos. pt^2 + 3fg \cos. pt . \cos. qt$$
$$= \tfrac{1}{2} f^2 (1+\cos.2pt) + fg(\cos.(p+q)t + \cos.(p-q)t)$$

&

$$\int y dt = \frac{f \sin. pt}{p} + \frac{g \sin. qt}{q},$$

$$(\int y dt)^2 = \frac{f^2}{p^2} \sin. pt^2 + \frac{2fg}{pq} \sin. pt . \sin. qt$$
$$= \frac{f^2}{2p^2}(1-\cos.2pt) - \frac{fg}{pq}(\cos.(p+q)t - \cos.(p-q)t);$$

donc substituant ces valeurs rejettant tous les termes constants, à cause qu'il ne doit y en avoir aucun dans la valeur de x par l'hypothèse, on aura

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1+4\alpha^2)x - \frac{3\alpha^2 f^2(3p^2+1)}{2p^2} \cos. 2pt$$
$$- \frac{3\alpha^2 fg}{pq}\Big((3pq+1)\cos.(p+q)t + (3pq-1)\cos.(p-q)t\Big)$$
$$= 0.$$

Ainsi la valeur de x sera de cette forme

$$x = a \cos. mt + \alpha^2 f^2 A \cos. 2pt$$
$$+ \alpha^2 fg(B \cos.(p+q)t + B^1 \cos.(p-q)t);$$

& la substitution faite, on aura

$$a \cos. mt(-m^2+1+4\alpha^2)$$
$$+ \alpha^2 f^2 \cos. 2pt\left(A(-4p^2+1+4\alpha^2) - \frac{3(3p^2+1)}{2p^2}\right)$$

$$+\alpha^2 fg\, cos.(p+q)t\left(B(-(p+q)^2+1+4\alpha^2)-\frac{3(3pq+1)}{pq}\right)$$

$$+\alpha^2 fg\, cos.(p-q)t\left(A^1(-(p-q)^2+1+4\alpha^2)-\frac{3(3pq-1)}{pq}\right)$$

$$=0.$$

Donc égalant à zero les coefficiens de chaque *cosinus*, on aura les équations ſuivantes :

$$-m^2+1+4\alpha^2=0$$

$$A(-4p^2+1+4\alpha^2)-\frac{3(3p^2+1)}{2p^2}=0,$$

$$B(-(p+q)^2+1+4\alpha^2)-\frac{3(3pq+1)}{pq}=0,$$

$$B^1(-(p-q)^2+1+4\alpha)-\frac{3(3pq-1)}{pq}=0;$$

d'où l'on tire

$$m=\sqrt{(1+4\alpha^2)}$$

$$A=\frac{3(3p^2+1)}{2p^2(-4p^2+1+4\alpha^2)}=-2 \text{ à-peu-près.}$$

$$B=\frac{3(3pq+1)}{pq(-(p+q)^2+1+4\alpha^2)}=-4,$$

$$B^1=\frac{3(3pq-1)}{pq(-(p-q)^2+1+4\alpha^2)}=6.$$

La conſtante a qui eſt demeurée indéterminée dépend de l'excentricité de l'orbite lunaire, & doit par conſéquent être fixée par les obſervations.

Ainſi l'angle mt repréſentera l'anomalie moyenne de la Lune, c'eſt-à-dire ſa diſtance à l'apogée ; de ſorte que

$(h-m)t$ ſera la longitude moyenne de l'apogée, ht étant comme plus haut celle du lieu de la Lune; mais comme nous avons négligé dans l'équation (ζ) des termes où x ſe trouve multiplié prr α^2 on doit s'attendre que la valeur de m ne ſera exacte qu'aux quantités de l ordre de α^2 près; c'eſt pourquoi on aura dans cette premiere approximation $m=1$, & $m-h=0$, en rejettant les α^2; ce qui donneroit les apſides fixes.

Venons maintenant à l'équation (ε) qui donne la valeur de X; & comme cette quantité ne doit contenir aucun terme tout conſtant, il eſt clair qu'on aura ſimplement

$\frac{d^2X}{dt^2}+\alpha^2X=0$; & que la valeur de X ſera de cette forme

$$X=b\ cof.\ nt$$

d'où l'on trouvera par la ſubſtitution

$$-n^2+\alpha=0,\ \&\ n=\alpha.$$

Le coefficient indéterminé b dépend de l'excentricité de l'orbite du Soleil, & nt eſt par conſéquent l'angle de l'anomalie moyenne; de ſorte que $(n-b^1)t$ ſera la longitude de l'apogée du Soleil, qui eſt ici nulle à cauſe que $b^1=\alpha$, & $n=\alpha$.

XLVIII.

Puiſqu'on connoît déja la forme des premiers terme des valeurs y, x & X, on pourra aiſément trouver les ſuivans

& rectifier en même-temps les coefficiens de ceux qu'on a déja trouvés; pour cela, il n'y aura qu'à ſubſtituer dans les termes négligés des équations propoſées, les valeurs qu'on vient de trouver, & l'on aura la forme des termes qu'il faudra introduire dans les nouvelles valeurs de y, x & X; on donnera à tous les termes des coefficiens indéterminés, & la ſubſtitution faite, on fera égaux à zero les termes analogues, c'eſt-à-dire ceux qui renferment les même *coſinus*; on aura par-là autant d'équations qu'il en faudra pour la détermination de tous les coefficiens.

Ainſi reprenant l'équation (n) & ſubſtituant dans les termes qui renferment x & X les valeurs de x, X & y trouvées ci-deſſus, il viendra des termes de la forme

$af\ cof.(p \pm m)t$, $ag\ cof.(q \pm m)t$,

$\alpha^2 f^3\ cof.(2p \pm p)t$, $\alpha^2 f^2 g\ cof.(2p \pm q)t$,

$\alpha^2 f^2 g\ cof.(p \pm q \pm p)t$,

$\alpha^2 f^2 g\ cof.(p \pm q \pm q)t$, $bf\ cof(p \pm n)t$,

& $bg\ cof.(q \pm n)t$;

on ſuppoſera donc

$$y = f\ cof. + g\ cof.\ qt + af P\ cof.(p+m)t$$
$$+ af P^1\ cof.(p-m)t + ag Q\ cof.(q+m)t$$
$$+ ag Q^1\ cof.(q-m) + , \&c.$$

& prenant pour x & X les expreſſions de l'art. 47, on aura l'équation ſuivante, dans laquelle j'ai négligé les qnantités affectées de α^2 de $a\alpha^2$ & de α^4, à cauſe que l'on a né-

gligé dans l'équation (n) les termes où x ſe trouvoit à la ſeconde dimenſion,

$$\begin{aligned}
&\cos.pt\Big(f\Big(-p^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{p^2}\Big)\\
&\quad-\frac{3\alpha^2f^3A}{4}\Big(1-1-\frac{1}{p^2}+\frac{1-3\alpha^2}{p^2}\Big)\Big)\\
&+\cos.qt\Big(g\Big(-q^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{q^2}\Big)\\
&\quad-\frac{3\alpha^2f^2gB}{4}\Big(1-\frac{p}{q}-\frac{1}{q^2}+\frac{1-3\alpha^2}{pq}\Big)\\
&\quad-\frac{3\alpha^2f^2gB'}{4}\Big(1-\frac{p}{q}-\frac{1}{q^2}-\frac{1-3\alpha^2}{pq}\Big)\Big)\\
&+\cos.(p+m)t\Big(afP\Big(-(p+m)^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{(p+m)^2}\Big)\\
&\quad-\frac{3af}{4}\Big(1+\frac{p}{p+m}-\frac{p}{(p+m)^2}-\frac{1-3\alpha^2}{p(p+m)}\Big)\Big)\\
&+\cos.(p-m)t\Big(afP'\Big(-(p-m)^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{(p-m)^2}\Big)\\
&\quad-\frac{3af}{4}\Big(1+\frac{p}{p-m}-\frac{1}{(p-m)^2}-\frac{1-3\alpha^2}{p(p-m)}\Big)\Big)\\
&+\cos.(q+m)t\Big(agQ\Big(-(q+m)^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{(q+m)^2}\Big)\\
&\quad-\frac{3ga}{4}\Big(1+\frac{q}{q+m}-\frac{1}{(q+m)^2}-\frac{1-3\alpha^2}{q(q+m)}\Big)\Big)\\
&+\cos.(q-m)t\Big(agQ'\Big(-(q-m)^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{(q-m)^2}\Big)\\
&\quad-\frac{3ga}{4}\Big(1+\frac{q}{q-m}-\frac{1}{(q-m)^2}-\frac{1-3\alpha^2}{(q-m)^2}\Big)\Big)\\
&+\&c.=0.
\end{aligned}$$

On

On égalera donc à zero les coefficiens de ces différens *cosinus*, & l'on aura

$$1^{\circ}. \quad -p^2 + 2 + \alpha^2 - \frac{1-3\alpha^2}{p^2} = 0;$$

équation d'où l'on tirera la même valeur de p que ci-dessus (art. 45), de sorte qu'on aura

$$p = 1 - \alpha - \frac{\alpha^2}{4},$$

& l'on sera maintenant assuré que cette valeur est exacte jusqu'aux quantités de l'ordre de α^2 inclusivement.

$$2^{\circ}. \quad -q^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{q^2}-\frac{3\alpha^2 f^2(B+B^1)}{4}\left(1-\frac{1}{q^2}\right)$$
$$+\frac{3\alpha^2 f^2(B-B^1)}{4}\times\frac{p^2-1+3\alpha^2}{pq}=0;$$

or, comme nous négligeons les quantités de l'ordre de α^4 on aura (en mettant pour p & q leurs valeurs approchées)

$$\frac{p^2-1+3\alpha^2}{pq} = -2\alpha;$$

de sorte qu'à cause de $B = -3$, & $B^1 = 6$ (art. 48) l'équation précédente se réduira à

$$-q^2+2+\alpha^2\,\frac{1-3\alpha^2}{q^2}-\frac{3\alpha^2 f^2}{2}\left(1-\frac{1}{q^2}\right)$$
$$+15f^2\alpha^3=0,$$

ou bien

$$q^4-\left(2+\alpha^2-\frac{3\alpha^2 f^2}{2}+15f^2\alpha^3\right)q^2$$
$$+1-3\alpha^2-\frac{3\alpha^2 f^2}{2}=0;$$

d'où l'on tire d'abord, aux quantités de l'ordre α^3 près, en ayant égard à la remarque de l'art 46,

$$q^2 = 1 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{3\alpha^2 f^2}{4} + 2\alpha\sqrt{\left(1 + \frac{15 f^2 \alpha}{4}\right)}$$

$$= 1 + 2\alpha + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{3\alpha^2 f^2}{4} + \frac{15 f^2 \alpha^2}{4}$$

$$= 1 + 2\alpha + \frac{\alpha^2}{2} + 3 f^2 \alpha^2 ;$$

& de-là

$$q = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3 f^2 \alpha^2}{2} - \frac{4\alpha^2}{8} = 1 + \alpha - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3 f^2 \alpha^2}{2}.$$

On aura donc ici

$$\frac{p+q}{2} = 1 + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3 f^2 \alpha^2}{4},$$

par conſéquent le mouvement moyen du nœud qui eſt repréſenté par $(h - \frac{p+q}{2} t$ (art. 46) ſera $= - \frac{3 f^2 \alpha^2}{4} t$ ce qui s'accorde avec les obſervations

$$3^\circ.\ P\left(-(p+m)^2 + 2 + \alpha^2 - \frac{1 - 3\alpha^2}{(p+m)^2}\right)$$

$$- \frac{3}{4}\left(1 + \frac{p}{p+m} - \frac{1}{(p+m)^2} - \frac{1 - 3\alpha^2}{p(p+m)}\right) = 0 ;$$

$$4^\circ.\ P^1\left(-(p-m)^2 + 2 + \alpha^2 - \frac{1 - 3\alpha^2}{(p-m)^2}\right)$$

$$- \frac{3}{4}\left(1 + \frac{p}{p-m} - \frac{1}{(p-m)^2} - \frac{1 - 3\alpha^2}{p(p-m)}\right) = 0 .$$

5°. &c.

d'où l'on tire à-peu-près

$$P = -\frac{1}{4},\ P^1 = \frac{3}{4},\ Q = -\frac{1}{4},\ Q^1 = \frac{3}{4}\ \text{&c.}$$

XLIX.

On repaſſera préſentement à l'équation (ζ) pour trouver une valeur de x plus exacte que celle de l'art. 47.

Pour cet effet, on commencera par ſubſtituer dans les termes de cette dernière équation qui ſuivent les deux premiers, à la place de x, X & y leurs valeurs trouvées dans les articles précédens, & négligeant les quantités de l'ordre de g^2, auſſi bien que celles qui ſeroient affectées de α^2 multipliée par a^2, $a\alpha^2$, b^2, $b\alpha^2$ & α^4, à cauſe que nous avons rejetté dans la même équation les termes de l'ordre α^2 dans leſquels x & X pouvoient former enſemble des produits de deux dimenſions, on aura par ces ſubſtitutions des termes de la forme,

$$\alpha^2 f^2 \cos. 2pt,\ \alpha^2 fg \cos. (p \pm q)t,\ \alpha^2 af^2 \cos.(p \pm m \pm p)t,$$
$$\alpha^2 agf \cos.(p \pm m \pm q)t,\ \alpha^2 f^4 \cos.4pt,\ \alpha^2 f^3 g \cos.(3p \pm q)t,$$
$$\alpha^2 bf^2 \cos.(2p \pm n)t,\ \alpha^2 b \cos. nt,\ \&\ \alpha^2 bgf \cos.(p \pm q \pm n)t:$$

c'eſt pourquoi on ſuppoſera

$$x = a \cos. mt + \alpha^2 f^2 A \cos. 2pt$$
$$+ a^2 fgB \cos.(p+q)t + \alpha^2 fgB^{\mathrm{I}} \cos.(p-q)t$$
$$+ \alpha^2 af^2 C \cos.(2p+m)t + \alpha^2 af^2 C^{\mathrm{I}} \cos.(2p-m)t$$
$$+ \alpha^2 agfD \cos(p+q+m)t + \alpha^2 agf \cos.(p+q-m)t$$
$$+ \&c.$$

& ſubſtituant cette valeur de x auſſi bien que celles de

y & X des articles précédens, on aura, en négligeant ce qu'on doit négliger,

$$a\,\mathrm{cos.}\,mt\Big(-m^2+1+4\alpha^2-\frac{9\alpha^2f^2}{2(p^2-m^2)}-9\alpha f^2\Big(P+P^{\mathrm{I}}+\frac{3\alpha^2f^2}{p}\Big(\frac{P}{p+m}+\frac{P^{\mathrm{I}}}{p-m}\Big)+\&c.\Big)$$

$$+\alpha^2\,\mathrm{cos.}\,2pt\Big(f^2A\Big(-4p^2+1+4\alpha^2-\frac{9\alpha^2f^2}{2(p^2-4p^2}\Big)-\frac{9f^2}{2}-\frac{3(1-3\alpha^2)f^2}{2p^2}+\&c.\Big)$$

$$+\alpha^2\,\mathrm{cos.}\,(p+q)t\Big(fgB\Big(-(p+q)^2+1+4\alpha^2-\frac{9\alpha^2f^2}{2(p^2-(p+q)\cdot}\Big)-\frac{3\alpha^2f^2gAB^{\mathrm{I}}}{4}-9fg-\frac{3fg(1-3\alpha^2)}{pq}+\&c.\Big)$$

$$+\alpha^2\,\mathrm{cos.}\,(p-q)t\Big(fgB^{\mathrm{I}}\Big(-(p-q)^2+1+4\alpha^2-\frac{9\alpha^2f^2}{2(p^2-p-q_1^2)}\Big)-\frac{3\alpha^2f^2gAB}{4}-9fg+\frac{3fg(1-3\alpha^2)}{pq}+\&c.\Big)$$

$$+\alpha^2a\,\mathrm{cos.}\,(2p+m)t\Big(f^2C\Big(-(2p+m)^2+1+4\alpha^2\Big)-\frac{3f^2A}{4}-9fP^2-\frac{3f^2P}{p(p+m)}+\frac{9f^2}{4(p+m)(2p+m)}+\&c.\Big)$$

$$\alpha^2a\,\mathrm{cos.}\,(2p-m)t\Big(f^2C^{\mathrm{I}}\Big(-(2p-m)^2+1+4\alpha^2\Big)-\frac{3f^2A}{4}-9f^2P^{\mathrm{I}}-\frac{3f^2P^{\mathrm{I}}}{p(p-m)}+\frac{9f^2}{4(p-m)(2p-m)}+\&c.\Big)$$

$$+\&c.=0.$$

Ainſi, il n'y aura plus qu'à égaler à zero les coefficiens de ces différens *coſinus*, pour déterminer les inconnues $m, A, B, B^{\mathrm{I}}, C, C^{\mathrm{I}}$, &c.

Le coefficient de *cos. mt* donnera la valeur de m exacte jusqu'aux quantités de l'ordre de α^2 inclusivement, & l'on aura, à cause de $P = -\frac{1}{4}$, & $P^{I} = \frac{3}{4}$ (art. préc.) l'équation

$$-m^2+1+4\alpha^2-\frac{9\alpha^2f^2}{2(p^2-m^2)}-\frac{3\alpha^2f^2}{4f(p+m)}+\frac{9\alpha^2f^2}{4p(p-m)}-\frac{9\alpha^2f^2}{2}=0;$$

ou bien

$$-m+1+4\alpha^2-\frac{3\alpha^2f^2}{p(p+m)}-\frac{9\alpha^2f^2}{2}=0,$$

d'où, en mettant pour f, p, & m leurs valeurs approchées 1, on tire $m^2 = 1-2\alpha^2$, & $m = 1-\alpha^2$. De sorte que le mouvement de l'apogée $(h-m)t$, deviendra $\frac{3\alpha^2}{4}t$, à cause de $h = 1-\frac{\omega^2}{4}$.

Comme notre dessein n'est point de donner ici une théorie complette de la Lune, nous nous contenterons de ce léger essai, qui peut suffire pour donner une idée de la méthode qu'il faudra suivre dans l'intégration des équations différentielles de l'article 41 auxquelles nous avons réduits le Problême des mouvemens de la Lune & du Soleil autour de la Terre.

Quand on aura trouvé les valeurs de x, X & y en t, c'est-à-dire de r, r^{I} & r^{II}, on aura d'abord les latitudes ψ & ψ^{I} par les formules (t) de l'art. 42 & ensuite on aura les longitudes φ & φ^{I} par les formules (u) du même article; ou bien, comme $y = Rr\ cos.\ \zeta^{II}$ en connoissant y, r & R, on connoîtra $cos.\ \zeta^{2} = \frac{y}{\sqrt{(1+x)(1+X}}$;

or ζ^{II} eſt l'angle qui exprime la diſtance de la Lune au Soleil, de ſorte que comme la latitude du Soleil eſt très-petite & peut par conſéquent être négligée, on aura par la propriété connue des triangles ſphériques rectangles

$$cof.\,\zeta^{II} = cof.\,\psi \times cof.\,(\varphi - \varphi^{I})$$

& par conſéquent

$$cof.\,(\varphi - \varphi^{I}) = \frac{\gamma}{cof.\,\psi\,\nu\,(1 + x + X + xX)}$$

Ainſi on aura par ce moyen la diſtance $\varphi - \varphi^{I}$ de la Lune au Soleil comptée ſur l'Ecliptique; mais la longitude φ^{I} du Soleil eſt aſſez connue par la loi de Kepler que cet Aſtre ſuit aſſez exactement puiſque les dérangemens que la Lune pourroit y produire ne ſeroit que de l'ordre de iB, ou de $i\alpha^{2}\sigma$, comme on le voit par l'équation (r) de l'article 41; donc en ajoutant cette longitude à la diſtance $\varphi - \varphi^{I}$ des deux aſtres, on aura la longitude φ de la Lune comptée à l'ordinaire dans l'écliptique.

FIN.

TRAITÉ
DE L'ARRIMAGE
DES VAISSEAUX.

Pondere tuta ſuo eſt navis jactata per undas.

CHAPITRE I.

Définitions, Notions préliminaires, conditions générales de l'Arrimage.

§. I.

L'ARRIMAGE eſt, comme on ſait, l'arrangement qu'on donne, dans le vaiſſeau, aux différentes matières qui en compoſent la charge. Cette diſtribution de la charge eſt une partie importante de la ſcience du Navigateur. En étudiant avec ſoin les divers mouvemens du vaiſſeau, & les cauſes qui

peuvent les produire, on s'eſt apperçu que la tranſpoſition de quelques poids ſuffiſoit ſouvent pour augmenter la rapidité du ſillage, pour rendre le navire doux à la mer & ſenſible à l'action de ſon gouvernail. Mais l'utilité la plus évidente & la plus réelle d'un bon arrimage, c'eſt qu'il procure au navire la qualité de bien porter la voile, qualité qui doit être regardée comme la première de toutes : car non-ſeulement elle aſſure la navigation ; mais en faiſant conoître la quantité de mâture dont un vaiſſeau a beſoin, à proportion du volume d'eau qu'il déplace, elle permet encore, en certaines occaſions, de forcer de voiles pour doubler un cap, pour s'éloigner d'une côte, pour joindre, ou pour éviter l'ennemi, pour reprendre ſon poſte en corps d'armée, &c. Ces conſidérations montrent ſuffiſamment combien le ſujet propoſé mérite d'être approfondi. J'entreprens de le traiter dans toute ſon étendue, en le reprenant par les fondemens. On juge bien que je ſerai obligé de répéter des remarques & des détails qu'on peut trouver ailleurs. L'enchaînement des matières & l'envie de me rendre clair, m'en impoſent la néceſſité. La plupart des Géomètres, jaloux ſeulement de produire des choſes nouvelles, ne ſe mettent guères en peine d'en montrer la liaiſon avec celles qu'on connoiſſoit déja dans le même genre, & de réduire ainſi en corps la ſcience dont ils traitent ; mais cette méthode, ſouvent nuiſible au progrès des ſciences, parce qu'un habile homme dédaigne d'achever l'ouvrage d'un autre, & qu'un homme médiocre n'en eſt pas capable : cette méthode, dis-je, ſeroit ici entièrement vicieuſe, & contraire au but que l'Académie s'eſt propoſé de procurer à la Marine un ouvrage utile & facilement applicable à la pratique.

II.

Lorſqu'un Conſtructeur veut entreprendre un vaiſſeau,

il commence par en faire des deſſeins exacts & détaillés qui ſervent à le diriger dans ſon travail, & qui le mettent en état de reconnoître d'avance ſi le vaiſſeau projetté aura une belle batterie, de belles lignes d'eau, les capacités de l'avant & de l'arrière bien balancées, &c. Toutes ces diſcuſſions eſſentielles doivent néceſſairement précéder l'exécution de l'ouvrage, afin de donner infailliblement au vaiſſeau la forme la plus avantageuſe. Elles ne ſont pas auſſi pénibles, ni auſſi difficiles que bien des gens pourroient le penſer. Depuis qu'on a appliqué la Géométrie, ſur-tout les nouvelles méthodes des calculs différentiel & intégral, à l'Architecture navale, cette partie de l'Art nautique a fait des progrès immenſes; & la pratique eſt parvenue à éxécuter avec aſſez de préciſion les règles preſcrites par la théorie. Mon objet n'eſt pas de me livrer à de nouvelles recherches en ce genre. Je conſidère le vaiſſeau tout conſtruit, flottant à la mer, & je me propoſe de le charger de manière qu'avec une ſtabilité ſuffiſante, il prenne & conſerve dans l'eau les lignes déterminées par le Conſtructeur, ou même de lui donner, au moyen de l'arrimage, d'autres lignes d'eau, ſuppoſé que celles qui ont été déterminées par le Conſtructeur, fuſſent défectueuſes.

III.

C'eſt un principe d'Hydroſtatique que lorſqu'un corps ſolide flotte librement ſur un fluide, 1.° le poids de ce corps eſt égal au poids du fluide qu'il déplace. 2.° Le centre de gravité de tout le corps & le centre de gravité de la partie ſubmergée, conſidérée comme homogène, ſont toujours placés ſur une même ligne verticale. Ainſi le poids du vaiſſeau tout armé & prêt à faire voile, doit être égal au poids de l'eau déplacée par la carène. De plus le centre de gravité de tout le ſiſtême qui compoſe

la charge du navire doit être placé ſur la verticale élevée par le centre de gravité de la carène. Je fais abſtraction en ce moment de tout mouvement progreſſif ou oſcillatoire; car ſi le navire n'eſt pas dans un parfait repos, ſon poids ſera égal en général à la réſultante de toutes les forces perdues verticalement dans le ſens oppoſé.

Sur ce principe, il eſt eſſentiel de toiſer la carène, & de déterminer la poſition de ſon centre de gravité; car on reconnoîtra par ce moyen le port du vaiſſeau & la manière générale dont la charge doit être arrangée, afin que le vaiſſeau arrive à la ſituation d'équilibre qu'on demande. Le pied cube d'eau de mer pèſe, comme on ſait, environ 72 livres: ainſi lorſqu'on aura calculé le nombre de pieds cubes que la carène déplace, on le multipliera par 72 livres pour avoir le poids total de la charge. On ne doit pas mettre moins de ſoin dans la diſtribution particulière de la charge. En effet, il eſt évident que cette diſtribution peut ſe faire d'une infinité de manières, telles que le vaiſſeau vienne toujours à la flottaiſon projettée. La queſtion eſt de choiſir, parmi tous ces arrangemens, celui qui procure, ou qui favoriſe le plus les qualités dont le vaiſſeau a beſoin. Ceci ſera pleinement éclairci dans la ſuite.

IV.

Tous les Auteurs qui ont écrit ſur l'Architecturenavale, ont cherché des méthodes pour déterminer la carène & la poſition de ſon centre de gravité. On a tenté d'abord de réſoudre le Problême, en rapportant la figure du vaiſſeau à celle de quelque corps géométrique connu, par exemple, à celle d'une portion d'ellipſoïde. Mais cette ſuppoſition & les autres de ce genre étoient trop éloignées de la vérité; & dans ces derniers tems, on a eu recours à des moyens de pratique qui ſont plus ou moins exacts, ſelon qu'on pouſſe plus ou moins loin l'approximation.

Ces moyens consistent à partager la carène en plusieurs parties qu'on regarde comme des Prismes, par des plans horisontaux également distans les uns des autres & par des plans verticaux aussi également distans les uns des autres. Cela est expliqué fort au long dans les Ouvrages de MM. Bouguer & Duhamel qui sont entre les mains de tout le monde. Ainsi je ne m'y arrêterai pas davantage: je me contenterai d'ajouter que si on veut résoudre ce problême d'une manière plus exacte & même plus commode à certains égards, on pourra employer les formules pour les quadratures des courbes, données par M. Cotes dans son livre intitulé *de Harmonia mensurarum*. Comme ces formules ne sont pas aussi connues, ni aussi en usage qu'elles devroient l'être, dans les problêmes d'approximation, je crois devoir les rapporter ici en faveur de quelques Lecteurs, mais sans en ajouter les démonstrations qui me méneroient trop loin, & qu'on déduira d'ailleurs facilement de l'ouvrage même de M. Cotes, ou de la méthode différentielle de Newton.

V.

Pour comprendre la table suivante, il faut savoir que *R* représente l'abscisse totale correspondante à l'aire entière qu'on veut quarrer, & que cette abscisse est partagée en plusieurs parties égales, auxquelles répondent des ordonnées dont le nombre est designé par le chiffre romain correspondant qui se trouve dans la première colonne à gauche. *A* est la somme de la première & de la dernière ordonnée, *B* la somme de la seconde & de la pénultième ordonnée, *C* la somme de la troisième & de l'antépénultième ordonnée, &c. Le reste s'entend de soi-même.

Nombre des ordonnées.	*Superficies.*
III.	$\left(\frac{A+4B}{6}\right)R$
IV.	$\left(\frac{A+3B}{8}\right)R$
V.	$\left(\frac{7A+32B+12C}{90}\right)R$
VI.	$\left(\frac{19A+75B+50C}{288}\right)R$
VII.	$\left(\frac{41A+216B+27C+272D}{840}\right)R$
VIII.	$\left(\frac{751A+3577B+1323C+2989D}{17280}\right)R$
IX.	$\left(\frac{989A+5888B-928C+10496D-4540E}{28350}\right)R$
X.	$\left(\frac{2857A+15741B+1080C+19344D+5778E}{89600}\right)R$

Cette Table, qu'il eſt facile de continuer, eſt aſſez étendue pour notre ſujet.

V I.

Les mêmes formules peuvent ſervir à déterminer le centre de gravité d'une courbe quelconque ; car ſuppoſons que FGKIL ſoit la courbe propoſée, AR ſon axe partagé en pluſieurs parties égales AP, PQ, QO, OR ; Fig. I.

& que AF, PG, QK, &c, repréſentent les ordonnées qui répondent aux points A, P, Q, &c. Soit conſtruite ſur le même axe AR la courbe HMVXZ dont les ordonnées AH, PM, QV, &c, ſoient proportionnelles chacune à chacune des quantités AF×$\frac{AF}{2}$, PG·$\frac{PG}{2}$, QK×$\frac{QK}{2}$, &c. Il eſt clair que l'aire AHMVXZR repréſentera le moment de l'aire AFGKILR, par rapport à l'axe AR. Ainſi diviſant l'aire AHMVXZR par l'aire AFGKILR, le quotient donnera la diſtance du centre de gravité cherché à l'axe AR. Qu'on conſtruiſe encore une troiſième courbe ANTDY dont les ordonnées PN, QT, &c, ſoient proportionnelles chacune à chacune des quantités PG×AP, QK×AQ, &c. En diviſant l'aire ANTDYR par l'aire AFGKILR, le quotient donnera la diſtance du centre de gravité cherché à l'axe AE.

Connoiſſant ainſi la diſtance du centre de gravité cherché aux deux axes AR, AE, il eſt clair qu'on connoîtra ſa véritable poſition.

VII.

Rien n'eſt plus facile que d'appliquer tout ce qu'on vient de dire à notre ſujet. Pour cela, on partagera la carène en pluſieurs tranches, qu'on regardera comme ſes élémens, & dont on déterminera les ſurfaces & les centres de gravité. Cela fait, on regardera ces tranches comme les ordonnées d'une courbe à quarrer, & l'aire de cette courbe repréſentera le volume de la carène. Enfin le centre de gravité ſe trouvera par le § précédent. Il eſt évident que pour plus de ſimplicité les tranches élémentaires de la carène doivent être parallèles ou perpendiculaires au plan de flottaiſon. Je crois que la ſeconde hypothèſe a quelqu'avantage ſur la première, & qu'il convient de procéder dans ce calcul de la manière ſuivante.

Soient AKBM (fig. 2), le plan de flottaiſon du vaiſſeau; Fig. 2, 3, 4.

ACDB (fig. 3), la coupe verticale faite ſuivant la direction de la quille, coupe qui diviſe le vaiſſeau en deux parties parfaitement égales & ſemblables; MFK (fig. 4), le maître couple dont le profil eſt repréſenté par la verticale EF (fig. 3), & la plus grande largeur par l'horiſontale KM (fig. 2). Qu'à compter du maître couple EF, on partage chacune des deux parties EA, EB* de l'axe AB, en un certain nombre de parties égales, par exemple, chacune en cinq parties égales; & que par les points de diviſion 1, 2, 3, 4, on mène des tranches parallèles au maître couple. Les profils de ces tranches ſont marqués par les verticales 1*f*, 2*g*, 3*h*, 4*k* (fig. 3). Toutes ces tranches, en y comprenant le maître couple, ſont les élémens de la carène, & lorſqu'on en connoîtra les ſurfaces particulières, on connoîtra auſſi le ſolide qu'elles forment par leur aſſemblage. Or pour déterminer, par exemple, la ſurface du Maître couple MFK, on partagera la hauteur EF en en certain nombre de parties égales; par exemple, en 5, aux points *m*, *n*, *o*, *x*, & on mènera les ordonnées *mp*, *nq*, *or*, *xz*, qu'on connoîtra d'après les dimenſions connues du vaiſſeau; d'où il réſulte qu'on connoîtra la ſurface MFK. Les ſurfaces des autres tranches ſe déterminent de même. Ainſi on aura tout ce qu'il faut pour connoître ſéparément la partie d'avant & la partie d'arrière de la carène, à compter du maître couple. Il eſt à propos de faire ainſi ces deux toiſés à part, pour s'aſſurer ſi les capacités de l'avant & de l'arrière du vaiſſeau ſont bien balancées. La partie d'avant doit être un peu plus grande que celle d'arrière, parce que l'arrière eſt fort pincé, afin de favoriſer l'impulſion de l'eau ſur le gouvernail.

Il ne ſera pas moins facile de déterminer les centres

* On doit remarquer que les deux parties EA, EB de l'axe ne ſont pas égales entr'elles. Le maître couple eſt placé en avant du milieu de AB d'une certaine quantité qui n'eſt pas la même dans tous les vaiſſeaux,

de

de gravité des deux parties de la carène, & celui de leur ſiſtême ; car multipliant l'aire de chaque couple par la diſtance de ſon centre de gravité à l'axe AB, regardant les produits comme les ordonnées d'une courbe à quarrer, & diviſant l'aire de cette courbe par l'aire de la courbe à laquelle le ſolide réſultant de l'aſſemblage des couples, eſt proportionnel, le quotient exprimera la diſtance du centre de gravité de ce ſolide à l'axe AB. Pareillement multipliant la ſurface de chaque couple par la diſtance de ſon centre de gravité à un plan perpendiculaire à la longueur AB, & paſſant par le point A ou B, regardant les produits comme les élémens d'une courbe à quarrer, diviſant l'aire de cette courbe par le ſolide correſpondant, on aura la diſtance du centre de gravité cherché au plan dont on a parlé. Donc enfin on connoîtra la vraie poſition de ce point.

Je n'ai pas beſoin d'ajouter que la quille, l'étrave & l'étambot doivent être déterminés ſéparément. Comme ces ſolides ſont des priſmes, ou peuvent être conſidérés comme des priſmes, leur toiſé n'a aucune difficulté. Les applications de toutes ces méthodes à des exemples particuliers ſont ſi aiſées, que je croirois abuſer de la patience du Lecteur d'en ſurcharger cet Ouvrage.

CHAPITRE II.

Énumération des matières qui composent la charge d'un vaisseau, emplacemens qu'elles ocupent, &c.

§. VIII.

COMME un vaisseau en mer, est, pour ainsi dire, un monde isolé, privé de tout secours étranger, il doit être pourvu de toutes les choses dont il peut avoir besoin relativement à l'objet, la durée, & la sureté de la navigation. Tels sont les trois points qui déterminent la nature, la quantité & l'arrangement de la charge. On comprend qu'il seroit aussi inutile qu'ennuyeux de nommer & compter ici en détail les différentes matières qui composent la charge d'un vaisseau. Mais en voici une notion générale & suffisante pour faire connoître les méthodes d'arrimage qu'on pratique dans les ports. Je commence par les vaisseaux de guerre.

IX.

D'abord on voit que la coque même du vaisseau & la mâture forment une partie considérable de la charge. On peut en déterminer le poids, en évaluant la quantité de bois & de ferrure qui y entrent. Mais cette méthode est longue, pénible & sujette à plusieurs erreurs. La manière la plus simple & la plus exacte de parvenir à la détermination dont il s'agit, est de calculer le poids de l'eau que le navire déplace en cet état. Il est évident que par ce même moyen, on peut connoître les poids de toutes les

matières qu'on embarque ; car la différence entre le poids de l'eau que le navire déplace, lorſqu'il a reçu quelques corps étrangers, & le poids de l'eau qu'il déplaçoit par le propre poids de ſa coque & de ſa mâture, eſt toujours égale au poids de ces corps étrangers. Entrons dans l'énumération ſuccincte des parties de la charge, en commençant par le leſt, qui eſt la première choſe que l'on embarque.

X.

On appelle proprement *leſt* une certaine quantité de matières peſantes, qu'on met au fond de la calle, & dont le ſeul objet eſt de faire enfoncer le vaiſſeau juſqu'à une profondeur convenable, & de le maintenir ferme dans ſon aſſiette, malgré les efforts contraires du vent ou des lames. Le leſt le plus ordinaire eſt un gravier menu que la mer dépoſe ſur les côtes. Les cailloux de pierres dures ſont fort bons pour le même objet. Les éclats de pierres dures ont le défaut d'endommager les futailles contiguës. Les ſables & les terres, qu'on employe dans quelques endroits, ne font pas un bon leſt, parce que l'eau entraîne ces matières dans l'archipompe, & qu'elles peuvent engorger les pompes, ce qui eſt extrêmement dangereux.

Pour éviter l'encombrement conſidérable qu'un leſt tout en pierre occaſionneroit dans la calle, & pour abbaiſſer d'ailleurs le centre de gravité de la charge, on compoſe la partie inférieure du leſt avec des vieux canons, des boulets de rebut, des éclats de bombe, des ſaumons de fer fondus exprès pour cet uſage, &c. Enſuite on met des pierres, entremêlant quelquefois des ſaumons & des boulets avec ces pierres ; car cela eſt ſuſceptible de pluſieurs variétés. Le leſt en fer doit être bien engravé, afin que l'aſſemblage n'ait pas de mouvement pendant le roulis. Il eſt viſible que plus un leſt eſt peſant à volume égal, plus il procure de ſtabilité au vaiſſeau. Ainſi, à cet égard, le

leſt en fer eſt très avantageux ; mais il y a des occaſions où une trop grande quantité de leſt en fer feroit deſcendre trop bas le centre de gravité de la charge, & par-là produiroit des ſecouſſes trop rudes au vaiſſeau, comme nous le verrons dans la ſuite.

Comme les canons qu'on veut embarquer pour leſt, ſont fort difficiles à arranger dans toute leur longueur, principalement aux extrémités de la calle ; on eſt en uſage dans les ports, de ſcier tous les canons de fer de rebut par ruelles qui peſent 100 à 150 livres, ſuivant le calibre des canons. Ces morceaux s'arrangent ſans peine entre les porques Si l'on veut augmenter le poids du leſt en canons, rien n'empêche de remplir l'intérieur de l'ame de ces canons, avec des pierres, ou avec de la féraille.

La quantité totale de leſt eſt ordinairement environ le tiers du port du vaiſſeau. Mais on ſent bien que cette règle n'eſt pas invariable. Dans pluſieurs cas, les effets & les pacotilles dont le vaiſſeau eſt chargé, ſervent de leſt en partie Plus une campagne doit durer, plus il faut de vivres, de tonneaux de vin & d'eau, &c ; d'où il ſuit qu'il faut alors moins de leſt. Mais à meſure qu'on conſomme les proviſions de bouche, on ne manque pas de faire du leſt dans quelque rade ou port, lorſqu'il s'en préſente, afin que le vaiſſeau demeure toujours également callé. La quantité de leſt dépend auſſi de l'âge du vaiſſeau. Plus un vaiſſeau eſt vieux, moins il peut porter de leſt.

Il eſt facile de connoître la quantité de leſt qu'on embarque. Pour cela, on a, dans le port de Toulon, des bateaux jaugés qui ſervent à meſurer la quantité de leſt en gravier ou en cailloux. Ces bateaux ſont partie de 10 tonneaux, partie de 15 tonneaux, c'eſt à dire, d'une barquée & d'une barquée & demie A l'égard des morceaux de canons, on en connoît le poids par le calibre, comme nous l'avons déja dit: le poids des ſaumons eſt gravé ſur leur tête.

Il eſt d'uſage de reſerver 10 à 15 tonneaux de leſt de fer en boulets ou en ſaumons, qu'on met à la grande écoutille, ou dans quelqu'autre endroit où l'on puiſſe le prendre commodément. C'eſt ce qu'on appelle le *leſt volant*. Il ſert à faire en mer quelques changemens à l'arrimage, comme nous le verrons dans la ſuite.

XI.

Les vaiſſeaux portent ordinairement ſept ancres, cinq groſſes & deux petites. L'une des cinq groſſes & la plus groſſe de toutes, qu'on appelle *la maîtreſſe ancre*, l'ancre d'*eſpérance* ou de *miſéricorde*, ſe met dans la calle à la grande écoutille, afin de pouvoir être enlevée le plus aiſément qu'il eſt poſſible, ſu poſé qu'on en eût malheureuſement beſoin. On voit qu'elle ſert de leſt en partie. Les quatre autres, qui ne diffèrent guères par leur poids, & que l'on nomme ancres de *poſte*, ainſi que les deux petites, que l'on nomme ancres à *jaſt*, ſe mettent dans l'avant du vaiſſeau, & en dehors depuis le commencement du gaillard d'avant juſqu'aux boſſoirs.

XII.

Vers le milieu & dans la plus grande capacité de la calle ſont placées les futailles, au-deſſus du leſt, les tonneaux d'eau du côté de l'avant, & les tonneaux de vin du côté de l'arriere. Voyez les plans de l'*Altier*. On comprend aſſez que la quantité d'eau & de vin ſe regle ſur le nombre d'hommes de l'équipage, & ſur le tems que doit durer la campagne. Le Capitaine du vaiſſeau a ſa cave à part. L'emplacement de cette cave n'eſt pas le même dans tous les vaiſſeaux: il ſe prend dans l'endroit le plus commode, & le plus compatible avec les autres parties de l'arrimage. Fig. 5, 6, 7, 8, 9.

XIII.

Les barriques de lard, bœuf salé, morue, fromage, &c. sont repandues dans la calle sur le dernier rang des futailles, dans les endroits où l'on trouve à les loger. Seulement on observe que leur arrangement soit subordonné à la différence du tirant d'eau. Les barrils de farine se mettent dans des soutes particulières du côté de l'arrière. Il en est de même du biscuit, avec cette différence néanmoins que les soutes au biscuit sont calfatées, brayées, & souvent nattées & fermées parfaitement. Les légumes sont aussi dans des soutes, quelquefois en grenier, quelquefois elles restent en sacs.

XIV.

Dans les entredeux que laissent les barriques à vin & à eau, on distribue le bois, qu'on appelle *bois d'arrimage*. Le bois à brûler se place sur les ailes du vaisseau, dans les endroits où on ne peut placer une barrique, ce qui arrive souvent dans l'emplacement des porques; & lorsque tous les plans d'arrimage sont faits, soit qu'il y en ait deux ou trois, on couvre le dernier avec le restant du bois que l'on a soin de mettre bien horisontalement.

XV.

A l'extrémité de la calle, vers la proue, est la *fosse aux lions*. Cette fosse dans laquelle se trouve le pied du mât de Mizaine, sert à loger tout le rechange du Maître-d'équipage, en cordages, en poulies soit en roues de fonte ou de gayac, le suif en barriques, goudron, brai & autres choses de ce genre. Vient ensuite la *fosse aux cables* qui contient les cables, grêlins, brins & autres cordages rela-

tifs au mouillage. Sous le plancher de la foſſe aux cables, qui eſt ordinairement à environ cinq pieds audeſſus de la carlingue, on met du leſt, ſoit en ſaumons ou en pierres. Si pourtant le vaiſſeau, par ſa configuration, n'a pas beaucoup de différence de tirant d'eau, on y en met peu, & quelquefois point du tout; car alors les effets contenus dans la foſſe aux lions, par leur ſituation & par leur poids, rappellent ſuffiſamment le vaiſſeau ſur l'avant.

Pluſieurs Capitaines ne font pas faire de foſſe aux cables. Alors on prolonge le plan d'arrimage juſques à la cloiſon de la foſſe aux lions, & l'on met les cables ſur un plancher porté par les faux baux, plus ou moins en avant, ſelon que la différence du tirant d'eau l'exige.

XVI.

Il ya encore dans la partie d'avant de la calle pluſieurs autres ſoutes, telles que celles du maître Charpentier, du maître Voilier, du Chirurgien, du Pilote, de MM. les Gardes de la Marine, &c.

Le Maître Charpentier a des bordages convenables à l'échantillon du vaiſſeau. Il a auſſi un rechange de la mâture, à l'exception, comme on peut bien penſer, des mâts majeurs & des deux baſſes vergues, qui ſont la grande & celle de mizaine.

La ſoute du maître Voilier contient un rechange de chaque voile, qui eſt en garniture, des piéces de toile neuve, pour le radoub des voiles, le calfat, goudron, brai gras & ſec, étoupe goudronnée, cloux de toutes ſortes, & autres matières relatives à ſon métier, pour remédier aux accidens qui peuvent arriver pendant la navigation. Il eſt auſſi muni de placards de plomb & de bois garnis d'étoupes pour boucher dans l'inſtant les trous faits par le canon dans un combat. Outre cette ſoute, on conſerve ſouvent un emplacement à pouvoir loger dans la calle les

groſſes voiles qui ſont miſes dens des étuis de toile en prélarts ; & le Maître Voilier ne met dans ſa ſoute que les petites voiles & les piéces de rechange en toile pour radoub, ainſi que la vieille toile qu'il a pour ſervir de fourrure aux cables.

Dans la ſoute du Chirurgien, ſont les draps de lit & la terraille pour le ſervice des malades. Les coffres à médicamens ſe mettent ordinairement ſur le faux pont, avec les malles & autres effets des Officiers.

Le Pilote eſt pourvu de tous les inſtrumens néceſſaires pour diriger la route du vaiſſeau, &c.

XVII.

Le grand mât eſt environné d'une cloiſon quarrée dans laquelle ſont renfermées quatre pompes qui ſervent à épuiſer l'eau qui entre dans la calle. Cette cloiſon s'appelle *archepompe*, ou plus communément *archipompe*. Il y a auſſi une archipompe autour du mât de mizaine. Tout joignant l'avant de l'archipompe du grand mât, eſt un parquet où ſe tiennent les boulets, & dans lequel ſont différens compartimens, ſuivant le calibre des piéces. On fait encore ſur le pont, tout auprès du grand mât, des parquets qui contiennent des boulets du calibre des canons qui y ſont ; & l'on met à côté de chaque piéce une petite quantité de boulets pour le plus prompt ſervice de l'artillerie.

XVIII.

La ſoute aux barrils de poudre & aux artifices eſt tout-à-fait à l'arrière de la calle. Ordinairement on a auſſi à l'avant de la calle des caiſſons où l'on met des gargouſſes pleines, pour le plus prompt ſervice des canons de l'avant, lors d'un combat. Les uſtenſilesnéceſſaires pour le ſervice des canons, comme pinces, anſpects, refouloirs, cuillers, tirebourres, gargouſſes vuides, porte-gargouſſes,

gaargoufſes, bouttefeu, méches, &c, ſe mettent à l'arrière du vaiſſeau dans une ſéparation qui eſt faite dans l'entrepont depuis le mât d'artimon juſqu'à l'arrière. Cette ſéparation, qu'on appelle la *ſainte-barbe*, ſert encore à loger le maître Canonier, l'Ecrivain de la Marine, l'Aumônier, le premier Chirurgien & quelques-uns de Meſſieurs les Gardes de la Marine, lorſqu'ils ne ſont pas tous logés ſous le gaillard.

XIX.

Les ponts, gaillards, & dunettes, portent l'artillerie, les ancres, à l'exception de l'ancre d'eſpérance, l'équipage, la chaloupe, les cuiſines, les bœufs, vaches, moutons, chèvres, poules, &c.

On ſait que les vaiſſeaux de guerre ſe diſtribuent en différens rangs, & que c'eſt par le nombre des canons que les rangs des vaiſſeaux ſont diſtingués. Les vaiſſeaux du premier rang portent depuis cent vingt juſqu'à quatre-vingt-dix canons excluſivement; les vaiſſeaux du ſecond rang portent depuis quatre-vingt-dix juſqu'à ſoixante canons excluſivement; les vaiſſeaux du troiſième rang portent depuis ſoixante juſqu'à quarante-ſix canons excluſivement. Viennent enſuite les *frégates* qui portent depuis quarante-ſix juſqu'à vingt canons excluſivement. Les vaiſſeaux qui ne portent pas plus de vingt canons s'appellent *corvettes*.

Nous avons déja indiqué les places des ancres ſur les gaillards. Le premier pont, qu'on appelle ordinairement l'entrepont, contient, outre les canons de la première batterie & leurs uſtenſiles, la plus grande partie de l'équipage, les différens poſtes qui ſont ceux des Chirurgiens, des Malades, des Sergens, Caporaux, Charpentiers, Voiliers, apprentifs Canoniers, &c. Ces poſtes ſont marqués par les entredeux des canons. Le parc aux moutons eſt auſſi ſur ce même pont, au milieu de la partie d'avant. Sur

le ſecond pont, où eſt la ſeconde batterie, ſont les canots & chaloupe, les cuiſines du Capitaine & de l'équipage, le four. Sous le gaillard d'arrière qui eſt à ce même pont, eſt l'office du Capitaine. Lorſque l'on a embarqué des vaches & des bœufs, on les tient auſſi ſur ce même pont. Seulement pendant un combat on les fait deſcendre dans la calle quand il y a de la place; car quand il n'y a pas de place, on les jette dans la mer, ainſi que les autres choſes qui embarraſſent. Les cages à poulets ſe mettent pareillement dans les entredeux des canons: elles ſuivent le ſort bœufs ou vaches, dans le cas d'un combat.

XX.

Je paſſe rapidement ſur tous ces détails qui ne contiennent rien de nouveau; mais pour éclaircir briévement la plupart des choſes qu'on vient de voir, j'ajoute les plans d'arrimage de deux vaiſſeaux de ſoixante-quatre canons, avec les explications marginales qui ont été jugées néceſſaires. Je ne me ſuis pas aſſujetti à deſſiner ces figures ſuivant les proportions rigoureuſes des parties, parce qu'il ne s'agit pas ici de la conſtruction des vaiſſeaux, & qu'on n'a par conſéquent pas beſoin de connoître les véritables dimenſions des figures. On trouvera pluſieurs différences dans l'arrimage des deux vaiſſeaux dont il s'agit, ſoit par rapport à la qualité, la quantité & l'arrangement du leſt, ſoit même par rapport à la diſtribution des futailles. Le reſte de l'arrimage eſt toujours à-peu près le même dans tous les cas: car les autres emplacemens ſont déterminés, ou par la néceſſité, ou par la commodité. Je renvoye à la fin de cet Ouvrage pluſieurs devis des deux mêmes vaiſſeaux.

Fig. 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

XXI.

On juge bien qu'il eſt comme impoſſible de connoître

en détail les poids de toutes les choſes qu'on embarque; mais on connoît du moins les poids des principales. Suppoſons, par exemple, un vaiſſeau de 64 canons armé & approviſionné pour 6 mois, à 505 hommes d'équipage.

Le poids des vivres, non compris le poids des futailles au vin & à l'eau, mais en y comprenant le poids du bois d'arrimage & généralement tous les emballages qui ſervent à renfermer les vivres qui ne ſe mettent pas dans des ſoutes, peut monter à 971234 livres.

Le poids du bois d'arrimage monte à 204496 livres. Comme on ne peut pas prendre ce bois pour l'uſage journalier des cuiſines, puiſque toutes les futailles ſont pardeſſus, & qu'il eſt mis pour les contenir, on prend encore environ 2000 quintaux de bois pour le ſervice de cuiſines.

Le poids du vin, non compris le poids des futailles qui le contiennent, monte à 1715 quintaux.

Il y a dans un tel vaiſſeau

26 canons de 24liv. de bale, & chacun pèſe 5500liv.
28 canons de 12liv. & chacun pèſe . . . . . 3200.
10 canons de 6liv & chacun pèſe . . . . . 1700.

Ce vaiſſeau porte 60 coups à tirer de chaque piéce, tant en poudre qu'en boulets, ſans compter la mitraille.

La garniture en cordage pèſe 43614liv.
Les cables pèſent . . . . . 56047.
Les greſlins . . . . . 6856.
Le rechange en cordage . . . 10939.
Les cinq groſſes ancres . . . . 22500.
Les deux petites . . . . . 3000.

Quant à la totalité de la charge, elle ſe détermine par le deplacement d'eau, comme nous l'avons dit §. IX: elle eſt ici d'environ 2180 tonneaux.

XXII.

Nous finirons par quelques remarques ſur l'arrimage des vaiſſeaux Marchands.

On ne peut guères donner une notion exacte, ni même approchée juſqu'à un certain point de la cargaiſon de ces ſortes de vaiſſeaux; car ils ſont chargées des marchandiſes convenables aux pays où ils vont. Lorſque le Négociant qui doit faire le chargement, en a donné l'état au Capitaine, celui ci a l'attention de ſe faire livrer d'abord toutes les marchandiſes les plus peſantes pour les mettre dans le fond; & quand il n'y a pas de marchandiſes qui, par leur peſanteur, puiſſent ſérvir de leſt, il fait prendre du leſt en pierre. Les navires qui vont porter leur cargaiſon aux Iſles de l'Amérique, embarquent pour leſt des briques, parce qu'on trouve à bien vendre ces briques dans les pays dont il s'agit.

Les marchandiſes qui ne ſont pas ſuſceptibles d'humidité ſont miſes dans la calle; celles qui peuvent prendre de l'humidité ſe mettent dans l'entrepont. Les Bâtimens marchands ne font pas d'arrimage avec des barriques dans la calle; la place leur eſt trop précieuſe pour cela. Ils font dans l'entrepont de l'avant une ſéparation dans laquelle le Capitaine fait enfermer les vivres embarquées pour ſon équipage. On met auſſi une partie des vivres dans la ſoute aux poudres. Pluſieurs barriques d'eau ſont encore miſes dans l'entrepont. Lorſqu'il reſte de la place dans la calle, on la réſerve à la grande écoutille, pour y loger des futailles d'eau ou devin. Au rètour des Iſles, on fait le chargement en denrées du pays, & l'on place, par exemple, les barriques de ſucre dans l'endroit le plus bas, parce que leur poids ſert de leſt, &c.

CHAPITRE III.

Influence de l'arrimage sur les qualités du vaisseau.

§. XXIII.

DANS le Chapitre précédent, nous avons exposé les méthodes d'arrimage qu'on pratique dans les ports. Il nous reste maintenant à discuter ces méthodes, & à leur donner toute la perfection dont elles sont susceptibles. Les qualités sur lesquelles l'arrimage a de l'influence sont la force que le vaisseau doit avoir pour conserver sa figure & ne pas s'arquer; la rapidité de la marche; les mouvemens de roulis & de tangage; les mouvemens de rotation produits par l'action du gouvernail ou des voiles. Cette matière est, comme on voit, extrêmement abondante. Pour la considérer plus distinctement, nous la diviserons en plusieurs sections.

SECTION I.

Influence de l'arrimage sur le changement de forme du vaisseau.

XXIV.

SOIT *ACDB* le profil de la carène d'un vaisseau flottant à la mer. Imaginons que cette carène est partagée en une infinité de tranches verticales représentées par les droites *EF*, 1*f*, 2*g*, &c. On sait qua la poussée perpendiculaire de l'eau sur chacun des points *F*, *f*, *g*, &c, est exprimée par Fig. 3.

chacune des lignes correſpondantes *EF*, *1f*, *2g*, &c. Ainſi pour que l'aſſemblage des piéces qui forment la charpente du vaiſſeau, ne fut pas fatigué par la charge, cette charge devroit être diſtribuée proportionnellement aux capacités de la carène. Là où la pouſſée de l'eau eſt la plus grande, devroient être les plus grands poids: là où la pouſſée de l'eau eſt la moindre, devroient être les plus petits poids, &c. Souvent cette règle eſt violée au point que la quille vient à *s'arquer*, en formant une courbe convexe par en haut; parce que la charge des extrémités eſt trop conſidérable en comparaiſon de celle du milieu.

XXV.

On conçoit que la quille, par la réſiſtance dont elle eſt capable en elle-même, s'oppoſe aux puiſſances étrangères qui tendent à la faire plier, & qu'elle ne plie effectivement, que lorſque ſa propre réſiſtance en quelqu'un de ſes points eſt moindre que l'effort qu'elle ſouffre en ce même point. Examinons donc la réſiſtance de la quille dans un point donné de ſa longueur; & nous jugerons, par la comparaiſon de cette réſiſtance avec l'effort contraire, s'il n'y a pas de danger que la première force ne cède à la ſeconde. Cette recherche eſt intéreſſante, & peut avoir pluſieurs autres applications.

XXVI.

Fig. 14. Soit le rectangle *ABDC* le profil d'une piéce de bois équarrie en parallépipéde rectangle. Qu'à cette piéce, conſidérée comme non peſante, & d'ailleurs parfaitement libre ſoient appliquées trois puiſſances parallèles *S*, *Q*, *R*, qui ſe feroient mutuellement équilibre ſi la piéce de bois étoit une verge abſolument inflexible Suppoſons que cette piéce vienne à ſe rompre dans la ſection verticale donnée

NT: on demande quelles doivent être pour cela les quantités des trois puiſſances S, Q, R ?

Imaginons ſuivant l'hypothèſe ordinaire, la piéce compoſée d'une infinité de fibres ou filets parallèles à AB & à CD. Dans l'inſtant où elle eſt prête à ſe rompre, les fibres s'allongent d'une certaine quantité dans la ſection verticale donnée NI; & ces petits allongemens forment un eſpace triangulaire FNI dont le ſommet eſt en N, & la baſe, très-petite FI, ſur AB. De plus les élémens HK, PM, FI, &c, du triangle FNI ſont proportionnels aux forces avec leſquelles les fibres ſont tendues en ces endroits, puiſqu'ils expriment les quantités dont les fibres ſont tirées de leur état naturel pour réſiſter à l'effort contraire qui provient de l'action des trois puiſſances S, Q, R.

Cela poſé, en conſidérant CNF comme un levier angulaire dont l'appui eſt en N, & dont le bras CN eſt tiré perpendiculairement par la puiſſance S, & le bras NF par toutes les tenſions HK, PM, FI, &c, du triangle FNI, il y aura équilibre dans ce levier, ſi le moment de la force S par rapport au point N, eſt égal à la ſomme des momens des forces HK, PM, FI, &c, par rapport au même point.

Donc

ſi l'on ſuppoſe
- AB ou CD . . . . . $=a$
- AT ou AF ou CN . . . . . $=b$
- AV . . . . . $=c$
- la hauteur ou épaiſſeur NT de la piéce $=h$
- ſa largeur . . . . . $=k$
- NP . . . . . $=x$
- la force de tenſion du filet FI . . . . . $=f$

on aura d'abord l'équation $S \times b = \int \frac{fkxxdx}{h}$, dans laquelle on doit ſuppoſer $x=h$, après l'intégration; ce qui donne

$$S=\frac{fkhh}{3b}.$$

De plus, puiſque les trois puiſſances S, Q, R, ſe feroient mutuellement équilibre, ſi la piéce étoit une verge inflexible, on a

$$S\times c=Q(a-c),$$

$$S+Q=R;$$

donc

$$Q=\frac{fkhhc}{3b(a-c)},$$

$$R=\frac{fkhh}{3b}+\frac{fkhhc}{3b.(a-c)}=\frac{fkhha}{3b.(a-c)}.$$

On remarquera que DNI peut être de même regardé comme un levier angulaire auquel ſont appliquées les forces Q, R, & les tenſions des fibres du triangle FNI; ce qui donneroit l'équation

$$\frac{fkhh}{3}=Q(a-b)-R(c-b).$$

Mais cette équation eſt renfermée dans les précédentes.

Si l'on ſuppoſe $b=c$, ou que la piéce ſe rompe au point V, & qu'on faſſe $c=na$ (n étant un nombre fractionnaire), on aura

$$S=\frac{fkhh}{3na},$$

$$Q=\frac{fkhh}{3a.(1-n)},$$

$$R=\frac{fkhh}{3a.(n-n^2)}.$$

Il eſt évident qu'on trouveroit, par la même méthode, les valeurs des puiſſances capables de rompre la piéce en un point donné, quel que fût le nombre, & quelle que fût

la loi de ces puiſſances, en ſuppoſant toujours qu'elles ſe fiſſent mutuellement équilibre, ſi la piéce étoit abſolument inflexible.

XXVII.

Ces formules ſont fort ſimples, & deviendront d'un uſage très commode dans la pratique, lorſqu'on connoîtra la quantité f. Or pour déterminer f, nous nous ſervirons des expériences que M. de Buffon a faites ſur la réſiſtance des bois (Mém. de l'Acad. an. 1740 & 1741). Il eſt vrai que ce celebre Auteur n'a pas examiné le cas dont il eſt ici queſtion; car il conſidère ſeulement une piéce de bois ſoutenue par ſes extrémités ſur deux appuis fixes, & chargée dans ſon milieu d'un poids qui la fait plier ou rompre. Mais on pourra, avec quelque préparation, déduire des réſultats qu'il trouve, la quantité que nous cherchons. En effet, en regardant les deux puiſſances P & Q comme deux appuis, & ſuppoſant que la piéce ſe rompe dans ſon milieu, en vertu d'un poids connu F poſé ſur ce même milieu, on trouvera par notre méthode (en nommant toujours a la longueur de la piéce, b ſon épaiſſeur, k ſa largeur, f la tenſion abſolue du dernier filet),

$$F = \frac{4fkbb}{3a};$$

$$\text{donc } f = \frac{3a}{4kbb}.F.$$

Subſtituant cette valeur de f dans les trois formules du § précédent, on aura

$$F = \frac{F}{4n},\quad Q = \frac{F}{4.(1-n)},\quad R = \frac{F}{4(n-n^2)}.$$

Maintenant, ſuivant la ſeptième table de M. de Buffon; (Mém. de l'Acad. 1741, page 334), une piéce de bois de chêne de 5 pouces d'équariſſage, ſur 7 pieds de longueur,

se rompt sous la charge de 11525 livres; donc on aura en général $F = \frac{hhk}{a} \times \frac{7^{\text{pieds}}}{5\times5\times5^{\text{pou. cub.}}} \times 11525$ livres. Donc enfin $S = \frac{hhk}{4na} \times \frac{7^{\text{pieds}}}{5\times5\times5^{\text{pou. cub.}}} \times 11525$ liv; $Q = \frac{hhk}{4.(1-n)a} \times \frac{7^{\text{pieds}}}{5\times5\times5^{\text{pou. cub.}}} \times 11525$ livres; $R = \frac{hhk}{4.(n-n^2)a} \times \frac{7^{\text{pieds}}}{5\times5\times5^{\text{pouc. cub.}}} \times 11525$ livres.

XXVIII.

Fig. 15. Tout cela posé, soit *ABDC* le profil de la quille flottantte à la mer, dans une situation horisontale, & dans une immobilité absolue. Supposons que la poussée verticale de l'eau est réunie au centre de gravité de la carène, & que cette force est exprimée par la verticale *RO*. Qu'on représente par *MP* la résultante de tous les poids dont l'avant du vaisseau est chargé, en y comprenant le poids de la partie *ACOV* de la quille; qu'on représente de même par *NQ* la la résultante de tous les poids dont l'arrière du vaisseau est chargé, en y comprenant le poids de la partie *BDOV* de la quille. Alors la quille est pressée par les trois puissances *RO*, *MP*, *NQ* qui se feroient mutuellement équilibre, si elle étoit une verge absolument inflexible. Il ne s'agit plus que de chercher par le §. précédent les puissances qu'il faudroit appliquer en *V*, *P*, *Q*, afin que la quille se rompît, par exemple en *V*; & par la relation de ces trois nouvelles puissances aux forces *RO*, *MP*, *NQ*, on reconnoîtra si cet accident est à craindre.

On voit en général, par la formule $R = \frac{hhk}{4(n-n^2)a} \times \frac{7^{\text{pieds}}}{5\times5\times5^{\text{pou. cub.}}} \times 11525^{\text{liv.}}$ qu'à mesure que *a* ou *PQ* diminue, toutes choses d'ailleurs égales, la force qu'il faut appliquer en *V* pour rompre la quille augmente. Ainsi en rapprochant le plus qu'il est possible du milieu de la carène les

poids qui compoſent la charge, le vaiſſeau ſera d'autant moins expoſé à s'arquer.

XXIX.

Appliquons cette théorie au vaiſſeau de ſoixante-dix canons, dont M. Duhamel a donné la conſtruction, dans ſon Architecture navale.

Le poids total de ce vaiſſeau, ou la pouſſée verticale de l'eau, eſt de $2334^{\text{ton.}}\ 1409^{\text{liv.}}$ ou de $4669403^{\text{liv.}}$ la longueur de la quille eſt de $139^{\text{pieds}}\ 4^{\text{pou.}}\ 10^{\text{lig.}}$; l'épaiſſeur ou hauteur de cette même quille eſt de $1^{\text{Pi.}}\ 7^{\text{Po.}}\ 3^{\text{lig.}}$, & ſa largeur horiſontale de $1^{\text{pi.}}\ 5^{\text{po.}}\ 1^{\text{li.}}$

Suppoſons, pour la plus grande ſimplicité, que la force RO réponde au milieu de la quille, que la force MP réponde au milieu de la partie AV, & la force NQ au milieu de la partie BV. Ces ſuppoſitions auxquelles notre méthode n'eſt pas d'ailleurs aſſujettie, approchent ici ſuffiſamment de la vérité, pour ne produire aucune erreur ſenſible. Nous aurons donc force $RO = 4669409^{\text{liv.}}$, force $MP = 2334704\frac{1}{2}^{\text{liv.}}$, force $NQ = 2334704\frac{1}{2}^{\text{liv.}}$; $a = 69^{\text{pi.}}\ 8^{\text{po.}}\ 5^{\text{lig.}}$. Or les trois forces R, S, Q, qui répondent chacune à chacune des trois forces RO, MP, NQ, deviennent à très-peu-près, $R = 58392^{\text{liv.}}$, $S = 29196^{\text{liv.}}$, $Q = 29196^{\text{liv.}}$; d'où l'on voit que les forces capables de rompre la quille ſont conſidérablement moindres que celles dont elle eſt effectivement preſſée, & que par conſéquent elle ne manqueroit pas de ſe rompre, ſi elle n'étoit pas fortifiée par les aſſemblages des piéces dont elle eſt compoſée, & par la ferrure; & ſi d'ailleurs les ponts & les couples ne la ſoulageoient pas d'une grande partie de la charge. Il eſt peut-être impoſſible de ſoumettre à un calcul ſatisfaiſant ces ſecours étrangers dont la quille tire ſa principale force. Quoi qu'il en ſoit, il eſt certain que pour

empêcher un vaiſſeau de s'arquer, on doit rapprocher le plus qu'il eſt poſſible la charge du milieu de la carène.

Comme l'avant du vaiſſeau eſt né eſſairement chargé par le mât de mizaine, le petit hunier & le petit perroquet, tous les agrêts qui appartiennent à ces mâts, par les cuiſines, par le beaupré, par la poulaine, par les cables, &c; & que d'ailleurs cette partie doit être un peu pincée pour diviſer facilement le fluide, la charge n'y peut guères être proportionnelle aux capacités. J'en dis autant de l'arrière qui eſt chargé du gouvernail, des gaillards & dunettes, de l'artimon, de la ſainte-barbe, &c. Mais on pourroit mettre plus de leſt qu'on ne fait ordinairement au milieu de la calle, & en débarraſſer les extrémités du vaiſſeau. Cet arrangement que je propoſe, a encore l'avantage de favoriſer les mouvemens de rotation produits par l'action du gouvernail, ou des voiles, comme on le verra dans la ſuite; mais alors il convient d'employer un leſt fort peſant, afin qu'étant diſtribué ſur plus de hauteur dans la calle, le centre de gravité de la charge ne ſoit pas néanmoins trop élevé; ce qui pourroit enlever au navire la qualité de bien porter la voile, ou au moins occaſionner des mouvemens nuiſibles à la mâture.

SECTION II.

Influence de l'arrimage ſur le mouvement progreſſif uniforme du vaiſſeau.

XXX.

JE ſuppoſe un vaiſſeau qui cingle en pleine mer, avec une viteſſe parfaitement uniforme, & qui porte parfaitement la voile, c'eſt à dire, ſans s'incliner en aucun ſens. Ce cas n'a jamais lieu en rigueur; mais il mérite d'être examiné

par sa simplicité, & parce qu'il va nous montrer clairement comment la distribution de la charge peut contribuer à augmenter la rapidité du sillage.

Soit donc $AKBM$ le plan de flottaison d'un navire cinglant suivant la route oblique GCH, laquelle forme, avec la direction AB de la quille, l'angle donné ACH de la dérive. Soient IC la direction réelle du vent, que je suppose horisontale, KM la voile qui est censée parfaitement tendue, & qui forme, avec la direction du vent, l'angle donné ICM. Il est clair que la partie de l'effort du vent qui résulte perpendiculairement contre la voile, doit être en équilibre, à chaque instant, avec la force horisontale qui provient de toutes les impulsions perpendiculaires du fluide contre toutes les parties du navire que le fluide frappe en effet. Par conséquent, si par le point C où KM coupe l'axe AB, on mène NL perpendiculaire à KM, & que LVN (fig. 17) soit la coupe verticale du navire faite suivant NL, les directions des deux forces dont il s'agit seront situées dans le plan LVN. Supposons que ZS soit la direction de la force résultante de tous les efforts perpendiculaires du vent contre les voiles, que XS soit la direction de la force résultante des impulsions perpendiculaires de l'eau contre le navire: les deux droites ZS, XS se couperont nécessairement au point S centre d'impression des voiles. De plus, si l'on représente l'impulsion du vent par ST, l'impulsion de l'eau par SO, & qu'on décompose cette dernière force en deux autres SR, SP, l'une horisontale l'autre verticale, on aura $SR=ST$. A l'égard de la force verticale SP, elle ne pourra être détruite que par un poids particulier qu'on lui opposera.

Fig. 16.

Fig. 17.

Cela posé, en nommant A^2 l'étendue des voiles, B^2 la surface plane qui exposée au choc perpendiculaire de l'eau éprouveroit une résistance égale à la force SR, m l'angle ICM, n l'angle GCH, V la vitesse absolue du vent suivant IC, u la vitesse absolue du navire suivant CH, ι la densité

du vent, p celle de l'eau : on aura, par le principe ordinaire de l'impulsion des fluides contre les corps exposés à leur courant, l'équation

$$u = \frac{AV \sin.m}{A \sin.i + B\sqrt{p}},$$

XXXI.

Il est visible, par cette formule, que si l'angle de la dérive, la vitesse & la direction du vent demeurent les mêmes, on ne pourra augmenter la rapidité du sillage, qu'en augmentant A, c'est-à-dire, qu'en forçant de voiles. Or si l'on force en effet de voiles, on doit avoir soin de disposer les nouvelles voiles de manière que le centre d'impression de tout le sistême demeure toujours au même endroit. Dans le cas où ce point changeroit de place, il est clair que la quantité B subiroit quelque variation. Alors il faudroit faire quelque transposition de poids, de manière que la résultante des efforts perpendiculaires de l'eau passât par le nouveau centre d'impression des voiles. Si l'angle de la dérive change, il pourra arriver que la vitesse du vaisseau augmente ou diminue, suivant la relation qui se trouve entre le numérateur & le dénominateur de la fraction proposée. Connoissant la figure de la carène, on pourroit déterminer dans chaque cas la vitesse du vaisseau par la théorie ; mais en mer on ne fait pas ces sortes de calculs. On transpose différens poids en tâtonnant, jusqu'à ce que le vaisseau ait toute la vitesse qu'on en peut attendre. Cependant la formule précédente n'en est pas moins utile ; car elle indique les moyens certains de réussir, a l'exclusion de tous les autres.

XXXII.

C'est donc ainsi qu'on parviendra à augmenter la rapidité de la marche par l'arrimage. Si les lignes d'eau déterminées par le Constructeur sont jugées bonnes dans une

première campagne, & qu'on veuille cependant gagner encore quelque choſe ſur la rapidité du ſillage, on aura ſoin de procurer une plus grande ſtabilité au vaiſſeau, en abaiſſant davantage le centre de gravité de la charge totale. Enſuite on déployera une plus grande quantité de voiles, de manière que le centre d'impreſſion de tout le ſiſtême demeure le même qu'il étoit auparavant. Si un vaiſſeau s'eſt mal comporté à la mer pendant une première campagne, & qu'on impute ſes défauts, du moins en partie, à l'arrimage, on fera, pour une autre campagne, un arrimage tout différent du premier. La manière de diſtribuer les canons, les ſaumons, &c, dans la calle, étant abſolument arbitraire, on eſt le maître de corriger, par un arrangement bien combiné & bien réfléchi du leſt, les défauts du navire, qui proviennent de l'arrimage. Nous diſcuterons dans la ſuite les moyens qu'on doit mettre en œuvre pour s'oppoſer, autant qu'il eſt poſſible, aux mouvemens de roulis & de tangage. Si l'on veut faire en mer des changemens à l'arrimage, on tranſportera quelques poids de l'avant à l'arrière, ou de l'arrière à l'avant. Le leſt volant eſt deſtiné à faire ces ſortes de changemens. Lorſqu'il n'eſt pas ſuffiſant, il y a dans la foſſe aux lions beaucoup de poulies, cordages & autres effets que l'on peut tranſporter ſur l'arrière, ſi l'on eſt trop ſur l'avant. Pareillement dans le cas où l'on eſt trop ſur l'arrière, il y a dans cette partie des barils de farine, des légumes en ſacs, &c, qu'on peut porter ſur l'avant.

On peut auſſi prendre dans l'archipompe une certaine quantité de boulets de ſervice que l'on tranſportera ſur l'avant ou ſur l'arrière, ſelon le beſoin, dans des forins vuides exprès pour cet uſage. En tems de paix, on peut démonter quelques canons des batteries, qu'on poſe à l'avant ou à l'arrière, & qu'on remet en place, lorſqu'on approche des rades. Comme l'on conſomme journellement de l'eau & du vin, & que pour conſerver le vaiſſeau dans

son équilibre, & toujours également callé, on a attention ; pour peu qu'il y ait de futailles vuides, de les remplir avec de l'eau de la mer ; si l'on eſt trop ſur l'arrière, on ne remplit pas les futailles de vin qui ont été conſommées. Si on eſt trop ſur l'avant, & qu'on n'ait pas de futailles vuides dans cette partie, on conſomme celles qui y ſont de préférence ; & ſi elles ſont pleines d'eau ſalée, on les fait vuider. On voit qu'on peut toujours tirer quelque parti des futailles pour les changemens de l'arrimage. Il n'en eſt pas de même des matières comeſtibles, parce qu'on ne peut pas remplacer en mer ces ſortes de matières. Mais lorſqu'on eſt à portée de quelque port ou de quelque rade, on ne manque pas d'y deſcendre pour faire du lest, & maintenir par là le vaiſſeau dans l'aſſiette convenable.

Toutes les opérations que je viens d'expoſer ſont fort ſimples, & le bon ſens ſuffit ſeul pour en faire connoître l'avantage, ou même la néceſſité. Cependant on a été très-longtems à ſentir l'influence marquée de l'arrimage ſur les mouvemens du vaiſſeau. On a vu ſouvent des vaiſſeaux condamnés à une première campagne, comme mauvais voiliers, ſe faire, avec la même voilure, une réputation toute oppoſée, dans les campagnes ſuivantes : différence qui ne peut être attribuée qu'au changement d'arrimage. Les Marins éclairés regardent aujourd'hui cette diſtribution de la charge comme un objet important qui mérite toute leur attention. Quelquefois même il réſulte des effets ſurprenans de la ſimple tranſpoſition de quelques poids de l'avant à l'arrière, ou de l'arrière à l'avant. Il ſeroit donc bien eſſentiel, pour la perfection de la pratique de l'arrimage, qu'on étudiât exactement en mer tous les mouvemens du vaiſſeau, qu'on tînt un journal détaillé de tous les changemens qu'on fait en mer à l'arrimage, & des effets qui en proviennent, & qu'on ne ſe contentât pas d'atteſter en gros, à la fin d'une campagne, comme on fait ordinairement, que le vaiſſeau s'eſt comporté de telle ou telle façon à la mer.

SECTION

SECTION III.

Influence de l'arrimage sur les mouvemens d'oscillation du vaisseau.

XXXIII.

Il n'est pas possible qu'un vaisseau à la mer conserve toujours la même situation, comme nous l'avons supposé (§. XXX); car il est continuellement soumis à l'action de différentes forces qui ne se font jamais parfaitement équilibre. Ces forces sont sa propre pesanteur, la poussée verticale de l'eau, l'impulsion du vent sur les voiles, la résistance que le navire éprouve en divisant le fluide: à quoi on peut ajouter l'agitation des lames, qui tantôt viennent frapper avec force les flancs du vaisseau, tantôt se dérobent tout-d'un-coup sous quelqu'une de ses parties, pendant que les autres sont soutenues. Les mouvemens d'oscillation que ces puissances impriment au vaisseau, en toutes sortes de sens, peuvent tourmenter extrêmement la mâture & l'équipage. Il est donc important d'en bien connoître les loix, & d'en empêcher le plus qu'il est possible les mauvais effets, au moyen de l'arrimage. C'est le but que je me propose ici.

XXXIV.

Comme j'aurai besoin de quelques théorêmes de méchanique, dont l'énoncé joint à l'application que j'en ferai, couperoit trop le fil du discours, je vais les rappeller ici d'avance.

Qu'un corps de figure quelconque soit animé par des forces quelconques, & qu'on imagine par le centre de Fig. 18.

gravité A de ce corps trois axes AC, AB, AP perpendiculaires entr'eux qui conservent toujours leur parallélisme dans l'espace absolu, pendant tout le mouvement du centre de gravité. Si l'on réduit à chaque instant, comme cela est possible en effet, toutes les forces qui poussent le corps à trois forces seulement, qui soient dirigées suivant les lignes Ff, Dd, Ee, parallèles chacune à chacun des trois axes P, AB, AC; qu'ensuite ayant mené dans le plan BAC les droites FQ, FO parallèles chacune à chacun des deux axes AB, AB; dans le plan BAP les deux droites ER, ES parallèles chacune à chacun des deux axes AC, AP; dans le plan CAP les droites DK, DH parallèles chacune à chacun des deux axes AC, AP; d'un point quelconque N du corps proposé les trois coordonnées AP, PM, MN, aux trois axes proposés : on nomme F la force dirigée suivant Ff, D la force dirigée suivant Dd, E la force dirigée suivant Ee, dt l'élément du tems, P la masse entière du corps, $d\Pi$ l'espace parcouru par le centre de gravité A, durant l'instant dt, parallélement à AP, $d\varpi$ l'espace parcouru par le centre de gravité A parallélement à AC, du l'espace par le centre de gravité parallélement à AB, q l'abscisse AP, r l'ordonnnée PM, s la seconde ordonnée MN, on aura ces six équations.

$$F = \frac{P\,dd\Pi}{dt^2},$$

$$E = \frac{P\,dd\varpi}{dt^2},$$

$$D = \frac{P\,ddu}{dt^2},$$

$$F \times FQ - D \times DH = \int \frac{dP\,d(sdq - qds)}{dt^2},$$

$$F \times FO - E \times ES = \int \frac{dP\,d(rdq - qdr)}{dt^2},$$

$$E \times ER - D \times DK = \int \frac{d\,Pd\,(rdr - rds)}{dt^2}.$$

Ces théorèmes ſont fondés ſur les premiers principes de la Statique, qui nous apprennent qu'afin qu'un corps, par l'inertie de ſes molécules, faſſe équilibre aux différentes forces qui le ſollicitent au mouvement: 1.° La ſomme de ces forces étrangères, réduite à trois forces ſeulement, parallèles chacune à chacun de trois axes qui ſe croiſent perpendiculairement entr'eux, & qui paſſent par le centre de gravité, doit être égale à la ſomme des réſiſtances des molécules du corps, réduites aux mêmes ſens. 2.° Les momens des premières forces, par rapport aux trois axes propoſés, doivent être égaux aux momens des dernières, par rapport aux mêmes axes. Toutes ces choſes ſont démontrées en détail dans quelques Ouvrages auxquels on me permettra de renvoyer le Lecteur.

XXXV.

Cela poſé, voici la manière d'appliquer ces formules aux mouvemens dont il s'agit §. 33, lorſqu'on connoîtra la figure du vaiſſeau & la loi de toutes les forces qui l'agitent.

Soient $ADBE$ (fig. 20), le plan de flottaiſon du vaiſſeau au premier inſtant du mouvement, AB & DE les ſections de ce plan avec deux plans verticaux, perpendiculaires entr'eux, & paſſant l'un & l'autre par le centre de gravité du vaiſſeau. Ces deux derniers plans ſont repréſentés par $ARZB$ (fig. 19), & par DeE (fig. 21), reſpectivement. Soit le point G (fig. 19 & 21), le centre de gravité du vaiſſeau au même inſtant: qu'on mène par ce point l'axe vertical GC, & les deux axes horiſontaux GQ, GT, le premier dans le plan $ARZB$, le ſecond dans le plan DeE. Il eſt clair que les trois axes GC, GQ, GT ſont ici les mêmes que les trois axes AB, AP, AC de la figure 18. Fig. 19, 20, 21.

Suppoſons, comme dans le §. précédent, que chacun de ces trois axes, emporté avec le centre de gravité, demeure toujours parallèle à lui-même, pendant toute la durée du mouvement.

Quelques puiſſent être les mouvemens du vaiſſeau, il eſt évident qu'ils peuvent être regardés comme compoſés de trois mouvemens progreſſifs du centre de gravité G, le premier ſuivant GQ, le ſecond ſuivant GT, le troiſième ſuivant GC, & de trois mouvemens de rotation de toute la maſſe autour des trois axes, GQ, GT, GC. C'eſt donc ſur cette hypothèſe qu'on va indiquer la méthode de calculer les forces D, E, F, & les momens des mêmes forces par rapport aux trois axes de rotation, ainſi que les réſiſtances des molécules du vaiſſeau, & les momens des mêmes réſiſtances par rapport aux axes propoſés.

XXXVI.

Les forces particulières qui compoſent ici les forces D, E, F, ſont, comme nous l'avons déja dit, la peſanteur du vaiſſeau, la pouſſée verticale de l'eau, la réſiſtance de l'eau, l'impulſion du vent & l'agitation des lames. De ces différentes forces, la peſanteur ſeule du vaiſſeau, eſt conſtante; les autres ſont variables & dépendent ou de la figure du vaiſſeau & de la partie qui eſt plongée à chaque inſtant dans l'eau, ou de la figure des voiles. Suppoſons que le profil longitudinal $ARZB$, partant de la ſituation repréſentée dans la figure 22, où MN eſt la ligne d'eau au premier inſtant, parvienne au bout du tems propoſé dans la ſituation $arzb$, où mn eſt la ligne d'eau; enſorte qu'il s'incline de la poupe à la proue d'une certaine quantité, & qu'en même tems le centre de gravité s'élève verticalement de la quantité VO. La figure du vaiſſeau étant donnée, il eſt clair qu'on connoîtra par la ſeule Géométrie, l'eſpace $hrzf$. Il n'eſt pas moins évident qu'après que le vaiſſeau aura ſubi les deux autres

mouvemens de rotation, on connoîtra encore l'eſpace qu'il occupe dans l'eau. Par conſéquent la pouſſée verticale de l'eau & ſes momens par rapport aux trois axes dont on a parlé, ſeront exprimés en fonctions de quantités conſtantes, du mouvement d'aſcenſion verticale, & des mouvemens de rotation. Les forces qui naiſſent de l'impulſion de l'eau & des lames contre les flancs de la carène, & de l'impulſion du vent contre les voiles ſe détermineront ſuivant les méthodes ordinaires, ou ſuivant les nouvelles hypothèſes qu'on croira les plus vraiſemblables. Je n'entre pas là-deſſus dans de plus grands détails, parce qu'on verra bientôt l'inutilité d'enviſager le problême ſous un point de vue ſi général. Il ſuffit, quant à-préſent, qu'on apperçoive les moyens de traduire, relativement à notre queſtion, les ſix premiers membres des équations du §. 34.

XXXVII.

Soient dans la figure 23 les trois axes GQ, GC, GT, qui ſe croiſent perpendiculairement au centre de gravité G, axes qui ſont les mêmes reſpectivement que ceux qui ſont déſignés par les mêmes lettres dans les figures 19 & 21. D'un point déterminé H du navire au premier inſtant du mouvement, ſoit abbaiſſée HF perpendiculaire au plan horizontal TGQ, & du point F ſoit tirée FE perpendiculaire à GQ, de manière que GE, EF, FH ſoient les coordonnées du point H par rapport aux trois axes propoſés. Suppoſons qu'en vertu de la rotation du corps autour de l'axe vertical GC, la droite FH, en tournant parallélement à elle-même, prenne la poſition SV; qu'en vertu de la rotation autour de l'axe GQ, le point V parviennne en R; qu'en vertu de la rotation autour de l'axe GT, le point R parvienne en N. Il eſt clair que ſi de ce point N on abbaiſſe NM perpendiculaire au plan horiſontal TGQ, & qu'on tire MP perpendiculaire à GQ; les trois coordonnées GP, Fig. 23.

PAI, *MN* ſont celles que nous avons nommées q, r, s, reſpectivement dans le §. 34, & dont il s'agit maintenant de trouver les expreſſions en fonctions des trois angles de rotation.

Soient tirées les droites *GF*, *GS*, *DV*. Du point *R* ſoit abbaiſſée *RO* perpendiculaire ſur le plan horiſontal *TGQ*, & par le point *O* ſoit menée perpendiculairement à *GT* la droite *XO* qui paſſe néceſſairement par le point *M*. Soient tirées les droites *XR*, *XN*. Enfin des points *D* & *X* ſoient élevées perpendiculairement au plan *TGC*, ou parallélement à l'axe *GC*, les droites *DZ*, *XY*.

Suppoſons
- $GE \ldots = \psi$
- $EF \ldots = \lambda$
- $FH \ldots = \mu$
- l'angle de rotation autour de l'axe $GC \ldots = x$
- l'angle de rotation autour de l'axe $GQ \ldots = y$
- l'angle de rotation autour de l'axe $GT \ldots = z$

Cela poſé, 1.° l'angle *DGS* étant la ſomme de l'angle *EGF*, & de l'angle *FGS* (x), on aura

$$\text{ſin. } DGS = \frac{\lambda \cos. x + \psi \text{ ſin. } x}{GF},$$

$$\text{coſ. } DGS = \frac{\psi \cos. x - \lambda \text{ ſin. } x}{GF};$$

donc

$$DS = \lambda \cos. x + \psi \text{ ſin. } x,$$
$$GD = \psi \cos. x - \lambda \text{ ſin. } x.$$

2.° l'angle *RDZ* étant la ſomme de l'angle *VDZ* & de l'angle *VDR* (y), on aura

$$\text{ſin. } RDZ = \frac{DS \times \cos. y + SV \times \text{ſin. } y}{DV} = \frac{\lambda \cos. x \cos. y + \psi \text{ ſin } x \cos. y + \mu \text{ ſin. } y}{DV},$$

$$\text{coſ. } RDZ = \frac{SV \times \cos y - DS \times \text{ſin. } y}{DV} = \frac{\mu \cos. y - \lambda \cos. x \text{ ſin. } y - \psi \text{ ſin. } x \text{ ſin. } y}{DV}.$$

donc

$DO = \lambda \cos.x \cos.y + \psi \sin.x \cos.y + \mu \sin.y$,

$RO = \mu \cos.y - \lambda \cos.x \sin.y - \psi \sin.x \sin.y$.

Donc, à cauſe de $PM = DO$,

$$r = \lambda \cos.x \cos.y + \psi \sin.x \cos.y + \mu \sin.y.$$

3.° L'angle NXY étant la ſomme de l'angle RXY & de $RXN(z)$, on aura, (à cauſe de

$$\sin.NXY = \frac{XO \times \cos.z + RO \times \sin.z}{RX},$$

$$\cos.NXY = \frac{RO \times \cos.z - XO \times \sin.z}{RX}$$

& de $XO = GD$, $XM = GP = q$, $MN = s$),

$q = \psi \cos.x \cos.z - \lambda \sin.x \cos.z + \mu \cos.y \sin.z - \lambda \cos.x \sin.y \sin.z - \psi \sin.x \sin.y \sin.z$,

$s = \mu \cos.y \cos.z - \lambda \cos.x \sin.y \cos.z - \psi \sin.x \sin.y \cos.z - \psi \cos.x \sin.z + \lambda \sin.x \sin.z$.

Ces valeurs de r, q, s ſont générales & applicables à toutes ſortes de corps.

Nous aurons donc ici les valeurs des trois quantités

$\int dP\, d(sdq - qds)$, $\int dP\, d(rdq - qdr)$, $\int dP\, d(sdr - rds)$.

Dans les deux différentiations qu'il faut faire d'abord pour trouver $d(sdq - qds)$, $d(rdq - qdr)$, $d(sdr - rds)$, les angles x, y, z ſont variables, & les quantités ψ, λ, μ ſont conſtantes. Mais dans l'intégration qui ſuit, il n'y a que les quatre quantités dP, ψ, λ, μ qui doivent être regardées comme variables, les autres doivent être écrites au devant des ſignes d'intégration, parce qu'alors les intégrales renferment les mouvemens en tant qu'ils ſont appliqués à tous les points de la maſſe du corps.

XXXVIII.

Il ſuit des deux §. précédens, qu'on pourra traduire entièrement les équations générales du §. XXXIV, de

manière qu'elles repréſentent en général tous les mouvemens d'un vaiſſeau flottant à la mer. Mais il faut avouer que l'exécution de cette méthode demanderoit des calculs immenſes & vraiſemblablement impraticables. Heureuſement pluſieurs raiſons diſpenſent d'entreprendre ce travail dans toute ſa complication.

1.° La figure du vaiſſeau eſt extrêmement irrégulière, & ne peut ſe rapporter à celle d'aucun corps géométrique. Elle eſt fort différente dans les différens vaiſſeaux: par conſéquent les calculs qu'on feroit à cet égard ſeroient purement hypothétiques, & n'iroient point au but dans la pratique.

2.° L'impulſion du vent ſur les voiles, & la réſiſtance que le navire éprouve en diviſant l'eau, ſont deux forces qui ſe font ſans ceſſe équilibre, du moins à-très-peu-près. Si cet équilibre vient à être dérangé, il ſe rétablit très-promptement & peut être conſidéré comme permanent. De plus ces deux mêmes forces ſont ordinairement fort petites en comparaiſon de la peſanteur du vaiſſeau & de la pouſſée verticale de l'eau. Ainſi les inégalités qu'elles produiſent dans les mouvemens du vaiſſeau peuvent le plus ſouvent être négligés, ſans craindre aucune erreur ſenſible.

3.° L'action des lames eſt une force qu'il eſt abſolument impoſſible de ſoumettre à un calcul réel & non hypothétique. Dans certains momens, cette force ſe fait ſentir avec violence: dans d'autres elle eſt comme nulle. Je crois qu'il convient de la rapporter plutôt au genre des forces de *percuſſion*, qui agiſſent par coups *finis* & *interrompus*, qu'au genre des forces de *preſſion*. Par-là elle doit être exclue du calcul. La fonction qu'elle aura alors ſera de troubler de tems en tems l'état actuel du vaiſſeau, ce qui ne peut qu'introduire certaines quantités conſtantes dans les intégrations.

4.° Il eſt inutile de déterminer en général les oſcillations d'un vaiſſeau, parce que ces oſcillations ne doivent jamais paſſer

paſſer certaines bornes, afin qu'il y ait ſureté dans la navigation. Ainſi la ſolution de ce problême aura aſſez de généralité, ſi l'on détermine ſeulement les oſcillations très-petites du vaiſſeau, & qu'on aſſigne de plus les conditions qui doivent avoir lieu, afin que ces mêmes oſcillations demeurent très-petites.

De ces quatre aſſertions, la première, la troiſième & la quatrième ſont évidentes par elles-mêmes. La ſeconde eſt la ſeule qui ait beſoin d'une explication un peu plus développée.

XXXIX.

Le vent eſt la force motrice qui met le navire en mouvement, & qui le pouſſe vers le but déſiré. Dans les premiers inſtans, cette force l'emporte beaucoup ſur la réſiſtance que le navire éprouve en diviſant l'eau. Ainſi le ſillage s'accélère avec rapidité. Mais cette accélération ne dure guères que trois ou quatre minutes. Au bout de ce tems le vaiſſeau a acquis toute ſa viteſſe, qu'il conſerve dans la ſuite, en vertu de ſon inertie; & par conſéquent l'impulſion du vent & la réſiſtance de l'eau ſe font équilibre. Cela eſt conſtant par l'expérience.

La même choſe peut encore ſe démontrer par le raiſonnement. Quoique cette diſcuſſion n'appartienne pas proprement à mon ſujet, je crois devoir y entrer, parce qu'un Auteur célebre qui a traité au long ce problême, n'a pas fait une remarque dont l'omiſſion ſemble mettre le calcul en contradiction avec l'expérience.

Suppoſons, avec l'Auteur dont il s'agit, un navire qui ſe meut ſuivant la route directe, & qui étant en repos au premier inſtant du mouvement, eſt expoſé tout-d'un-coup à l'action du vent. Il eſt queſtion de déterminer le tems que ce navire employera à acquérir toute ſa viteſſe. On voit aſſez que ſi on trouve ce tems fort petit, on ſera en droit d'affirmer, à plus forte raiſon, que l'accélération ou la

rétardation auxquelles un navire en mer peut être ſujet, s'opèrent en un tems très-court, & de regarder par conſéquent ſa viteſſe comme ſenſiblement uniforme.

Nommons g la gravité, N la maſſe du navire, ι la denſité du vent, p celle de l'eau, A^2 la ſurface plane qui expoſée au choc perpendiculaire du vent, éprouveroit la même choc qu'éprouvent les voiles parallélement à la quille, B la ſurface qui expoſée au choc perpendiculaire de l'eau éprouveroit la même impulſion qu'éprouve le navire dans le ſens de ſa quille, V la viteſſe du vent (qu'on peut regarder comme conſtante, au moins pendant un certain tems), u la viteſſe variable du navire, t le tems écoulé depuis le commencement du mouvement. Suppoſons de plus que ſous une viteſſe donnée m, l'impulſion directe de l'eau contre un plan donné n^2, ſoit égale à un poids dont la maſſe eſt P.

Cela poſé, on aura, ſuivant l'hypothèſe ordinaire, que l'impulſion directe d'un fluide contre un plan eſt proportionnelle au produit de ce plan par la denſité du fluide, & par le quarré de la viteſſe avec laquelle ſe fait le choc,

$$\frac{gP}{pm^2n^2}\left[A^2(V-u)^2-pB^2u^2\right]dt=Ndu;$$

d'où l'on tire aiſément

$$t=\frac{pm^2n^2}{gP}\times\frac{N}{2ABV\sqrt{p}}L.\left(\frac{AV-Au+BuV\sqrt{p}}{AV-Au-BuV\sqrt{p}}\right),$$

en complettant l'intégrale, de manière que $t=0$ donne $u=0$.

Maintenant il eſt évident que l'accélération devient nulle lorſqu'on a $A^2(V-u)^2-pB^2u^2=0$, ou bien $u=\frac{AV}{A+BV\sqrt{p}}$. Il ſemble donc que pour déterminer le tems que le navire emploie à acquérir ſa plus grande viteſſe, il n'y auroit qu'à ſubſtituer cette valeur de u dans l'expreſſion générale de t. Mais ſi l'on fait cette ſubſtitution, on

trouvera que le dénominateur de la quantité logarithmique devient égal à zéro ; d'où il s'enſuit que le tems cherché, au lieu d'être très-petit, ſeroit au contraire infini. Comment concilier le calcul avec l'expérience ? voici le dénouement de cette petite difficulté.

Il eſt certain d'abord que ſuivant l'hypothèſe de l'impulſion des fluides, dont nous venons de tirer la valeur du tems, la viteſſe ne peut parvenir à une uniformité rigoureuſe qu'au bout d'un tems infini. Dans le commencement du mouvement, l'impulſion du vent contre le navire eſt très-grande ; d'où il ſuit que u augmente très-promptement : & comme le quarré de u entre dans l'expreſſion de la réſiſtance que l'eau oppoſe au navire, on comprend que u peut approcher très-près de $\frac{AV}{A+BVp}$, ſans qu'on ait pour cela rigoureuſement $A^2(V-u)^2=pB^2u^2$. Ainſi s'il n'y avoit pas d'autre cauſe qui influât ſur la viteſſe, elle ne parviendroit pas à l'uniformité abſolue. Mais il faut remarquer que le navire éprouve encore une autre ſorte de réſiſtance qui achève d'opérer l'effet dont il s'agit. Cette ſeconde réſiſtance eſt celle qui naît de la ténacité ou de l'adhéſion mutuelle des parties de l'eau. Elle eſt comme nulle, en comparaiſon de la première, lorſque le navire a acquis une viteſſe un peu conſidérable. Mais dans les premiers inſtans du mouvement, elle doit ſe faire ſentir & produire quelque rétardation dans la viteſſe du vaiſſeau, de manière que, par la combinaiſon des deux réſiſtances, la viteſſe devient bientôt uniforme, comme on l'obſerve en effet.

Quant à ce que nous avons ajouté que l'impulſion du vent & la réſiſtance de l'eau ſont des forces très-petites en comparaiſon de la peſanteur du vaiſſeau, & de la pouſſée verticale de l'eau ; cela eſt aiſé à voir par les calculs de l'impulſion de l'eau contre la proue de pluſieurs vaiſſeaux, que M. Duhamel a faits dans ſon Architecture navale.

XL.

Je reviens à mon ſujet, & je vais en conſéquence de toutes les remarques qui précédent, déterminer les mouvemens d'oſcillation du vaiſſeau, en ſuppoſant ces oſcillations très-petites, & en n'ayant égard qu'à la peſanteur du vaiſſeau, & à la pouſſée verticale de l'eau. Je compte parmi ces oſcillations le mouvement d'aſcenſion verticale du centre de gravité. Les autres mouvemens du centre de gravité ſont ſuppoſés ou nuls, ou parfaitement uniformes. La réſiſtance que le navire éprouve en frappant l'eau, en vertu des mouvemens d'oſcillation dont on vient de parler, doit être négligée, parce que cette force renferme dans ſon expreſſion le quarré de la viteſſe, qui eſt un infiniment petit du ſecond ordre.

Soient repriſes les hypothèſes & les conſtructions des §. XXXIV, XXXV, XXXVI, XXXVII, en obſervant néanmoins qu'ici le plan *ARZB* peut être cenſé paſſer par la quille, & partager le vaiſſeau en deux parties parfaitement égales & ſemblables, parce que l'inclinaiſon primitive eſt très petite. Qu'outre les dénominations déja employées dans ces mêmes paragraphes, on ſuppoſe encore

Fig. 19, 20, 21, 22.

La gravité ..... $=g$
Le volume du navire ..... $=N$
Sa denſité ..... $=1$
Le volume de la carène primitive ..... $=M$
La denſité de l'eau ..... $=p$
La diſtance OH du centre de gravité du plan de flottaiſon $ADBE$ (fig. 20) au point O ... $=k$
La hauteur du centre de gravité du navire au-deſſus de celui de la carène au premier inſtant $=h$
La diſtance initiale très-petite du centre de gravité de la carène primitive aux plan vertical $ARZB$ ..... $=f$

La distance initiale aussi très-petite du centre de gravité de la carène primitive au plan vertial DeE (fig. 22) ..... $=f'$

L'aire $ADBE$ (fig. 20) ..... $=aa$

Le mouvement d'ascension verticale du centre de gravité ..... $=u$.

Nous aurons ici $F=0$, $E=0$.

La force D, la seule qui nous reste, est égale à l'excès de la poussée verticale de l'eau sur la pesanteur du navire. Supposons que le plan de flottaison AB ayant pris la position ab peu différente de la première, en vertu de la rotation du navire autour de l'axe GT, on abbaisse du centre de gravité G la perpendiculaire Go sur ab: il est clair que les points O & o étant très proches l'un de l'autre, les deux plans de flottaison AB & ab peuvent être censés se couper sur la verticale GO; & que de plus les angles formés par la rencontre de AB & de ab sont égaux à l'angle OGo. Les mêmes remarques ont lieu relativement au mouvement du navire autour de l'axe GQ. Cela posé, il est évident que la nouvelle carène, après le tems t écoulé, est égale à la première M, moins un prisme qui a pour base le plan de flottaison $ADBE$, & pour hauteur la hauteur parcourue verticalement par le centre de gravité, moins un onglet formé par la rotation de la partie EBD autour de ED, plus un onglet formé par la rotation de la partie EAD autour de ED, moins un onglet formé par la rotation de la partie AEB autour de AB, plus un onglet formé par la rotation de la partie ADB autour de AB. Donc à cause de l'égalité de ces deux derniers onglets, la nouvelle carène sera $M-aau-\alpha z+\varepsilon z$, α & ε étant des coéficiens donnés par la nature de la courbe $ADBE$. Donc Fig. 22.

1.° $D=gP(M-aau-\alpha z+\varepsilon z)-gN$.

2.° La distance initiale du centre de gravité de M au plan DeE étant f', cette distance après le tems t sera

$f'+hz$. Soient $\alpha' z$ & $\varepsilon' z$ les momens des deux onglets αz, εz par rapport à l'axe GT, α' & ε' étant encore des coéficiens donnés. Je néglige deux momens de la forme $\alpha'' y$, à cause de leur petitesse. Le moment du prisme aau par rapport à l'axe GT est $aaku$. Donc, en observant que le moment de la poussée de l'eau par rapport à l'axe GT doit être pris dans un sens contraire au moment de la force D dans la figure 18, nous aurons ici

$$-D\times DH=gp[M(f'+hz)-aaku-\alpha' z-\varepsilon' z].$$

De même, en nommant $\gamma\gamma$ le moment de l'onglet formé par la rotation de AEB ou de ADB autour de AB, par rapport à l'axe GQ; & observant que le prisme aau & les deux autres onglets αz, εz n'ont point de momens par rapport à l'axe GQ, nous aurons

$$-D\times DK=gp[M(f+hy)-2\gamma\gamma].$$

3.° Les oscillations étant supposées fort petites, il est évident que dans les valeurs de r, q, s trouvées ci-dessus, (§ XXXVII), on peut négliger tous les termes qui contiennent plus d'un sinus, & supposer dans les termes qui contiennent un sinus & un cosinus ou deux cosinus, chaque cosinus=1 : d'où il résulte qu'on aura

$$sdq-qds=-\lambda\mu dx+(\mu^2+\psi^2)dz+\psi\lambda dy,$$
$$rdq-qdr=-(\psi^2+\lambda^2)dx+\lambda\mu dz-\psi\mu dy,$$
$$sdr-rds=\psi\mu dx+(\lambda^2+\mu^2)dy+\psi\lambda dz.$$

Donc

$$\int dPd(sdq-qds)=-ddx\int\lambda\mu dN+ddz\int(\mu^2+\psi^2)dN-ddy\int\psi\lambda dN,$$
$$\int dPd(rdq-qdr)=-ddx\int(\psi^2+\lambda^2)dN+ddz\int\lambda\mu dN-ddy\int\psi\mu dN,$$
$$\int dPd(sdr-rds)=ddx\int\psi\mu dN+ddy\int(\lambda^2+\mu^2)dN+ddz\int\psi\lambda dN.$$

Les quantités qui sont sous le signe d'intégration sont données por la figure du navire.

Ces formules peuvent se simplifier; car puisque le navire est divisé en deux parties égales & semblables par la coupe longitudinale $ARZB$, il est clair qu'on a $\int \lambda\mu dN = 0$, $\int \psi\lambda dN = 0$. Ainsi on aura simplement

$$\int dPd(sdq - qds) = ddz \int (\psi^2 + \mu^2) dN,$$

$$\int dPd(rdq - qdr) = -ddx \int (\psi^2 + \lambda^2) dN - ddy \int \psi\mu dN,$$

$$\int dPd(sdr - rds) = ddx \int \psi\mu dN + ddy \int (\lambda^2 + \mu^2) dN.$$

Nous supposerons, pour abréger, $\int (\psi^2 + \mu^2) dN = Q$; $\int (\psi^2 + \lambda^2) dN = R$, $\int \psi\mu dN = S$, $\int (\lambda^2 + \mu^2) dN = V$; & l'on se souviendra que

Q représente la somme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs distances à l'axe latitudinal GT,

R représente la somme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs distances à l'axe vertical GC,

S représente la somme des produits des particules du navire par leurs distances à la coupe latitudinale passant par le centre de gravité & à la coupe horisontale passant aussi par le centre de gravité,

V représente la somme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs distances à l'axe longitudinal GQ.

Tout cela posé, on aura ces quatre équations fondamentales,

$$gp(M - aau - \alpha z + \varepsilon z) - gN = \frac{Nddu}{dt^2},$$

$$gp[M(f' + hz) - aaku - \alpha' z - \varepsilon' z] = \frac{Qddz}{dt^2},$$

$$Rddx + Sddy = 0,$$

$$gp[M(f + hy) - 2\gamma y] = \frac{Sddx + Vddy}{dt^2},$$

dont les deux premières combinées ensemble sont intégrables par des méthodes connues; les deux dernières aussi combinées ensemble sont encore plus faciles à intégrer.

XLI.

Pour parvenir à des réſultats très-ſimples & facilement applicables à la pratique, nous négligerons encore le mouvement d'aſcenſion verticale du centre de gravité, qui ne peut jamais être fort ſenſible, lorſqu'on fait abſtraction, comme nous faiſons ici, de l'action des lames. Alors la première équation devient nulle, & le terme $aaku$ diſparoit de la ſeconde. Par conſéquent les trois mouvemens d'oſcillation du vaiſſeau ſeront exprimées par ces trois équations

(A) $gp[M(f'+hz)-\alpha' z-\epsilon' z]=\frac{Qdd\zeta}{dt^2}$,

(B) $Rddx+Sddy=0$,

(C) $gp[M(f+hy)-2\gamma y]=\frac{Sddx+Vddy}{dt^2}$.

Multipliant tous les termes de la première par dz, & intégrant, on aura

$$gp[Mf'z+\frac{(Mh-\alpha'-\epsilon')\zeta\zeta}{2}]=\frac{Qd\zeta^2}{2dt^2},$$

d'où l'on tire facilement

$$z=\frac{Mf'}{\alpha'+\epsilon'-Mh}-\frac{Mf'}{\alpha'+\epsilon'-Mh}\,cof.\left(t\sqrt{\frac{gp.(\alpha'+\epsilon'-Mh)}{Q}}\right).$$

On trouvera de même

$$y=\frac{Mf}{2\gamma-Mh}-\frac{Mf}{2\gamma-Mh}\,cof.\left(t\sqrt{\frac{gp.R(2\gamma-Mh)}{RV-SS}}\right);$$

$$x=\frac{S}{R}\times\frac{Mf}{2\gamma-Mh}+\frac{S}{R}\times\frac{Mf}{2\gamma-Mh}\,cof.\left(t\sqrt{\frac{gp.R(2\gamma-Mh)}{RV-SS}}\right).$$

Ces intégrales ſont complettes, parce qu'on doit avoir $z=0$, $y=0$, $x=0$, lorſque $t=0$.

Qu'on prenne une nouvelle variable v telle que l'on ait

$$t=v\sqrt{\frac{Q}{gp.(\alpha'+\epsilon'-Mh)}}$$

on

on trouvera

$$z = \frac{Mf'}{\alpha' + \varepsilon' - Mh} - \frac{Mf'}{\alpha' + \varepsilon' - Mh} \times \cos. v,$$

$$y = \frac{Mf}{2\gamma - Mh} - \frac{Mf}{2\gamma - Mh} \times \cos.\left(v\sqrt{\frac{QR.(2\gamma - Mh)}{(RV - SS)(\alpha' + \varepsilon' - Mh)}}\right),$$

$$x = -\frac{S}{R} \times \frac{Mf}{2\gamma - Mh} + \frac{S}{R} \times \frac{Mf}{2\gamma - Mh} \times \cos.\left(v\sqrt{\frac{QR.(2\gamma - Mh)}{(RV - SS)(\alpha' + \varepsilon' - M}}\right)$$

Dans chacune de ces valeurs de z, y, x, le premier terme eſt *conſtant*, le ſecond eſt *variable*. Celui ci peut être conſidéré comme l'équation du premier, en employant ce mot dans le même ſens que font les Aſtronomes en pareil cas. L'un & l'autre terme eſt fort petit, parce qu'on a ſuppoſé que f & f' étoient des quantités très- petites.

Ces formules vont nous fournir (au moins par une approximation ſuffiſamment exacte dans la pratique) les moyens de procurer aux vaiſſeaux toute la ſtabilité convenable, & de modérer les mouvemens de tangage, de roulis & de rotation horiſontale. Commençons par la ſtabilité.

XLII.

En remontant aux trois équations fondamentales (A), (B), (C), on trouve que ſi Mh eſt plus grand que $(\alpha' + \varepsilon')$, ou que ces deux quantités ſoient ſeulement égales, lorſqu'il s'agit des mouvemens de tangage; & que ſi Mh eſt plus grand que 2γ, ou que ces deux quantités ſoient ſeulement égales, lorſqu'il s'agit des mouvemens de roulis & de rotation horiſontale: on trouvera, dis-je, que les valeurs de z, y, x contiendront des logarithmes, & ſeront par conſéquent ſujettes à augmenter à meſure que le tems t augmentera. Or ces quantités ont été ſuppoſées très-petites. Donc alors le navire n'aura pas de ſtabilité. Ainſi lorſqu'il s'agit des mouvemens de tangage, la limite de la plus grande hauteur à laquelle le centre de gravité de la charge

totale puiſſe être placée au-deſſus de celui de la carène, eſt donnée par cette équation

$$h=\frac{\alpha'+\varepsilon'}{M};$$

Et lorſqu'il s'agit des mouvemens de roulis, & de rotation horiſontale, la limite de la plus grande hauteur à laquelle le centre de gravité de la charge puiſſe être placée au deſſus de celui de la carène, eſt donnée par cette équation

$$h=\frac{2\gamma}{M}.$$

Il eſt évident que cette dernière hauteur eſt moindre que la précédente, & doit être priſe dans tous les cas pour la limite de la diſtance des deux centres de gravité, parce que le vaiſſeau roule en même temps qu'il tangue, ou roule après avoir tangué. On cherchera donc la valeur de la quantité $\frac{2\gamma}{M}$, & on aura ſoin de diſtribuer la charge, de manière qu h ſoit plus petite que $\frac{2\gamma}{M}$. Le vaiſſeau aura d'autant plus de ſtabilité que h ſera moindre en comparaiſon de $\frac{2\gamma}{M}$.

Il me ſemble que cette manière de déterminer la ſtabilité du vaiſſeau, ou la poſition du *metacentre*, eſt plus ſimple & plus directe que toutes celles que l'on a employées juſques à préſent.

Fig. 20. On doit ſe ſouvenir que conformément à nos dénominations, α' eſt le moment de l'onglet très-petit formé par la rotation de l'aire FBD autour de ED, par rapport à la même ligne ED; ε' eſt le moment de l'onglet formé par la rotation de l'aire EAD autour de ED, par rapport à la même ligne ED; γ eſt le moment de l'onglet formé par la rotation de l'aire AEB ou ADB autour de AB, par rapport à la même ligne AB. Comme on néglige le mouvement d'aſcenſion du centre de gravité du vaiſſeau, & que

par conſéquent la verticale élevée par ce même centre de gravité paſſe, du moins à-très peu-près, par le centre de gravité du plan de flottaiſon, on a $\varepsilon' = \alpha'$, au moins ſenſiblement.

XLIII.

Il n'eſt pas moins facile de déterminer l'amplitude des oſcillations du vaiſſeau.

Les valeurs de z, y, x, augmentent depuis o juſqu'à ce que chaque coſinus particulier qu'elles renferment, devienne égal à -1 : alors elles atteignent leur *maximum* ; après quoi elles diminuent par les mêmes degrés. Donc ſi l'on nomme Z, Y, X reſpectivement les amplitudes *totales* & *abſolues* des mouvemens de tangage, de roulis, & de rotation horizontale, on aura (en ſuppoſant $\alpha' = \varepsilon'$),

$$Z = \frac{2Mf'}{2\alpha' - Mh},$$

$$Y = \frac{2Mf}{2\gamma - Mh},$$

$$X = \frac{S}{R} \times \frac{2Mf}{2\gamma - Mh}.$$

D'où l'on voit que pour diminuer l'amplitude des mouvemens de tangage & de roulis, la queſtion ſe réduit à diminuer h dont on eſt le maître, c'eſt-à-dire, à abbaiſſer de plus en plus le centre de gravité de la charge totale. Quant aux mouvemens de rotation horiſontale, on les diminuera en abbaiſſant le centre de gravité dela charge, en diſtribuant la charge, de la même manière (autant qu'il eſt poſſible), ſoit par rapport à la coupe latitudinale paſſant par le centre de gravité, ſoit par rapport à la coupe horizontale paſſant par le centre de gravité, & en éloignant les poids de l'axe vertical.

Tel eſt donc le moyen d'empêcher qu'un vaiſſeau, dans

le roulis & le tangage ne décrive de trop grands arcs, c'eſt d'abbaiſſer le plus qu'il eſt poſſible le centre de gravité de la charge. Par-là le vaiſſeau acquiert encore de la ſtabilité. Lorſque la carène eſt fort pincée par le bas, le vaiſſeau plie ſous le vent juſqu'à ce qu'il ait atteint ſon fort, & l'inclinaiſon peut être portée très-loin. On prévient cet inconvénient, en abbaiſſant le centre de gravité. Mais il eſt quelquefois dangereux que le vent & la poussée verticale de l'eau, en ſe combattant mutuellement, n'expoſent la mâture à ſe briſer, lorſque l'une des deux forces cède tout d'un coup à l'autre. La profondeur du centre de gravité ne doit donc pas paſſer certaines limites, qu'on ne peut aſſigner en général, mais que les Marins expérimentés trouveront ſans peine dans chaque cas particulier. Au contraire un vaiſſeau dont les fonds ſont arrondis, tend à tourner dans toutes les ſituations; il cède preſque ſans réſiſtance aux efforts du vent & des lames. Ainſi pour lui procurer de la ſtabilité, & pour diminuer l'amplitude de ſes oſcillations, on ne ſauroit trop faire deſcendre ſon centre de gravité. Malheureuſement on n'eſt pas toujours le maître de placer ce point comme il conviendroit, parce qu'on eſt gêné par les emplacemens fixes que certaines matières doivent néceſſairement occuper. Par exemple, dans les vaiſſeaux de guerre, l'artillerie élève conſidérablement le centre de gravité. Alors il ſera du moins avantageux, toutes choſes d'ailleurs égales, que les canons de la première batterie ſoient plus peſans que ceux de la ſeconde, les canons de la ſeconde plus peſans que ceux de la troiſième, &c. C'eſt une règle que la pratique a enſeignée, & que la théorie confirme.

XLIV.

Enfin nous déterminerons encore par nos formules la *viteſſe* des oſcillations. Le problême ſe réduit à trouver la

tems que le navire emploie à faire les oscillations totales Z, Y, X; car selon que ce tems sera plus ou moins long, la vitesse sera moins ou plus rapide.

Nous avons trouvé en général (§. XLI)

$$t=v\sqrt{\frac{Q}{gp\,(2\alpha'-Mh)}};$$

or lorsque z devient Z, $cos.\,v=-1$, ou bien $v=180°$;

lorsque y devient Y, $cos.\left(v\sqrt{\frac{QR.(2\gamma-Mh)}{(RV-SS).(2\alpha'-Mh)}}\right)=-1$,

ou bien $v=180°\sqrt{\frac{(RV-SS)(2\alpha'-Mh)}{QR.(2\gamma-Mh)}}$; lorsque x devient

X, $v=180°\sqrt{\frac{(RV-SS)(2\alpha'-Mh)}{QR.(2\gamma-Mh)}}$.

Donc, en considérant que le sinus total est 1, & nommant n le rapport de la demie circonférence au rayon, $t\,(T)$ le tems de l'oscillation totale de tangage, $t\,(R)$ le tems de l'oscillation totale de roulis, $t\,(H)$ le tems de l'oscillation totale de rotation horizontale, on aura

$$t\,(T)=n\sqrt{\frac{Q}{gp.(2\alpha'-Mh)}},$$

$$t\,(R)=n\sqrt{\frac{(RV-SS)}{gpR(2\gamma-Mh)}},$$

$$t\,(H)=n\sqrt{\frac{(RV-SS)}{gpR(2\gamma-Mh)}}.$$

On voit que les deux derniers tems sont égaux entr'eux. L'expression de ces deux mêmes tems peut se simplifier, parce que la quantité S, dans tous les vaisseaux, étant fort petite par rapport à chacune des quantités Q, R, V, il est permis de négliger le terme S^2.

Comme les valeurs des trois tems proposés ne contiennent point les lettres f & f', il est clair que les tems des oscillations seront toujours les mêmes dans chaque

eſpèce, quelles que puiſſent être les amplitudes de ces oſcillations, pourvû néanmoins qu'elles demeurent toujours fort petites.

Pour employer commodément ces formules, ſuppoſons qu'on exprime par b & c reſpectivement les quantités $\frac{Q}{p(2\alpha'-Mh)}$ & $\frac{V}{p.2\gamma-Mh)}$ qui ſont évidemment des lignes; de manière que l'on ait $t(T)=n\sqrt{\frac{b}{g}}$, $t(R)$ ou $t(H)=n\sqrt{\frac{c}{g}}$. Soient nommés θ & θ' reſpectivement les tems qu'un corps employeroit par ſa peſanteur à parcourir les eſpaces b & c: on aura, comme on ſait, $\theta=\sqrt{\frac{2b}{g}}$, $\theta'=\sqrt{\frac{2c}{g}}$; donc $t(T)=\frac{n\theta}{\sqrt{2}}$, $t(R)$ ou $t(H)=\frac{n\theta'}{\sqrt{2}}$. Or ſi l'on ſuppoſe qu'un corps peſant parcoure 15 pieds pendant la première ſeconde de ſa chute, on aura $\theta=1''\sqrt{\frac{b\text{ pieds}}{15\text{ pieds}}}$, $\theta'=1''\sqrt{\frac{c\text{ pi.}}{15\text{ pi.}}}$; donc enfin

$$t(T)=1''\times n\sqrt{\frac{Q}{30^{\text{pi.}}\cdot p(2\alpha'-Mh)}},$$

$$t(R)\text{ ou }t(H)=1''\times n\sqrt{\frac{V}{30^{\text{pi.}}p(2\gamma-Mh)}},$$

expreſſions dans leſquelles les quantités radicales ſont des nombres abſolus.

Toutes ces préparations faites, voici les réflexions pratiques ſur la viteſſe des oſcillations.

1.° On voit que pour diminuer la viteſſe des mouvemens de tangage, ou pour augmenter $t(T)$, il faut augmenter la fraction $\frac{Q}{2\alpha'-Mh}$. Or dans cette fraction, le volume M de la carène eſt donné; la quantité α eſt auſſi donnée. Reſtent donc ſeulement les deux quantités Q & h

qu'on eſt le maître de changer par l'arrimage. Or puiſque Q repréſente la ſomme des produits des particules de la charge par les quarrés de leurs diſtances à l'axe latitudinal, il eſt évident qu'on diminuera la viteſſe des mouvemens de tangage, en écartant le plus qu'on pourra de l'axe latitudinal des poids fort peſans, c'eſt-à-dire, en tranſportant ces poids vers la proue & vers la pouppe. Nous avons ſuffiſamment indiqué (§. XXXII), les poids dont on peut ſe ſervir pour faire ces ſortes d'arrangemens, ſoit qu'il s'agiſſe d'arrimer le vaiſſeau dans le port, ſoit qu'il faille changer quelque choſe en mer à l'arrimage. Quant à l'autre moyen, qui conſiſte à augmenter h, c'eſt-à-dire, à élever le centre de gravité de la charge, il n'eſt pas tout-à fait ſi efficace que le premier; cependant il peut être utile en pluſieurs occaſions. Lorſqu'un vaiſſeau doit porter des effets très peſans, tels que des canons, des ancres, du marbre, &c, & qu'on veut l'empêcher d'oſciller avec trop de vivacité, on élève le centre de gravité de la charge, en arrimant les canons, les ancres, &c, ſur un fardage qui eſt compoſé de lits de fagots, & dont l'épaiſſeur eſt plus ou moins grande, ſuivant le beſoin.

2.° En raiſonnant de même au ſujet des mouvemens de roulis & de rotation horizontale, il eſt clair qu'on diminuera la viteſſe de ces mouvemens, ſi l'on écarte le plus qu'on pourra de l'axe longitudinal du vaiſſeau, des poids fort peſans, c'eſt à-dire, ſi l'on tranſporte ces poids bas bord & ſtribord dans les flancs du vaiſſeau. Cette même viteſſe diminue auſſi par l'élévation du centre de gravité de la charge.

XLV.

Nous avons vu (§. XLII & XLIII) que pour augmenter la ſtabilité du vaiſſeau, & pour diminuer l'amplitude de ſes oſcillations, il faut abbaiſſer le centre de gravité de la charge; & nous venons de voir au contraire qu'un des

moyens de diminuer la viteſſe des oſcillations, eſt d'élever le même centre. Ainſi les deux qualités de bien porter la voile, & de faire de petites oſcillations ſont en oppoſition avec celles d'oſciller lentement. Dans les vaiſſeaux de guerre, l'artillerie élève le centre de gravité de la charge; d'où il réſulte que ces vaiſſeaux ſont moins ſtables & font de plus grandes oſcillations que ſi l'artillerie étoit dans la calle; mais en récompenſe ils oſcillent avec plus de lenteur qu'ils ne feroient dans le cas purement hypothétique dont nous venons de parler. C'eſt une obſervation que les Marins ne paroiſſent pas avoir ſuffiſamment développée; car on n'a pas encore fixé, ce me ſemble, d'une manière bien claire, ce qu'on entend par rouler ou tanguer plus ou moins. On n'a pas non plus une idée bien nette de l'action des différentes ſortes de leſt qu'on emploie dans l'arrimage. Tous les jours on entend dire qu'une trop grande quantité de leſt en fer procure des ſecouſſes rudes au vaiſſeau, parce que ce genre de leſt a moins d'élaſticité, & ſe prête moins aux mouvemens du vaiſſeau, que le leſt en caillou. Mais il eſt évident que cette raiſon eſt chimérique, & qu'il faut attribuer l'effet dont il s'agit à la poſition moins ou plus élevée du centre de gravité de la charge. Je crois qu'il ne reſtera aucune obſcurité ſur cette matière, ſi l'on conſidère la diſtinction qu'on doit mettre entre l'amplitude & la viteſſe des oſcillations. Lorſqu'on abbaiſſe le centre de gravité de la charge, l'amplitude des oſcillations diminue; mais leur viteſſe augmente. Lorſqu'on élève le centre de gravité; la viteſſe des oſcillations diminue; mais leur amplitude augmente. La perfection de l'arrimage eſt de diſtribuer tellement la charge que le vaiſſeau, en oſcillant, ne décrive ni de trop grands ni de trop petits arcs; car de trop grands arcs, quoique décrits lentement, ne manquent pas de tourmenter beaucoup la mâture & l'équipage; & de trop petits arcs, par la vivacité dont ils ſont décrits, ont les mêmes & peut-être de plus grands inconvéniens. On parviendra à

l'objet

l'objet proposé, en étudiant la capacité & la forme du vaisseau qu'on veut charger. Par exemple, un vaisseau, arrondi par les fonds, doit avoir son centre de gravité très-bas. Alors il faut employer un lest très-pesant. Un vaisseau qui a les façons hautes, n'a pas besoin que son centre de gravité soit si bas. Cette remarque s'applique, proportions gardées aux cas intermédiaires. Il est vrai qu'on est souvent gêné dans l'arrimage, comme nous l'avons déja observé ci dessus, & qu'on ne peut pas toujours atteindre au but que l'on apperçoit. Car, par exemple, lorsqu'une campagne doit durer long-tems, & qu'on prend des vivres en conséquence, ces provisions occupent une partie considérable de la calle; & il peut se faire qu'il ne reste pas assez de place pour la quantité nécessaire de lest. En ce cas, il convient sur-tout d'employer un lest très-pesant, & de diminuer d'ailleurs la viteſſe des oscillations par l'autre moyen que nous avons proposé, c'est-à-dire en écartant le plus qu'il est possible les parties les plus pesantes de la charge, de l'axe latitudinal & de l'axe longitudinal du vaisseau.

XLVI.

Après avoir exposé la manière la plus avantageuse d'arrimer un vaisseau, il ne nous reste plus qu'à examiner les effets des changemens qu'on peut faire en mer à l'arrimage. Cette nouvelle recherche demande quelques principes de méchanique qu'il faut d'abord établir.

1.° Soit une verge inflexible AM, à laquelle soient appliqués un nombre quelconque de poids A, B, C, K, M. Soit hH la direction de la résultante de tous ces poids; & supposons qu'on prenne, par exemple, le poids C dans un endroit connu, & qu'on le transporte à l'endroit connu E. Il est clair que, par cette transposition, la résultante de tous les poids ne passera plus par le point H, mais par quelqu'autre point O situé du côté de M; & il n'est pas difficile de voir qu'en nommant F la somme de tous les Fig. 24.

poids, pour abréger, on aura $F:C::CE:HO$, ou bien $HO=\frac{C\times CE}{F}$. Mais pour démontrer cela en rigueur, soit nN la direction de la réſultante de tous les poids qui ſont placés du côté de M par rapport au point H, & ſoit nommée N cette réſultante. Pareillement ſoit dD la direction de la réſultante de tous les poids qui ſont du côté de B, à l'exception cependant du poids C, & ſoit nommée D cette réſultante. On aura avant la tranſpoſition du poids C,

$$N\times NH=D\times DH+C\times CH,$$

& après la tranſpoſition du poids C,

$$N\times NO=D\times DO+C\times EO,$$

ou bien

$$N\times(NH-HO)=D\times(DH+HO)+C\times(CH+HO-CE);$$

donc

$$N\times HO+(D+C)\times HO=C\times CE,$$

&

$$HO=\frac{C\times CE}{N+D+C}=\frac{C\times CE}{F}.$$

2.° Si l'on nomme P la ſomme des produits de tous les corps multipliés chacun par le quarré de ſa diſtance à un axe paſſant par le point H, avant la tranſpoſition du poids C; il eſt clair qu'après la tranſpoſition de ce poids de C en E, la ſomme de tous les poids par les quarrés de leurs diſtances au point ou axe H ſera $P-C\times\overline{CH}^2+C\times EH^2$.

3.° La ſomme des produits de pluſieurs corps multipliés chacun par le quarré de ſa diſtance à un axe qui ne paſſe pas par le centre de gravité du ſyſtême, eſt égale à la ſomme des produits des mêmes corps multipliés chacun par le quarré de ſa diſtance à un axe qui paſſe par le centre de gravité du ſiſtême, & parallèle au premier, plus au produit de la ſomme de tous les corps multipliée par le quarré de la diſtance des deux axes. Cette propoſition eſt

démontrée dans plusieurs livres de Dynamique * auxquels je renvoye le Lecteur, pour ne pas trop m'écarter de mon objet.

* Voyez, par exemple, la Science Navale de M. Euler, tom. I, pag. 74.

Il résulte de tout ce qu'on vient de dire, que si après la transposition du corps C en E, on nomme R la somme des produits de tous les corps multipliés chacun par le quarré de sa distance au point ou axe O, on aura

$$P - C \times \overline{CH}^2 + C \times \overline{EH}^2 = R + F \times \frac{\overline{CE}^2 \times C^2}{F^2},$$

$$R = P - C \times \overline{CH}^2 + C \times \overline{EH}^2 - \frac{C^2 \times \overline{CE}^2}{F}.$$

XLVII.

Maintenant il est aisé de déterminer les changemens qui arrivent dans la stabilité, l'amplitude & la durée des oscillations, lorsqu'on transporte des poids d'un endroit du vaisseau dans un autre. Fig. 24. A.

Soient les trois axes GC, GQ, GT qui se croisent perpendiculairement au centre de gravité G du vaisseau. Supposons qu'on prenne un poids E à un endroit quelconque mais connu, & qu'on le transporte à l'endroit connu D. Des points E & D soient abbaissées sur le plan horizontal TGQ les perpendiculaires ER, DF; & des points R, F soient tirées perpendiculairement aux deux axes GQ, GT les droites RH, RM, FK, FV. Soient aussi tirées les droites EM, EH, EN qui expriment les distances respectives du point E aux trois axes GT, GQ, GC; les droites DV, DK, DO qui expriment les distances respectives du point D aux trois mêmes axes. Puisque la grandeur & la position de la droite ED sont données, les droites RM, RH, RE, FV, FK, FD, EM, EH, EN, DV, DK, DO sont connues.

Supposons $\begin{cases} EH \ldots = m \\ EM \ldots = n \end{cases}$

Suppoſons
$$\begin{cases} EN \ldots = q \\ DK \ldots = m' \\ DV \ldots = n' \\ DO \ldots = q' \\ ER \ldots = \theta \\ DF \ldots = \theta' \\ FV \ldots = \Pi \\ RM \ldots = \Pi' \\ ER\text{—}DF \ldots = \varphi \\ RH\text{—}FK \ldots = \varphi' \\ FV\text{—}RM \ldots = \varphi'' \end{cases}$$

Cela poſé, il eſt clair que par la tranſpoſition du poids E, le plan horiſontal TGQ s'abbaiſſera parallélement à lui-même, de la quantité $\frac{\varphi' E}{N}$, en nommant N le poids total du navire, comme dans les §. XL, XLI, XLII, XLIII, XLIV; le plan vertical TGC s'éloignera parallélement à lui-même de ſa première poſition de la quantité $\frac{\varphi'' E}{N}$. Par conſéquent dans les formules de la ſtabilité, des amplitudes & des durées des oſcillations, il faudra ſubſtituer

à la place de h la quantité $h - \frac{\varphi E}{N}$;

à la place de Q la quantité $Q - En^2 + En'^2 - \frac{(\varphi^2 + \varphi''^2)E^2}{N}$;

à la place de V la quantité $V - Em^2 + Em'^2 - \frac{(\varphi^2 + \varphi'^2)E^2}{N}$;

à la place de R la quantité $R - Eq^2 + Eq'^2 - \frac{(\varphi'^2 + \varphi''^2)E^2}{N}$;

à la place de S la quantité $S - E\theta\Pi' + E\theta\Pi - \frac{E^2\varphi\varphi''}{N}$.

On voit donc qu'on peut ſoumettre à un calcul précis les phénomènes que la tranſpoſition de certains poids occaſionne dans les mouvemens de roulis & de tangage

d'un vaiſſeau. Nous avons déja eu l'occaſion de remarquer, dans un cas à-peu-près pareil, qu'on ne fait guères en mer ces ſortes de calculs. Auſſi ce n'eſt pas dans cette vue que nous en propoſons la méthode. Notre objet eſt d'indiquer les moyens de diſcuter exactement ce qui arrivera, lorſqu'ayant fait un certain arrimage pour une campagne, on jugera convenable ou néceſſaire d'y faire quelques changemens pour une autre campagne. Ces opérations ne doivent pas être abandonnées au hazard. L'eſprit n'eſt éclairé qu'autant qu'il peut ſe rendre raiſon des procédés de la pratique.

Application de la théorie précédente à un exemple.

XLVIII.

Quoique l'application de nos formules à chaque vaiſſeau particulier ſoit une opération fort ſimple, je ferai moi-même cette application à un exemple, mon intention étant de mettre, autant qu'il m'eſt poſſible, ces recherches à la portée des jeunes marins. On me permettra les détails aſſez étendus dans leſquels je vais entrer, en faveur de l'utilité dont j'eſpère qu'ils ſeront.

Je prends pour exemple le vaiſſeau du Roi, appellé *la Ville de Paris*, de quatre-vingt-dix canons, conſtruit à Rochefort par M. Deſlauriers, & lancé à la mer le 25 Janvier de cette année 1764. Ce vaiſſeau fut commencé en 1758. Il devoit alors porter le nom de *l'Impétueux*; mais des circonſtances connues ont fait changer ce nom en celui qu'il a aujourd'hui.

Suivant des meſurages & des calculs faits ſous les yeux de M. Deſlauriers par un jeune Conſtructeur fort inſtruit, la longueur priſe à la la ligne d'eau en charge eſt de 173 pieds; la plus grande largeur, priſe toujours à la ligne d'eau & en dehors des membres, eſt de 48 pieds 5 pou. La plus

grande profondeur de la carène eſt de 20pi. 1po., à compter du deſſous de la quille. La différence du tirant d'eau de l'avant à l'arrière eſt de 1pi. 8po.. Le centre de gravité de la carène eſt élevé au-deſſus de la ſurface ſupérieure de la quille de 12pi. 1po., & en avant du vrai milieu, de 16 pouces. La quille a 1 pouce de hauteur. Le poids de l'eau déplacée par la carène, & par conſéquenr auſſi la charge totale du vaiſſeau eſt de 4256 tonneaux environ.

Lorſqu'il eſt queſtion de déterminer la carène & la poſition de ſon centre de gravité, il faut néceſſairement employer les méthodes expoſées dans les §. IV, V, VI, VII, ou d'autres équivalentes, parce qu'il eſt eſſentiel de connoître le port du vaiſſeau, & la proportion qui doit exiſter entre les poids de l'avant & de l'arrière. Mais on n'a pas beſoin d'une ſi grande préciſion, lorſqu'il s'agit de déterminer les loix de la ſtabilité & des balancemens du vaiſſeau. Il ſuffit alors d'avoir des termes de comparaiſon entre leſquels les quatités qu'on cherche ſe trouvent placées. Ainſi, pour éviter des calculs rebutans par leur longueur, j'examinerai les loix de la ſtabilité & des oſcillations de deux ſolides, entre leſquels *la Ville de Paris* eſt compris. Le premier ſolide eſt un parallèlepipéde rectangle *FRZIYH* & *S* (fig. 25); le ſecond eſt une eſpèce d'ellipſoïde (fig. 26), qui a pour plan de flottaiſon l'ellipſe *ADBE*, pour coupe longitudinale la demie ellipſe *AVB*, & qui eſt formé d'une ſuite de demi-ellipſes *LKl* verticales & perpendiculaires à la demi-ellipſe *AVB*. Nous ſuppoſerons que dans l'un & l'autre ſolide, la longueur *AB* eſt de 173 pieds, la largeur *DE* de 48 pieds, la profondeur *CV* de 20 pieds, en nombres ronds. Pour mettre de la clarté dans notre recherche, nous la diviſerons en pluſieurs articles.

Fig. 25, 26.

ARTICLE I.

Stabilité du Vaisseau.

La limite de la plus grande hauteur du centre de gravité de la charge au-dessus de celui de la carène, est déterminée en général (§. XLII), par ces équations

$h=\frac{2\alpha'}{M}$, lorsqu'il s'agit des mouvemens de tangage;

$h=\frac{2\gamma}{M}$, lorsqu'il s'agit des mouvemens de roulis & de rotation horizontale.

La question est de trouver les valeurs des quantités M, α', γ, dans le cas de nos deux solides. Supposons en général la longueur $AB=2a$, la largeur $DE=2b$, la profondeur $CV=c$.

Dans le parallèlepipède, on a $M=4abc$. Supposons Fig. 25.
qu'en vertu du mouvement de tangage, la partie $EDZI$ du plan de flottaison prenne la position $EDzi$; & imaginons que l'onglet $EDZIiz$ est composé d'une infinité de triangles prs perpendiculaires à DE. Il est clair qu'en nommant, comme ci-dessus, z l'angle de rotation de tangage pour le rayon 1, & faisant $Cp=y$, le moment élémentaire de l'onglet, par rapport à DE, est $\frac{a^2}{2}\times\frac{2}{3}ady\times\frac{Z}{1}$; donc la quantité $\alpha'=2\int\frac{a^2}{3}\times\frac{2}{3}ady=\frac{2a^3b}{3}$, en supposant $y=b$ après l'intégration. On trouvera de même que la quantité $\gamma=\frac{2b^3a}{3}$. Par conséquent on aura

$h=\frac{a^2}{3c}=124\frac{169}{240}$ pieds pour les mouvemens de tangage.

$h=\frac{b^2}{3c}=9\frac{9}{10}$ pieds pour les mouvemens de roulis.

On voit que le métacentre eſt placé à-très-peu-près ſur le plan de flottaiſon ; car la poſition de ce point doit toujours être déterminée relativemenr aux mouvemens de roulis, comme nous l'avons remarqué §. XLII.

Fig. 26. Dans le ſolide ellipſoïdal, toutes les ſections *LKl* parallèles à la demi-ellipſe latitudinale *EVD* ſont des demi-ellipſes ſemblables à cette demi-ellipſe *EVD* ; & toutes les ſections *RYS* parallèles à la demi-ellipſe longitudinale *AVB* ſont des demi-ellipſes ſemblables à cette demi-ellipſe *AVB*. Cela eſt trop facile à démontrer pour s'y arrêter. Suppoſons le rapport de la circonférence au diamètre $=n$, $CP=x$: on aura l'aire $EVD=\frac{nbc}{2}$, $PL=\frac{b}{a}\sqrt{aa-xx}$, $PK=\frac{c}{a}\sqrt{aa-xx}$, l'aire $LKl=\frac{nbc(aa-xx)}{2aa}$. Donc l'élément du ſolide eſt $\frac{nbc(aa-xx)dx}{2aa}$ dont l'intégrale eſt $\frac{ncbx}{2}-\frac{ncbx^3}{6a^2}$. Suppoſant $x=a$, & doublant l'intégrale, on aura $\frac{2nbca}{3}$ pour la valeur de *M*.

De plus nous avons beſoin de connoître le centre de gravité du ſolide *M*. Ce centre eſt évidemment placé en quelque point *G* ſur l'axe vertical *CV*. Or on ſait, par la ſimple Géométrie élémentaire, que le moment de la demi-ellipſe *LKl* par rapport au point *P* eſt exprimé par $\frac{2}{3}PL\times\overline{PK}^2$. Donc le moment élémentaire du ſolide *ADEC*, par rapport à l'axe *AB*, eſt exprimé par $\frac{2bcc}{3a^2}dx(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$. Pour intégrer cette quantité, on remarquera que $dx(aa-xx)^{\frac{3}{2}}=aadx\sqrt{aa-xx}-xxdx\sqrt{aa-xx}$; que $\frac{d\left(x(aa-xx)^{\frac{3}{2}}\right)}{3}=\frac{dx(aa-xx)^{\frac{3}{2}}}{3}-xxdx\sqrt{aa-xx}$; que par conſéquent $dx(aa-xx)^{\frac{3}{2}}-d\left(\frac{x(aa-xx)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)=aadx\sqrt{aa-xx}-$

dx

$\frac{2x(aa-xx)^{\frac{3}{2}}}{3}$, ou bien $\frac{4}{5}dx(aa-xx)^{\frac{3}{2}}=\frac{d(x(aa-xx)^{\frac{5}{2}})}{3}+aadx\sqrt{aa-xx}$; donc $\int dx(aa-xx)^{\frac{3}{2}}=\frac{x^3aa-xx^{\frac{3}{2}}}{4}+\frac{3}{4}aa\int dx\sqrt{aa-xx}$, intégrale qui eſt complette, parce qu'elle doit s'évanouir lorſque $x=0$. Suppoſant $x=a$, le premier terme s'évanouit, & le facteur $\int dx\sqrt{aa-xx}$ devient un quart de cercle dont a eſt le rayon. Donc, en nommant toujours n le rapport de la circonférence au diamètre, le moment du ſolide $ADVE$, par rapport à AB, eſt exprimé par $\frac{nabcc}{8}$. Doublant cette quantité, & diviſant par $\frac{2nbca}{3}$, valeur du ſolide entier M, on aura $\frac{3}{8}c$ pour la diſtance CG du centre de gravité de M au point C.

Enfin imaginons que l'onglet formé pour la rotation de l'aire EDB autour de ED, eſt compoſé d'une infinité de triangles prs perpendiculaires à l'axe ED. En faiſant $Cp=y$, & par conſéquent $pr=\frac{a}{b}\sqrt{bb-yy}$, il eſt clair que le moment élémentaire du demi-onglet, par rapport à ED, eſt $\frac{a^2(bb-yy)}{2b^2}\times\frac{2a\sqrt{bb-yy}}{3b}.dy\times\frac{Z}{1}$; d'où il ſuit que $a'=2\int\frac{a^3bb-yy^{\frac{3}{2}}.dy}{3b^3}$, en ſuppoſant $y=b$ après l'intégration. On trouvera, par la même méthode dont on vient de ſe ſervir, $a'=\frac{na^3b}{8}$. Pareillement $\gamma=\frac{nb^3a}{8}$. Donc on aura

$h=\frac{3a^2}{8c}=140\frac{187}{640}$ pieds pour les mouvemens de tangage.

$h=\frac{3b^2}{8c}=10\frac{4}{5}$ pieds pour les mouvemens de roulis.

Ainſi la hauteur du métacentre au deſſus du centre de gravité de la carène, eſt de 10 pieds $\frac{4}{5}$; & comme ce dernier point eſt au deſſous du plan de flottaiſon, de $7\frac{1}{2}$ pieds, il

s'enſuit que le métacentre eſt élevé au-deſſus du plan de flottaiſon, de $3\frac{1}{10}$ pieds.

Comme le vaiſſeau *la Ville de Paris* approche plus du ſolide ellipſoïdal que du parallèlepipéde, on doit conclure que ſon métacentre eſt élevé au-deſſus du plan de flottaiſon, d'environ 1 ou 2 pieds.

ARTICLE II.

Amplitude des oſcillations du vaiſſeau.

NOUS venons de voir que le métacentre de notre vaiſſeau eſt placé aux environs du plan de flottaiſon. Ainſi il convient de placer le centre de gravité de la charge au-deſſous de ce même plan Suppoſons que la charge totale ſoit diſtribuée uniformément, de manière que ſon centre de gravité ſe confonde avec celui de la carène De l'examen de ce cas ſimple naîtront les obſervations qu'on doit faire, lorſqu'il faut avoir égard à la diſtribution réelle de la charge.

Les mouvemens abſolus de tangage & de roulis ſont exprimés (§. XLIII), par ces équations

$$Z=\frac{2Mf'}{2\alpha'-Mh},$$

$$Y=\frac{2Mf}{2\gamma-Mh},$$

& il n'y a point de rotation horiſontale, parce qu'il eſt évident que la quantité $S=0$.

Comme on ſuppoſe le centre de gravité de la charge réuni a celui de la carène, on a $h=0$, & nos deux équations deviennent

$$Z=\frac{Mf}{\alpha'},$$

$$Y=\frac{Mf}{\gamma};$$

ou bien en considérant que le sinus total est pris pour l'unité, & que ce sinus est égal à un arc de 57° 17′ 44″,

$$Z=\frac{Mf'}{a'}\times(57^\circ\ 17'\ 44''),$$

$$Y=\frac{Mf}{\gamma}\times(57^\circ\ 17'\ 44'').$$

Or dans le paralèlepipéde, on a, par l'article précédent, $\frac{M}{a}=\frac{6c}{a^2}$, $\frac{M}{\gamma}=\frac{6c}{b^2}$; donc en supposant, par exemple, que par quelque coup de vent ou quelque coup de lame, ou par quelque bouffée de vent, le centre de gravité de la carène se soit écarté de 4 pouces de la coupe latitudinale & de la coupe longitudinale, c'est-à-dire, $f'=4$ pou., $f=4$ pou.: on trouvera Fig. 25.

$$Z=0^\circ\ 18'\ 22'',$$
$$Y=3^\circ\ 58'\ 43''.$$

Dans le solide ellipsoïdal, on a $\frac{M}{a'}=\frac{16c}{3a^2}$, $\frac{M}{\gamma}=\frac{16c}{3b^2}$; donc en supposant toujours $f'=4$ pouces, $f=4$ pouces: on trouvera Fig. 26.

$$Z=0^\circ\ 16'\ 20'',$$
$$Y=3^\circ\ 32'\ 12''.$$

On sent assez qu'on n'a supposé chacune des lignes f' & f de 4 pouces, que pour faire une application des formules à un cas particulier. Les valeurs de ces lignes ne sont pas faciles à déterminer directement en général. Mais si au lieu de conclure les angles Z & Y des valeurs supposées connues de f' & f, on supposoit au contraire les angles Z & Y donnés par des observations immédiates; il est évident que par nos formules on connoîtroit f' & f, c'est-à-dire les bras de levier de la pouſſée verticale de l'eau pour ramener le vaisseau à sa situation d'équilibre. Cette connoissance est utile en plusieurs occasions, comme

par exemple, quand on a besoin de comparer l'effort des lames ou des bouffées de vent avec la poussée verticale de l'eau.

Les mouvemens de tangage sont fort petits. Ceux de roulis sont plus considérables. Comme le centre de gravité de la charge totale est toujours placé au dessus de celui de la carène, dans les vaisseaux de guerre, les mouvemens de tangage & de roulis du vaisseau *la Ville de Paris* pourront être plus sensibles qu'on ne vient de les trouver.

ARTICLE III.

Durée des oscillations du vaisseau.

Nous continuerons de supposer que le centre de gravité de la charge totale est confondu avec celui de la carène, comme dans l'article précédent.

Fig. 25 & 26. Les trois axes GC, GQ, GT sont ici les mêmes respectivement que les trois axes designés par les mêmes lettres dans la figure 23 : seulement on en a changé la perspective, pour faire mieux voir les autres lignes dont on a besoin ; mais cela ne doit produire aucun embarras. Il suffit d'en être averti.

Les tems des mouvemens de tangage & de roulis sont représentés (§. XLIV), par ces équations

$$t(T) = 1'' \times n \sqrt{\frac{Q}{30^{1} p(2\alpha' - Mh)}},$$

$$t(R) = 1'' \times n \sqrt{\frac{V}{30^{1} p(2\gamma - Mh)}}.$$

Il s'agit de trouver les quantités V & Q, c'est-à-dire, les sommes des produits des particules de chaque solide par les quarrés de leurs distances aux deux axes horizontaux GQ, GT. La quantité $h = 0$.

Fig. 25. Soient $LXxl$ une section quelconque du parallèlepipéde,

faite perpendiculairement à sa longueur ; PK la rencontre de cette section avec la coupe longitudinale $ABba$; Nn un élément quelconque du rectangle $LXxl$. Qu'on prenne sur Nn une partie infiniment petite $\Pi\varpi$, & qu'on mène du point Π au point O, où l'axe longitudinal GQ & la verticale PK se rencontrent, la droite ΠO. Supposons $CP=x$, $PM=z$, $M\Pi=q$, & par conséquent $MO=\frac{c}{2}-z$. Il est clair que le produit de $\Pi\varpi$ par le quarré de sa distance à l'axe longitudinal GQ est $qqdq+dq\left(\frac{c}{2}-z\right)^2$, dont l'intégrale est $\frac{q^3}{3}+q\left(\frac{c}{2}-z\right)^2$. Supposant $Q=b$, & doublant l'intégrale, on aura $\frac{2b^3}{3}+2b\left(\frac{c}{2}-z\right)^2$ pour la somme des produits de tous les points de Nn par les quarrés de leurs distances à l'axe GQ. Multipliant cette quantité par dz, intégrant le produit, & supposant après l'intégration $z=c$, on trouvera $\frac{2b^3c}{3}+\frac{bc^3}{6}$ pour la somme des produits de tous les points du rectangle $LXxl$ par les quarrés de leur distance à l'axe GQ. Enfin multipliant cette dernière quantité par dx, intégrant, supposant $x=a$ après l'intégration, & doublant l'intégrale, on aura $\frac{4ab^3c}{3}+\frac{abc^3}{3}$ pour la somme des produits des particules du parallèlepipéde par les quarrés de leur distance à l'axe GQ. Nous aurons donc

$$V=\frac{4ab^3c}{3}+\frac{abc^3}{3}.$$

On trouvera pareillement

$$Q=\frac{4ba^3c}{3}+\frac{abc^3}{3}.$$

Donc

$$\frac{Q}{2a}=\frac{4aac+c^3}{4aa},$$

$$\frac{V}{2\gamma}=\frac{4bbc+c^3}{4bb}.$$

Donc en remarquant qu'ici $p=1$, on aura

$t(T)=1''\times\frac{355}{113}\times\sqrt{\frac{6065}{8787}}=2''\frac{1}{2}$ à-peu-près,

$t(K)=1''\times\frac{355}{113}\times\sqrt{\frac{3408}{6912}}=2''\frac{4}{5}$ à-peu près.

Les mouvemens de tangage & de roulis se font avec promptitude, comme on voit, & doivent paroître sensibles.

Fig. 26. Soit, comme ci-dessus, la demi-ellipse LKl un élément quelconque du solide ellipsoïdal. Que Nn soit une double ordonnée à l'axe PK. En faisant $CP=x$, $PM=z$, & considérant que $MN=\frac{PL}{PK}.\sqrt{PK^2-PM^2}=\frac{b}{c}\sqrt{\frac{aacc-ccxx}{aa}-zz}$, on trouvera, par la même méthode dont on vient de se servir pour le parallèlepipéde, que la somme des produits de tous les points de Nn par les quarrés de leurs distances à l'axe GQ, est exprimée par $\frac{2b^3}{3c^3}.\left(\frac{aacc-ccxx}{aa}-zz\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2b}{c}.\sqrt{\frac{aacc-ccxx}{aa}-zz}.\left(\frac{3}{8}c-z\right)^2$. Donc cette somme élémentaire pour la demi-ellipse LKl, est $\frac{2b^3}{3c^3}.dz\left(\frac{aacc-ccxx}{aa}-zz\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2b}{c}.dz\left(\frac{3}{8}c-z\right)^2\sqrt{\frac{aacc-ccxx}{aa}-zz}$, expression dans laquelle z seule est variable en ce moment. Supposons, pour abréger un peu le calcul, $\frac{aacc-ccxx}{aa}=A^2$. On aura $\int dz(A^2-z^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{z(A^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}{4}+\frac{3A^2}{4}\int dz\sqrt{A^2-z^2}$. Le terme $\int dz\left(\frac{3}{8}c-z\right)^2\sqrt{A^2-z^2}=\frac{9cc}{64}\int dz\sqrt{A^2-z^2}+\frac{3}{4}c\int -zdz\sqrt{A^2-z^2}+\int zzdz\sqrt{A^2-z^2}=\frac{9cc}{64}\int dz\sqrt{A^2-z^2}+\frac{c(A^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}{4}+\int zzdz\sqrt{A^2-z^2}$. Pour effectuer l'intégration du dernier terme, on remarquera que $d\left(z(A^2-z^2)^{\frac{3}{2}}\right)=dz(A^2-z^2)^{\frac{3}{2}}-3zzdz\sqrt{A^2-z^2}=A^2dz\sqrt{A^2-z^2}-4zzdz$

$\sqrt{A^2-z^2}$; que par conséquent $\int zzdz\sqrt{A^2-z^2}=\frac{A^2}{4}\int dz\sqrt{A^2-z^2}-\frac{z(A^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}{4}$. Donc, en reprenant les facteurs constans négligés dans les intégrations, réunissant toutes les parties de l'intégrale, & observant qu'elle doit s'évanouir, lorsque $z=0$; & recevoir sa valeur complette, lorsque $z=A$: on trouvera que la somme des produits de tous les points de la demi-ellipse LKl par les quarrés de leurs distances à l'axe longitudinal GQ, est exprimée par la quantité

$$\left(\frac{b^3}{2c}+\frac{15bc}{32}\right).\frac{ncc}{4aa}.(aa-xx)-\left(\frac{b^3}{2c}+\frac{bc}{2}\right).\frac{ncc}{4a^4}.(aaxx-x^4).$$

Multipliant cette quantité par dx, intégrant, supposant $x=a$, après l'intégration, & doublant l'intégrale, on trouvera

$$\frac{n}{2}\left(\frac{64ab^3c+19abc^3}{240}\right)$$

pour la somme des produits des particules du solide entier par les quarrés de leus distances à l'axe longitudinal.

On trouvera de même que la somme des produits des particules du solide par les quarrés de leurs distances à l'axe latitudinal GT est exprimée par

$$\frac{n}{2}.\left(\frac{64ba^3c+19abc^3}{240}\right).$$

Nous aurons donc

$$\frac{Q}{2\alpha^3}=\frac{64aac+19c^3}{120aa},$$

$$\frac{V}{2\gamma}=\frac{64bbc+19c^3}{120bb}.$$

Par conséquent on trouvera

$$t(T)=1''\times\frac{355}{113}\sqrt{\frac{1044928}{2693610}}=1''\frac{19}{20},$$

$$t(R) = 1'' \times \frac{354}{113} \times \sqrt{\frac{60928}{207360}} = 2'' \frac{17}{25}.$$

Dans le ſolide ellipſoïdal, les mouvemens de tangage & de roulis ſont un peu plus rapides que dans le parallèlepipéde.

Il ſuit de-là que ſi la charge de la *Ville de Paris* étoit diſtribuée uniformément dans la callè, & que ſon centre de gravité tombât ſur celui de la carène conſidérée comme homogène, les mouvemens de tangage & de roulis ſeroient très-rapides, & tourmenteroient extrêmement la mâture & l'équipage. Pour en diminuer la viteſſe, on aura ſoin de mettre le plus qu'il ſera poſſible les poids les plus peſans de la charge aux extrémités & dans les flancs du vaiſſeau. Il eſt vrai que par-là la quille ſera un peu fatiguée (§. XXIV); mais cette piéce a ordinairement beaucoup plus de force qu'il ne lui en faut pour réſiſter aux forces dont elle eſt preſſée (§. XXIX).

Réſultat de tout cet examen.

Le métacentre du vaiſſeau *la Ville de Paris* eſt placé à 1 ou 2 pieds au-deſſus du plan de flottaiſon. Si donc on veut que ce vaiſſeau porte bien la voile, il faudra diſtribuer la charge, de manière que ſon centre de gravité ſoit placé au moins à 1 ou 2 pieds au-deſſous du plan de flottaiſon. Il conviendra que la plus grande partie du leſt ſoit en fer, & qu'elle ſoit diſtribuée dans les flancs du vaiſſeau, ainſi que ſous la foſſe aux cables & vers la ſoute aux poudres. Ce vaiſſeau décrira de fort petits arcs dans le tangage; mais dans le roulis il en décrira qui, même par un tems calme, pourront monter à 7 ou 8 degrés. Il paroit qu'en arrimant comme on vient de le dire, les mouvemens de tangage ſeront peu ſenſibles; mais quelques précautions qu'on prenne, ceux de roulis ſeront peu-être un peu rudes, principalement lorſqu'on ira vent arrière. L'événement décidera de la juſteſſe de ces remarques; car en ce moment

(Février

(Février 1764) *la Ville de Paris* est encore dans le port, dénuée de sa mâture, & remplie de copeaux.

On discutera de la même manière tous les vaisseaux dont on connoîtra les dimensions.

SECTION IV.

Influence de l'arrimage sur les mouvemens de rotation produits par l'action du gouvernail ou des voiles.

XLIX.

Je ne m'arrêterai pas ici à expliquer la manœuvre du gouvernail; c'est une chose assez connue. Mais je ne puis me dispenser de remarquer que tous les Auteurs qui ont entrepris de donner la théorie des mouvemens que cette piéce imprime au vaisseau, ont regardé le vaisseau & le gouvernail comme solidement liés entr'eux, & ne faisant, pour ainsi dire, qu'un seul & même corps; ce qui n'est pas exact, puisque le vaisseau & le gouvernail sont réellement deux corps separés, mobiles l'un & l'autre sur les gonds qui les unissent. D'où il résulte que les solutions de ces Auteurs sont incomplettes, au moins dans la rigueur géométrique En voici une qui n'a pas le même defaut.

Supposons que AB représente le corps du navire, BC le gouvernail qui est mobile sur le gond ou la charnière B. Soit Ff la direction du choc de l'eau qui resulte perpendiculairement au gouvernail. Cette force est supposée ici exercer librement son effet. Qu'au bout d'un instant, le système ABC parvienne dans la situation abc, de manière que le point B ait parcouru Bb, & qu'ayant mené par le point b les droites $b\alpha$, bk parallèles à BA & à BC respectivement, le navire ait décrit autour du point B ou b l'angle $ab\alpha$, & le gouvernail l'angle cbk autour du même point. Je Fig. 27.

prolonge indéfiniment AB au-delà de B, & repréſentant l'impulſion de l'eau ſur le gouvernail par FD, je décompoſe cette force en deux autres FE, FH, l'une perpendiculaire, l'autre parallèle à la direction AB de la quille. Soient R & Q deux points quelconques du vaiſſeau & du gouvernail. Il eſt clair que ſi on prend $bS=BR$, $bO=BQ$, & qu'on mène les lignes RS, QO, ces lignes ſeront les eſpaces parcourus par les points R & Q. Du point b ſoient décrits, avec les rayons bS, bO, les petits arcs ST, ON, & ſoit abbaiſſée bh perpendiculaire ſur AB prolongée, & bi ſur CB prolongée. Soit décompoſée la viteſſe RS en deux autres RX, RZ, l'une dirigée ſuivant AB, l'autre perpendiculaire à AB. Pareillement ſoit décompoſée la viteſſe QO en deux autres QM, QP ou MO, l'une dirigée ſuivant BC, l'autre perpendiculaire à BC. Suppoſant que QO prolongée, s'il eſt néceſſaire, rencontre en g le prolongement de AB, & ayant pris $gm=QO$, ſoit décompoſée la viteſſe gm en deux autres gp, gn, l'une dirigée ſuivant Bp, l'autre perpendiculaire à la même ligne.

Suppoſons
- L'impulſion FD de l'eau contre le gouvernail ..... $=F$
- La viteſſe Bh du point B dans le ſens de la quille ..... $=x$
- La viteſſe hb du même point B perpendiculairement à la quille ..... $=y$
- La viteſſe de rotation du navire autour du point B, pour le rayon 1 ..... $=V$
- La viteſſe de rotation du gouvernail autour du point B, pour le rayon 1 .... $=u$
- La maſſe du navire ..... $=N$
- Chaque particule élémentaire du navire $=dN$
- La maſſe du gouvernail ..... $=G$
- Chaque particule élémentaire du gouvernail ..... $=dG$

Suppoſons $\begin{cases} \text{L'angle } CBp \ldots\ldots = a \\ BF \ldots\ldots = b \\ BR \ldots\ldots = p \\ BQ \ldots\ldots = q. \end{cases}$

Il eſt clair qu'on aura la force $FE = F\,cof.\,a$, la force $FH = F\,ſin.\,a$, $TS = pV$, $ON = qu$, $SX = y - pV$. De plus ſi l'on tire la droite RT, il eſt évident qu'à cauſe de $bT = bX$, & de $bT = bS = BR$, les deux triangles rectangles RXT, Bbb ſont parfaitement égaux; donc $RX = x$. Pareillement ſi l'on tire la droite QN, les deux triangles rectangles QMN, Bib ſont parfaitement égaux; donc $QM = Bi$, $MN = ib$, $MO = ib + ON = ib + qu$. Or l'angle bBi étant viſiblement le ſupplément de la ſomme des deux angles CBp, bBb, on aura

$$bi = y\,cof.\,a + x\,ſin.\,a,$$

$$Bi = y\,ſin.\,a - x\,cof.\,a.$$

Donc

$$QM = y\,ſin.\,a - x\,cof.\,a,$$

$$MO = y\,cof.\,a + x\,ſin.\,a + qu.$$

Dans le triangle BQg, le ſinus de l'angle BgQ ou de ſon égal pgm eſt égal au ſinus de la ſomme des deux angles QBg, BQg; donc

$$ſin.\,pgm = ſin.\,a \times \frac{QM}{QO} + cof.\,a \times \frac{OM}{QO};$$

$$cof.\,pgm = ſin.\,a \times \frac{OM}{OQ} - cof.\,a \times \frac{QM}{QO};$$

Donc

$$pm = ſin.\,a\,(y\,ſin.\,a - x\,cof.\,a) + cof.\,a\,(y\,cof.\,a + x\,ſin.\,a + qu),$$

$$gp = ſin.\,a\,(y\,cof.\,a + x\,ſin.\,a + qu) - cof.\,a\,(y\,ſin.\,a - x\,cof.\,a).$$

Cela poſé, on fait, par la loi fondamentale de la com-

municaton des mouvemens, que la ſomme des mouvemens gagnés par le navire & par le gouvernail, parallélement à la quille, eſt égale à la force FH, & que la ſomme des mouvemens gagnés par le navire & par le gouvernail, perpendiculairement à la quille, eſt égale à la force FE. Ainſi on aura d'abord ces deux équations

$$F \sin.a = Nx + Gx + u \sin.a \int qdG,$$

$$F \cos.a = NyV - N \int pdN + Gy + u \cos.a \int qdG.$$

De plus le moment de la force F par rapport au point B eſt égal à la ſomme des momens de toutes les particules du navire & du gouvernail, par rapport au même point B. Ainſi on aura

$$Fh = \int dN \times BR \times SX + \int dG \times BQ \times QP,$$

c'eſt-à-dire

$$Fh = y \int p dN - V \int ppdN + y \cos.a \int qdG + x \sin.a \int qdG + u \int qqdG.$$

Enfin on remarquera que la réſultante de toutes les forces RS, QO des particules du navire & du gouvernail, doit néceſſairement paſſer par le point B; car cette réſultante doit être telle que ſi on imprimoit au ſiſtême une force égale & contraire, tout le ſiſtême demeurât en équilibre. Or ſi cette dernière force ne paſſoit pas par le point B, il eſt évident qu'elle produiroit un mouvement de rotation autour de ce point, ce qui eſt contraire à l'hypothèſe. Cette nouvelle conſidération fournit l'équation

$$\int dN \times BR \times SX = \int dG \times BQ \times QP,$$

c'eſt-à-dire,

$$y \int pdN - V \int ppdN = y \cos.a \int qdG + x \sin.a \int qdG + u \int qqdG.$$

Dans ces quatre équations, les quantités $\int pdN$, $\int ppdN$, $\int qdG$, $\int qqdG$, ſont données par les figures du navire & du gouvernail. Par conſéquent on pourra déterminer les

quatre inconnues x, y, V, u, c'eſt-à-dire, le mouvement du navire parallélement à la quille, le mouvement du navire perpendiculairement à la quille, le mouvement de rotation du navire autour du point B, enfin le mouvement de rotation du gouvernail autour du même point. La queſtion ſe réduit à réſoudre quatre équations du premier degré.

L.

Telle eſt la ſolution générale du problême propoſé. Mais comme la maſſe du gouvernail eſt fort petite en comparaiſon de celle du navire, dans l'application qu'on fera de ces formules au ſujet propoſé, il eſt très-permis de négliger tous les termes qui contiennent G, $\int qdG$, $\int qqdG$. Alors on trouvera

$$x = \frac{F \sin. a}{N},$$

$$y = \frac{F \cos. a \int ppdN}{N \int ppdN - (\int pdN)^2},$$

$$V = \frac{F \cos. a \int pdN}{N \int ppdN - (\int pdN)^2}.$$

Quant à la valeur de u, on voit bien qu'elle doit être regardée comme infinie par rapport à celle de V.

Ces formules peuvent encore ſe ſimplifier Car ſi l'on nomme b la diſtance du centre de gravité de la charge à un axe vertical élevé par le point B, S la ſomme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs diſtances à un axe vertical paſſant par le centre de gravité de la charge, on aura, comme on ſait, par les loix de la méchanique, $\int pdN = Nb$, $\int ppdN = S + Nb^2$, & nos trois formules deviendront

$$x = \frac{F \sin. a}{N},$$

$$y = \frac{F \cos. a (S + Nbb)}{N.S},$$

$$V = \frac{Fb \cos. a}{S},$$

équations qui renferment toute la théorie des mouvemens communiqués au vaisseau par l'action du gouvernail.

L I.

Le choc de l'eau contre le gouvernail produit deux effets, comme on voit. Il retarde la rapidité du sillage, & il fait tourner le vaisseau. Le premier effet, qui est contraire au but de la navigation, est exprimé par les deux premières équations. Notre objet n'est pas de l'examiner en détail. Mais nous devons analyser le mouvement de rotation qui est représenté par la formule

$$V = \frac{Fb \cos. a}{S}.$$

Dans cette formule, V est l'angle $ab\alpha$. Supposons que le point G représente le centre de gravité du vaisseau, & par ce point soit menée la droite LGl parallèle à AB: il est clair que les deux angles $ab\alpha$, bGl sont égaux. Ainsi V peut être considéré comme l'angle décrit par le vaisseau autour de l'axe vertical passant par le point G, en vertu d'une force $F \cos. a$ appliquée en B, perpendiculairement à AB. Nommons s l'espace parcouru circulairement à la distance 1 de l'axe G, v la viteſſe circulaire d'un point pris à la même distance, t le tems de la rotation: il est visible qu'on aura

$$vdv = \frac{Fb \cos. a\, ds}{S},$$

$$dds = \frac{Fb \cos. a.dt^2}{S};$$

Donc

$$v = \sqrt{\frac{2Fb\,cos.\,a.\,s}{S}},$$

$$t = \sqrt{\frac{2S.s}{Fb\,cos.\,a}}.$$

Soient g la gravité, u la viteſſe qu'un corps acquerroit par la gravité, en parcourant l'eſpace s; θ le tems employé à acquerir cette viteſſe; & ſuppoſons que la force $F\,cos.\,a$ ſoit égale à un poids dont la maſſe eſt P, c'eſt-à-dire, que cette force ſoit repréſentée par gP. On aura (en mettant la lettre R à la place du rayon 1, pour rétablir les homogènes),

$$v = u \times \sqrt{\frac{PbR}{S}},$$

$$t = \theta \times \sqrt{\frac{S}{PbR}},$$

formules dans leſquelles les quantités radicales ſont des nombres abſolus. Ces formules ſont d'un uſage très-commode. Mais il faut obſerver qu'elles n'ont lieu que pour le commencement du mouvement, parce qu'on a négligé la réſiſtance que le navire éprouve en diviſant l'eau par ſa rotation, & que cette réſiſtance augmente ſenſiblement à meſure que la viteſſe de rotation augmente.

LII.

Ces principes poſés, il eſt queſtion de diſcuter l'influence de l'arrimage ſur les mouvemens dont nous venons de parler.

Or, 1.° on voit que ſi, toutes choſes égales d'ailleurs, on augmente la force F, ou que le gouvernail préſente une plus grande ſurface au choc de l'eau, la viteſſe de rotation du vaiſſeau autour de ſon centre de gravité augmentera. L'expérience & la théorie ont fixé les dimenſions du gouvernail dans chaque vaiſſeau. Il n'eſt pas permis d'y faire des changemens bien ſenſibles; car en même temps

qu'une plus grande ſurface expoſée au choc de l'eau, produiroit un plus grand mouvement de rotation, elle rallentiroit conſidérablement la rapidité du ſillage. Mais il y a des occaſions en mer, où l'on a beſoin d'une action efficace & prompte de la part du gouvernail. Alors rien n'eſt plus utile que de faire enfoncer davantage le gouvernail dans l'eau. Cela s'exécute en tranſportant quelques poids aſſez peſans de l'avant à l'arrière. Il eſt vrai que par cette opération, il pourra arriver que la quantité S augmente, & que par conſéquent la viteſſe de rotation du vaiſſeau diminue d'un côté, tandis qu'elle augmente de de l'autre; mais l'augmentation l'emporte toujours ſur la diminution, comme on pourra s'en aſſurer par la méthode que nous donnerons dans un moment; & c'eſt une très-bonne manœuvre de ſurcharger l'arrière du vaiſſeau, lorſque le vaiſſeau porte d'ailleurs bien la voile, & qu'il n'eſt pas aſſez docile à l'action de ſon gouvernail.

2° On peut augmenter la viteſſe de rotation du vaiſſeau en laiſſant la même ſurface au gouvernail, mais en diminuant la quantité S, c'eſt à-dire en rapprochant le plus qu'il eſt poſſible les différens poids qui compoſent la charge, de l'axe vertical élevé par le centre de gravité du vaiſſeau. Ce moyen ne peut guères être pratiqué efficacement en mer, parce que le milieu de la calle eſt preſqu'entièrement occupé par des poids qu'il n'eſt pas facile de mettre ailleurs, & que d'un autre côté il ſeroit quelquefois dangereux de faire des changemens trop conſidérables à la diſtribution primitive de la charge. Mais lorſqu'on fait le chargement dans le port, & qu'on diſcute l'influence de l'arrimage ſur les qualités du vaiſſeau, on ne doit pas oublier qu'un des meilleurs moyens de rendre le navire ſenſible au gouvernail, eſt de rapprocher de l'axe vertical les principaux poids dont les emplacemens ne ſont pas néceſſairement aſſignés dans telle ou telle partie de la calle. L'arrangement dont il s'agit a de plus l'avantage de ſoulager

la

la quille, comme nous l'avons vu (§. XXIX); mais il peut avoir l'inconvénient d'augmenter les mouvemens de roulis & de tangage, comme il eſt aiſé de voir par les méthodes expoſées dans la ſection précédente. On ne procure preſque jamais une bonne qualité à un vaiſſeau, qu'on ne lui en faſſe perdre une autre. C'eſt aux Marins éclairés de bien peſer les raiſons favorables & contraires à l'opération propoſée. Cet examen ſera facile, & l'on choiſira infailliblement le parti le plus avantageux, lorſqu'on connoîtra exactement la forme & les capacités du vaiſſeau.

LIII.

Nous nous ſommes engagés à examiner les changemens qui arrivent dans la fraction $\frac{F}{S}$, lorſqu'on fait augmenter la ſurface que le gouvernail préſente au choc de l'eau, en tranſportant quelques poids de l'avant à l'arrière Voici cette diſcuſſion qui dépend des mêmes principes que celle du §. XLVII.

Soient AB le corps du navire, GC l'axe vertical élevé par ſon centre de gravité G. Suppoſons qu'on prenne à l'endroit connu K de l'avant un poids connu que je nomme K pour le tranſporter à l'endroit connu M de l'arrière; & qu'en vertu de cette tranſpoſition, l'axe GC prenne la poſition gc. Par les points G & g ſoient menés les deux axes horizontaux GT, gt perpendiculaires l'un & l'autre à AB. Le centre de gravité du vaiſſeau ayant paſſé de G en g, la pouſſée verticale de l'eau, qui s'exerce toujours ſuivant GC fera tourner le vaiſſeau autour de l'axe horiſontal gt, & lui fera décrire l'angle Bgb dans le plan vertical mené ſuivant AB. Il eſt clair que ſi l'on parvient à connoître cet angle, & la partie Bg, on connoîtra auſſi la grandeur abſolue du petit arc Bb qu'on peut regarder comme une ligne verticale. Par conſéquent on connoîtra la quantité Fig. 28.

dont tous les points de la surface du gouvernail se sont abbaissés verticalement ; d'où il suit qu'on connoîtra la nouvelle surface que le gouvernail présente au choc de l'eau, & la force avec laquelle cette surface est frappée.

Supposons
- BG ..... $=b$
- GK ..... $=c$
- GM ..... $=f$
- La gravité ..... $=g$
- La masse du navire ..... $=N$
- La somme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs distances à l'axe latitudinal GT, avant la transposition du poids K ..... $=Q$
- La somme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs distances à l'axe gt, après la transposition du poids K ..... $=Q'$
- L'angle BGb, pour le rayon 1 ..... $=Z$.

On aura (§. XLVI) $Gg=\frac{K.(c+f)}{N}$; donc $gN\times\frac{K(c+f)}{N}=Q'\times\frac{Z}{1}$;

mais (§. XLVI), $Q'=Q-Kc^2+Kf^2-\frac{K^2(c+f)^2}{N}$;

Donc

$$Z=\frac{gK.(c+f).}{Q-Kc^2+Kf^2-\frac{K^2(c+f)^2}{N}},$$

ou bien, en supposant le sinus total $1=R$, pour rétablir les homogènes,

$$Z=\frac{gK(c+f).R}{Q-Kc^2+Kf^2-\frac{K^2(c+f)^2}{N}}.$$

Ainsi l'angle Bgb sera connu. La ligne Bg est aussi connue, puisque $Bg=BG-gG=b-\frac{K(c+f)}{N}$.

Maintenant reprenons la formule $V=\frac{Fb\,cos.\,a}{S}$ du §. L,

dans laquelle F eſt le choc que l'eau exerce perpendiculairement contre le gouvernail dans ſon premier état, a l'angle formé par la quille & par le gouvernail, b le bras de levier de la force $F \cos. a$, c'eſt-à-dire la ligne BG, S la ſomme des produits des particules du vaiſſeau par les quarrés de leurs diſtances à l'axe vertical GC, V l'angle de rotation horizontale produite autour de l'axe GC par le choc de l'eau contre le gouvernail. Suivant la remarque que nous avons faite, la force F eſt augmentée d'une quantité connue que je nomme dF. De plus la rotation horizontale ſe fait maintenant autour de l'axe gc; & ſi l'on nomme S' la ſomme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs diſtances à l'axe gc, après la tranſpoſition du poids K, V' l'angle de rotation autour de l'axe gc, on aura

$$(F+dF)\cos. a.\left(b-\frac{K(c+f)}{N}\right)=S'\times\frac{V'}{1};$$

mais (§. XLVI) $\quad S'=S-Kc^2+Kf^2-\frac{K^2(c+f)^2}{N}$;

Donc

$$V'=\frac{(F+dF)\cos. a\left(b-\frac{K(c+f)}{N}\right)}{S-Kc^2+Kf^2-\frac{K^2(c+f)^2}{N}}.$$

Comparant cette valeur de V' avec celle de V, on trouvera dans chaque cas particulier applicable à la pratique, que V' eſt plus grand que V; d'où il réſulte que l'angle de rotation horizontale du vaiſſeau augmente à meſure que le gouvernail préſente une plus grande ſurface au choc de l'eau.

LIV.

Toutes ces formules ne ſervent pas ſeulement à démontrer en général que telle cauſe produira tel effet; elles ont de plus l'avantage de donner des meſures préciſes des cauſes & des effets. Nous voyons ici que ſi l'on fait, par exemple, $f=0$, ou qu'on tranſporte le poids K préciſément au centre

de gravité de la charge, ou plutôt de la ligne verticale élevée par ce point, l'angle V' augmentera ſenſiblement, puiſque le numérateur de la fraction qui en eſt la valeur, augmentera & que ſon dénominateur diminuera. Cette augmentation de l'angle V' peut être ſoumiſe à un calcul rigoureux. Il en eſt de même de toute autre tranſpoſition de poids. En quelqu'endroit de l'avant qu'on prenne un poids, pour le tranſporter à l'arrière, l'angle de rotation ſe calcule ſans peine. Il y a plus : la formule précédente fournit le moyen de reconnoître parmi toutes les tranſpoſitions poſſibles de poids de l'avant à l'arrière celle qui eſt la plus avantageuſe au mouvement de rotation ; & voici comment on réſoudra ce problême.

L. V.

Conſidérons le gouvernail comme un rectangle vertical dont la largeur eſt très-petite par rapport à la demi-longueur du vaiſſeau, de manière que toutes les lignes horizontales menées de l'axe vertical gc à tous les points de la ſurface du gouvernail puiſſent être regardées comme égales. Nous ne faiſons cette ſuppoſition que pour abréger ; car le problême ſe réſoud par la même méthode, quelles que ſoient la figure & les dimenſions du gouvernail. Il eſt clair que la rapidité du ſillage demeurant toujours la même, la force F eſt ſimplement proportionnelle à la ſurface du rectangle qui forme le gouvernail. Soient h la hauteur verticale de ce rectangle, avant la tranſpoſition du poids K, m ſa largeur horizontale. Par la tranſpoſition du poids K de l'avant à l'arrière, la hauteur h augmente de la quantité Bb, c'eſt-à-dire de $\frac{gK.(c+f)R}{Q-Kc^2+Kf^2-\frac{K^2(c+f)^2}{N}} \times \left(b-\frac{K(c+f)}{N}\right)$. Cela poſé, on mettra hm à la place de F, le produit de m par cette valeur de Bb à la place de dF, dans la valeur générale de V', & on fera $V'=maximum$, & par conſéquent $dV'=0$. Si dans cette différentiation, on regarde f ſeule comme

variable, & le reſte comme conſtant, on déterminera l'endroit de l'arrière où il faut mettre un poids qu'on prend dans un endroit connu de l'avant. Si l'on regarde *c* comme variable & tout le reſte comme conſtant, on déterminera l'endroit de l'avant où il faut prendre un poids pour le mettre a un endroit connu de l'arrière. Je n'achève pas le calcul qui eſt un peu long, & dont vrai-ſemblablement la pratique ne tireroit pas grand ſecours. Il ſuffit d'avoir indiqué la ſolution du problême.

LVI.

L'objet principal des voiles eſt de procurer au vaiſſeau le mouvement de ſillage. Mais elles ſervent auſſi, de même que le gouvernail, à faire tourner le vaiſſeau autour de l'axe vertical *GC* élevé par le centre de gravité de la charge. Lorſqu'il y a un équilibre abſolu entre les voiles de l'avant & celles de l'arrière, par rapport à la ligne verticale dont on vient de parler, les voiles ne peuvent imprimer aucun mouvement de rotation au vaiſſeau. Mais ſitôt qu'on *cargue* quelques voiles d'un côté ſans toucher aux voiles qui ſont du côté oppoſé, l'équilibre eſt rompu, & le navire tourne néceſſairement autour de ſon centre de gravité. Suppoſons, par exemple, qu'on cargue quelques voiles du côté de l'avant *A*, de manière que la réſultante de tous les efforts du vent contre les voiles ſoit maintenant dirigée ſuivant *Rr*: il eſt clair que l'arrière *GB* du vaiſſeau tournera en allant de droite à gauche, & l'avant en allant de gauche à droite. Au contraire ſi l'on carguoit quelques voiles du côté de l'arrière, l'avant du vaiſſeau tourneroit en allant de droite à gauche, & l'arrière de gauche à droite. On voit par là que la plupart des choſes que nous avons dites au ſujet des mouvemens de rotation produits par l'action du gouvernail, s'appliquent aux mouvemens de rotation produits par l'action des voiles. Lorſqu'on voudra favoriſer ces

Fig. 28.

derniers mouvemens par l'arrimage, ſans faire changer de poſition à l'axe vertical GC, il faudra rapprocher le plus qu'on pourra de cet axe quelques poids fort peſans, en prenant ces poids égaux deux à deux, à diſtances oppoſées & égales de GC, & les plaçant à diſtances oppoſées égales du même axe GC. Toutes ces conditions, ou du moins d'autres équivalentes doivent être remplies.

LVII.

Nous avons dit, *ſans faire changer de poſition à l'axe* GC; car ſi, par exemple, on cargue quelques voiles du côté de l'avant, & que le centre d'impreſſion de celles qui reſtent tant à l'avant qu'à l'arrière, ſoit au point R du côté de l'arrière, qu'enſuite on prenne un poids K du côté de l'avant pour le porter en M à l'arrière, les réſultats changent; & la nouvelle place du poids K doit être déterminée de manière que l'angle de rotation ſoit un *maximum*.

Suppoſons :

- L'impulſion du vent dirigée ſuivant l'horizontale Rr perpendiculaire à AB . . . $= F$
- GR . . . . . $= a$
- GK . . . . . $= c$
- GM . . . . . $= f$
- La maſſe du navire . . . . . $= N$
- La ſomme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs diſtances à l'axe GC, avant la tranſpoſition du poids K . . . . . $= S$
- L'angle de rotation pour le rayon 1 . . . . $= u$.

On trouvera, en raiſonnant comme ci-deſſus,

$$u = \frac{F\left(a - \frac{K(c+f)}{N}\right)}{S - Kc^2 + Kf^2 - \frac{K(c+f)^2}{N}} = \text{maximum};$$

Donc, en conſidérant qu'ici F eſt une quantité conſtante;

& faiſant varier f ſeulement, on trouvera que la valeur de f eſt exprimée par une équation du ſecond degré. Pareillement ſi l'on fait varier c, en regardant tout le reſte comme conſtant, la valeur de c ſera exprimée par une équation du ſecond degré.

Je ne fais pas d'application particulière de la théorie établie dans cette ſection, comme j'en ai fait de la théorie établie dans la ſection précédente. Ce détail ne peut avoir aucune difficulté. J'avertirai ſeulement les Lecteurs qui voudront appliquer nos formules au vaiſſeau du §. XLVIII, que la ſurface du gouvernail de ce vaiſſeau eſt d'environ 400 pieds quarrés.

CONCLUSION.

Il ne ſera peut-être pas inutile de remettre ici ſous les yeux du Lecteur les principaux réſultats de ces recherches.

Le problême de l'arrimage des vaiſſeaux eſt un problême indéterminé, qui admet autant de différentes ſolutions qu'on peut avoir de différens vaiſſeaux à arrimer. Cette propoſition évidente par elle-même eſt établie par toutes les réflexions que nous avons faites ſur la manière dont l'arrimage favoriſe ou contredit les qualités du vaiſſeau. En effet, nous avons vu dans la ſection I du chapitre III, que pour empêcher la quille de plier ſous les forces dont elle eſt preſſée, il conviendroit de diſtribuer la charge proportionnellement aux capacités de la carène: on a vu dans la ſection III du même Chapitre que pour augmenter la ſtabilité du vaiſſeau & diminuer l'amplitude de ſes oſcillations, il faut abbaiſſer le centre de gravité de la charge totale; que pour diminuer la viteſſe des oſcillations il faut élever le centre de gravité de la charge, ou bien diſtribuer le plus qu'il eſt poſſible la charge dans les extrémités & dans les flancs du vaiſſeau: enfin nous venons de voir dans

cette ſection, que pour favoriſer les mouvemens de rotation produits par l'action du gouvernail ou des voiles, il faut principalement rapprocher la charge de l'axe vertical du vaiſſeau. Or il peut ſe faire qu'un vaiſſeau, relativement à ſa forme & à ſes capacités, ait plus beſoin que l'arrimage favoriſe telle ou telle qualité que telle autre. Ainſi la queſtion propoſée conſiſte à examiner exactement & en détail les phénomènes qui arriveront dans les mouvemens d'un vaiſſeau *donné*, lorſqu'on arrimera ce vaiſſeau de telle ou telle manière. Il eſt évident que cette méthode eſt la ſeule qu'on puiſſe employer pour découvrir l'arrimage qui convient le mieux à chaque vaiſſeau particulier. Ajoutons que la perfection de l'arrimage dépend preſqu'entièrement de la quantité & de la diſtribution du leſt. Les autres matières ont des emplacemens aſſez fixes, & leurs poids ſont limités. Si le point fondamental dont il s'agit eſt une fois manqué, on cherchera vainement en mer à y remédier: le vaiſſeau naviguera mal, quoique peut-être excellent en lui-même; & l'on ne pourra que pallier juſqu'à un certain point le vice de l'arrimage.

Pour mettre ces remarques dans le plus grand jour, je vais ajouter ici quelques devis de l'*Altier* & du *Fantaſque* dont nous avons déja parlé dans le chapitre II, avec les obſervations des Capitaines ſur la manière dont ces vaiſſeaux ſe ſont conduits à la mer dans différentes campagnes. Commençons par les proportions générales de ces deux vaiſſeaux.

*Proportions de l'*ALTIER*, vaiſſeau du Roi, de 64 canons, conſtruit à Toulon par M. Coulomb en 1757, & lancé à l'eau le 23 Mars 1760.*

Longueur de l'étrave à l'étambot	151 pieds	0 pou.
Largeur au maître bau de dehors en dehors des membres	40	0

Creux

Creux au-dessus de la quille, sous le maître bau	19 pieds	0 pou.
Longueur de la quille	135	0
Quête de l'étambot	2	0
Élancement de l'étrave	14	0
Tirant d'eau de l'arrière, le vaisseau armé en guerre	19	0
Tirant d'eau de l'avant, le vaisseau armé en guerre	17	0

Équipage en paix	320	hommes.
Équipage en guerre	450	

Canons	de 24 liv.	26	Total 64
	de 12	28	
	de 6	10	

Port en tonneaux ..... 1100 tonneaux

Proportions du FANTASQUE, *vaisseau du Roi, de 64 canons, construit à Toulon par M. Chapelle fils, en 1756, & lancé à l'eau le 10 Mai 1758.*

Longueur de l'étrave à l'étambot	151 pieds	0 pou.
Largeur au maître bau de dehors en dehors des membres	40	6
Creux de dessus la quille sous le maître bau	19	6
Longueur de la quille	133	9
Quête de l'étambot	3	0
Élancement de l'étrave	14	3
Tirant d'eau d'arrière, le vaisseau armé en guerre	20	6
Tirant d'eau d'avant, le vaisseau armé en guerre	17	3

Équipage en paix	320	hommes
Équipage en guerre	450	

Canons { de 24liv. ..... 26 / de 12 ..... 28 / de 6 ..... 10 } Total 64

Port en tonneaux ..... 1150 tonneaux

Devis de l'ALTIER, commandé par M. de Rochemore, Capitaine de vaiſſeaux ; campagne de 1762.

Vivres pour 6 mois ; eau pour 3 mois ; 450 hommes d'équipage & 45 mouſſes ; 21 barquées de leſt, ſavoir 17 ½ en pierres, 3 ½ en fer.

Ce vaiſſeau étant neuf, on a ſuivi, tant pour la quantité du leſt, que pour la façon de le placer, l'avis du Conſtructeur. En conſéquence on a placé 2 barquées de leſt en canons en avant de l'archipompe, & une barquée & demie en ſaumons ſous la foſſe aux cables, ſur le leſt en pierres. Des 17 barquées & demie en pierres, deux ont été placées de l'arrière de l'archipompe ; 12 à la calle à l'eau depuis l'archipompe juſqu'à la cloiſon de la foſſe aux cables ; 3 ½ ſous la foſſe aux cables.

Suivant le Conſtructeur, on devoit avoir en leſt 2 pieds 2 pouces de différence ; & on trouva que le vaiſſeau tiroit de l'arrière 15 pieds, & de l'avant 12 pieds 6 pouces ; que par conſéquent la différence étoit 2 pieds 6 pouces, c'eſt-à-dire de 4 pouces plus grande que le Conſtructeur ne penſoit. Ainſi on fut obligé de mettre la barquée & demie en ſaumons ſous la foſſe aux cables. Après avoir embarqué tous les vivres, & généralement toute la charge, le vaiſſeau tiroit d'eau

de l'arrière	19pieds	5 pou.
de l'avant	18	3
Différence	1	2

Ce vaiſſeau porte très-bien la voile, allant aſſez bien

vent arrière ou vent largue, mais non auſſi bien au plus près. Il va beaucoup mieux par un vent fort que par un vent foible. Son tangage eſt fort doux. Il ſoutient bien la cappe, & ſur-tout celle de la grande voile. Il ne fatigue pas ſa mâture. Il vire très-bien vent devant, mais il eſt un peu lâche pour arriver. Il dérive un peu à la cappe & ne va pas de l'avant. Pendant le premier mois, il étoit ce qu'on appelle vaiſſeau de compagnie; mais il n'a jamais été bon voilier.

Le Capitaine penſe que ce vaiſſeau doit naviger au moins avec deux barquées de plus de leſt; qu'ainſi il faut en mettre 23 au lieu de 21; & que la différence du tirant d'eau doit être de 14 pouces au lieu de 16 que le Conſtructeur avoit marqués. On n'a pas pu pendant la campagne mettre le vaiſſeau à cette différence, parce qu'on ne mouilla qu'à Tunis & à Alger, où la mer fut ſi groſſe qu'il fut impoſſible de prendre le tirant d'eau dont il s'agit. Le Capitaine penſe auſſi qu'il ne faut mettre que deux barquées au plus ſous la foſſe aux cables, & une barquée de plus en arrière. De cette manière, le vaiſſeau marchera bien, car il n'a d'ailleurs aucune mauvaiſe qualité.

Premier devis du FANTASQUE, *commandé par M. de Caſtillon le cadet, Capitaine de vaiſſeaux, campagne de 1759.*

Vivres pour 5 mois; 481 hommes d'équipage, 54 mouſſes; eau pour 3 mois en trois plans; leſt 240 tonneaux dont 70 en fer, 170 en pierre. Le plus fort du leſt étoit depuis le grand mât en avant, & le reſte en arrière juſqu'à la cloiſon des ſoutes à poudre.

Tirant d'eau de l'arrière	16 pieds	0 pou.
Tirant d'eau de l'avant	12	7
Différence	3	5 en leſt.

On trouva que cette différence étoit un peu trop grande, & on fut obligé de passer du lest sous le plancher de la fosse aux cables, pour mettre le vaisseau à la différence de 2 pieds 4 pouces. Il ne faudroit donner à ce vaisseau, pour une pareille campagne, que 3 pieds 2 pouces de différence en lest, comme il suit des observations qu'on rapportera bientôt.

Le vaisseau en rade & prêt à partir, tiroit d'eau

De l'arrière	20 pieds	0 pou.	
De l'avant	17	6	
Différence	2	6	
Hauteur de la batterie, au sabord du milieu	4	6	
Hauteur de la batterie, au sabord de l'arrière	5	6	9 lig.
Hauteur de la batterie, au sabord de l'avant	5	5	

On a observé, pendant la campagne, que la différence qui convient le mieux à ce vaisseau est de 2 pieds 2 à 3 pouces. Il a très-bien gouverné. Il n'a jamais manqué à virer. Ses mouvemens sont très-doux, & il ne fatigue pas sa mâture.

Second devis du FANTASQUE, *commandé par M. de Rochemore, campagne de 1760.*

Vivres pour 5 mois, & un mois en argent; 480 hommes d'équipage & 60 mousses; 20 barquées de lest, dont 10 en fer & 10 en pierre. Le lest en fer étoit composé de 7 barquées en vieux canons de plusieurs calibres placés depuis l'archipompe jusqu'à la fosse aux cables. A travers du vaisseau une barquée en boulets qui rempliſſoient les vuides des canons; deux autres en saumons sous le plancher de la fosse aux cables.

Tirant d'eau avec le lest en fer seulement.

De l'arrière	15 pieds	3 pou.	
De l'avant	12	2	
Différence	3	1	

Des 10 barquées en pierre, 7 étoient répandues depuis l'archipompe jusqu'à la fosse aux cables, & horizontalement; les 3 autres dans la calle au vin.

Tirant d'eau avec tout le lest tant en fer qu'en pierre,

De l'arrière	15 pieds	9 pou.	
De l'avant	11	8	6 lig.
Différence	3	0	6

Le vaisseau étant prêt à partir, tiroit d'eau,

de l'arrière	19 pieds	5 pou.	7 lig.
de l'avant	17	10	0
Différence	1	7	7

Il avoit alors 4 pieds 8 pouces 10 lignes de batterie au milieu.

Pendant la navigation, ce vaisseau a assez bien porté la voile. Il plioit facilement jusqu'à sa préceinte; mais il s'arrêtoit à cet endroit avec le gros comme avec le petit vent. Son fort pour la marche étoit le vent largue. Il ne marchoit pas si bien vent arrière, encore moins au plus près. Il gouvernoit bien, mais il ne marchoit pas avec un petit vent. Il viroit bien de bord. Ses mouvemens de tangage & de roulis étoient très-doux, & il ne fatiguoit pas sa mâture.

Comme ce vaisseau a son avant très-renforcé, le Capitaine jugea convenable de le mettre plus sur l'avant que ne porte le dernier devis; il le fit mettre à 2 pieds de différence, & on s'en trouva bien. Le vaisseau marcha mieux qu'auparavant; on présume que si on le mettoit à 22 pouces de différence, il marcheroit encore mieux.

Troisième devis du FANTASQUE, *commandé par M. de Cabaroux, Capitaine de vaisseaux, campagne de 1762.*

Vivres pour 6 mois; eau pour 3 mois; 450 hommes d'équipage & 45 mousses; 22 barquées de lest, dont 5 en fer & 17 en pierre. Le lest en fer étoit composé de 35 tonneaux de vieux canons placés depuis l'archipompe jusqu'à la fosse aux cables, de 15 tonneaux en saumons, qui furent mis en réserve moitié de chaque côté du grand mât pour balancer le vaisseau. Des 17 barquées de lest en pierre, il en a été placé 25 tonneaux depuis la fosse aux cables jusqu'à l'archipompe; & à l'arrière de l'archipompe jusqu'à la soute aux poudres, il a été fait un rempliſſage entre les varanges de porques avec 1500 saumons de fer, sur lesquels on a mis seulement 15 tonneaux de lest en pierre.

Le vaisseau dans cet état, son gouvernail en place, ses affuts de canon chacun à leur bord, tiroit d'eau

de l'arrière	15 pieds	6 pou.
de l'avant	12	8
Différence	2	10

Tout armé & prêt à partir, il tiroit d'eau

de l'arrrière	19 pieds	8 pou.
de l'avant	17	7
Différence	2	1

Hauteur de la batterie au sabord du milieu 4 pieds 8 pou.

Ce vaisseau n'a jamais bien marché qu'en partant du port. Il étoit vaisseau de compagnie avec toute l'escadre; il gouvernoit bien. Mais à mesure qu'il a été plus allégé par la consommation, il n'a plus marché. On a tenté de le mettre sur l'avant, sur l'arrière, mais inutilement; ce qui a fait penser que ce vaisseau veut être appuyé, & que

dans une pareille campagne, il auroit dû avoir 24 barquées de lest.

Il plie & va chercher son fort, haut; mais il se comporte parfaitement à la mer dans le gros temps. Sa batterie ne fait ni bruit ni mouvement. Il ne fatigue pas sa mâture; & ses mouvemens de tangage & de roulis sont fort doux.

Le fort de sa marche est vent largue & à quartier. Il n'est pas bon boulinier. Il craint la mer de l'avant & de l'arrière au plus près; ce qui fait penser qu'il seroit nécessaire de lui mettre une contrequille. Le Capitaine juge aussi qu'il conviendroit de porter ses deux mâts majeurs un peu plus à l'arrière : il est certain que par-là les voiles d'avant s'orienteroient mieux, & que le petit perroquet, qui ne porte jamais, boulineroit mieux.

Les exemples d'arrimage que je viens de rapporter, & les jugemens portés par les Capitaines sur les mouvemens des deux vaisseaux dont il s'agit, confirment plusieurs réflexions générales répandues dans le corps de cet Ouvrage. La plus importante de toutes, & qu'on ne sauroit trop répéter, est que la forme du vaisseau, la quantité & l'arrangement du lest, relativement à la durée de la campagne, ont ensemble une étroite liaison, qu'il faut étudier, parce que de-là dépend le sort de la navigation.

FIN.